

MATHEMATIK  
IN MONOGRAPHIEN UND LEHRBÜCHERN

X

W. MÜLLER

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE  
DER  
ZÄHEN FLÜSSIGKEITEN

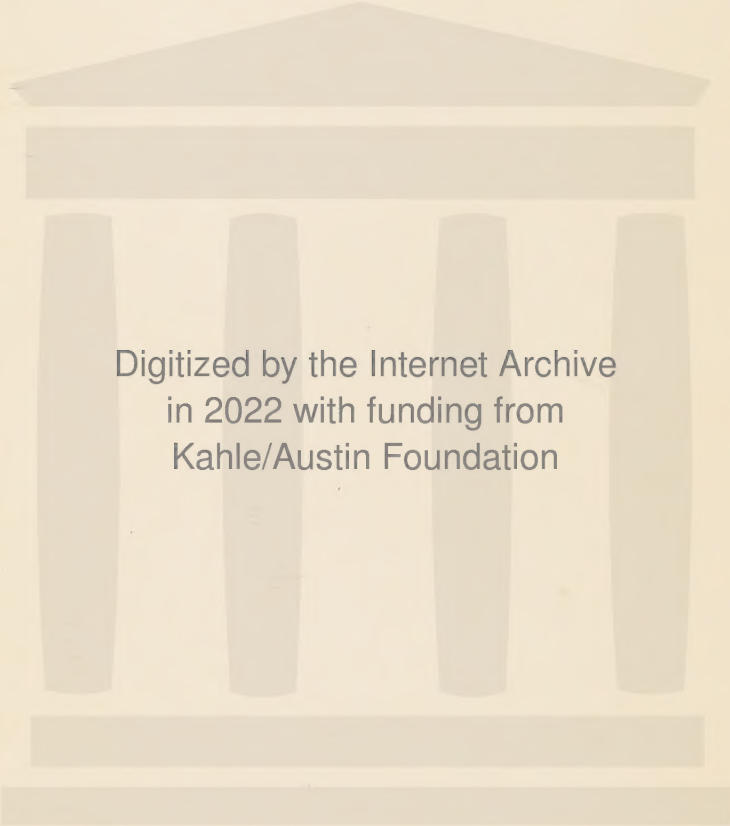


LEIPZIG  
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.



*Presented from the Library*  
*of*  
DR. HARRY BATEMAN

\* 5.50



Digitized by the Internet Archive  
in 2022 with funding from  
Kahle/Austin Foundation





MATHEMATIK  
UND IHRE ANWENDUNGEN  
IN MONOGRAPHIEN UND LEHRBÜCHERN

BEGRÜNDET VON

E. HILB

HERAUSGEGEBEN VON

E. ARTIN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HAMBURG

UND

G. KOWALEWSKI

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
DRESDEN

BAND 10:

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE  
DER ZÄHEN FLÜSSIGKEITEN

VON

W. MÜLLER



LEIPZIG 1932

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

# EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER ZÄHEN FLÜSSIGKEITEN

VON

DR. WILHELM MÜLLER

O. PROFESSOR FÜR MECHANIK AN DER DEUTSCHEN  
TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU PRAG

MIT 120 TEXTFIGUREN



LEIPZIG 1932

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.



COPYRIGHT 1932

BY AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG



DRUCK VON BREITKOPF & HÄRTEL IN LEIPZIG

532.5

M.947

## Vorwort

In der vorliegenden Darstellung der Grundlehren der Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten war ich bemüht, den Kreis der mathematischen Voraussetzungen in einer dem Forschungsgebiet entsprechenden Weise so einzuschränken, daß das Verständnis der mechanischen Vorgänge nicht durch unnötige formale und methodische Schwierigkeiten gestört wird. Wenn der Leser mit den Grundsätzen der Strömungstheorie der idealen Flüssigkeit, der Methode der einfachen Vektorrechnung und mit den wichtigsten Differentialgleichungen und den zugeordneten speziellen (z. B. den Besselschen) Funktionen vertraut ist, so wird er das Werk unschwer lesen und im wesentlichen den Zugang zu den Originalarbeiten finden können, wenn über diese auch nur gelegentlich und auszugsweise berichtet wurde.

Der besondere Charakter meiner Arbeit ist wesentlich bestimmt durch die Bevorzugung anschaulicher Methoden und durch den Zusammenhang mit physikalischen Vorstellungen und versuchstechnischen Forschungsergebnissen, wie die zahlreichen den Text begleitenden Diagramme, Lichtbilder und Zeichnungen erkennen lassen. Während die Erläuterungsskizzen, die sich schließlich jeder selbst herstellen kann, sehr stark eingeschränkt oder ganz weggelassen sind, ist um so größerer Wert auf solche Zeichnungen gelegt worden, die einen gesamten Bewegungsvorgang veranschaulichen und das Resultat einer Rechnung synthetisch vor Augen stellen. Hier hat der Verfasser auf die skizzenartige Wiedergabe fast vollkommen verzichtet und namentlich nur solche Strombilder geliefert, die nach rechnerisch-graphischer Methode punktweise genau konstruiert sind. Bis auf wenige Ausnahmen sind auch diejenigen Strombilder vom Verfasser neu berechnet worden, die bereits in der Literatur vorliegen. Ich darf mich der Erwartung hingeben, daß die dabei aufgewendete Mühe — und sie ist der Bemühung um die mathematische Formgebung mindestens gleichwertig — nicht ganz vergeblich gewesen ist, und daß die Verbindung von Rechnung und Zeichnung zur Förderung des Interesses und zur Unterstützung und Belebung der Vorstellung einiges beitragen wird.

50/60 - 60

Da die Anlage des Ganzen aus dem ausführlichen Inhaltsverzeichnis hervorgeht, bedarf es nur einiger Worte, um die Absichten des Verfassers zu erläutern. In dem ein Kapitel umfassenden allgemeinen Teil bin ich von dem allgemeinen elastischen Zustand der Materie ausgegangen, um daraus auf möglichst natürlichem Wege die auf die zähe oder reibende Flüssigkeit bezüglichen Grundsätze und Grundgleichungen abzuleiten, insbesondere das Beschleunigungs- und Kraftgesetz, die Energie- und Impulssätze, die in den späteren Kapiteln benutzt werden. Der dem Interesse der Abkürzung wie der Anschaulichkeit dienende Gebrauch der Vektorrechnung dürfte nach dem Erscheinen des ausgezeichneten und für alle Anwendungen wertvollen Lehrbuches von Lagally nicht mehr als störend empfunden werden, um so weniger als in der vorliegenden Darstellung die Beziehung zum Bezugssystem niemals vollständig unterbrochen und dem Übergang zu den wichtigsten krummlinigen Koordinaten ein besonderer Paragraph gewidmet ist.

In dem speziellen, eine größere Zahl von Kapiteln umfassenden Teil sollte dem Einführungscharakter des Buches entsprechend ein allmähliches Fortschreiten von den einfachsten zu schwierigeren und zusammengesetzten Bewegungsvorgängen eingehalten und die Anordnung so getroffen werden, daß die verschiedenen Methoden, Problemstellungen und Begriffe möglichst nach der Reihe und an Hand von einfachen mechanischen Sonderfällen hervortreten. Um eine einigermaßen vollständige Zusammenfassung der mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln erreichbaren Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen bieten zu können, mußte eine größere Mannigfaltigkeit von physikalisch und technisch wichtigen Einzelfragen vorgeführt werden. Soweit es im Rahmen eines solchen Buches möglich war, habe ich dabei neben der neueren auch die ältere Literatur — ich denke dabei etwa an die Untersuchungen von Helmholtz — berücksichtigt, ferner auch mehrere ausländische, insbesondere französische, englische und nordische Arbeiten, die bei uns noch nicht den verdienten Eingang gefunden haben. Die Vielgestaltigkeit des Inhalts im einzelnen darf nicht verwechselt werden mit einer Vollständigkeit der dargebotenen wissenschaftlichen Disziplin im ganzen. Abgesehen davon, daß die allgemeinen Methoden der Randwertprobleme, wie sie z. B. Oseen gibt, kaum in die Darstellung hineinspielen und viele mathematische Detailbetrachtungen fehlen, so beschränkt sich die physikalische Einzeluntersuchung im wesentlichen auf diejenigen Erscheinungsgruppen, die sich unter dem Gesichtspunkt des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes betrachten lassen, während auf die genauere Analyse z. B. der Oberflächen-



erscheinungen, Wellenbewegungen und Schwimmvorgänge, die durch andere und kompliziertere Ähnlichkeitsgesetze beherrscht werden, verzichtet werden mußte. Das letzte, auf die Theorie der Turbulenz sich beziehende Kapitel hat mehr den Charakter eines der Übersicht dienenden Anhangs angenommen. Bei der mathematischen und physikalischen Schwierigkeit dieses Forschungsgebietes, das bisher noch mehr wertvolle Versuche und Ansätze als gesicherte Resultate aufzuweisen hat, war eine verkürzte und skizzenhafte Darstellung und gelegentliche Beschränkung auf die Angabe der wesentlichsten Ergebnisse fast unvermeidlich. Sollte dem Buche das glückliche Schicksal vergönnt sein, einen Platz in der Literatur von einer gewissen Dauer zu gewinnen, so würde mir nichts willkommener sein als an seiner fortgesetzten Verbesserung zu arbeiten und alle Bausteine, die vom Standpunkt der Zukunft als vorläufig gelten müssen, durch neuere zu ersetzen, die einen größeren Sicherheitsgrad besitzen.

Endlich noch einige Bemerkungen persönlicher Art. Es ist mir eine angenehme Pflicht, mehrerer — ich darf wohl sagen — Mitarbeiter zu gedenken, die Wesentliches beigetragen haben zur Fertigstellung des Werkes in seiner jetzigen Gestalt. In erster Linie bin ich den Herrn Kollegen Professor Dr. H. Schmidt und Privatdozenten Dr. F. Eisner zu Dank verpflichtet für die sorgfältige und gewissenhafte Unterstützung beim Lesen der Korrektur und die wertvolle Ratgebung in vielen Einzelfragen; ebenso sind mehrere Anregungen, die ich dem persönlichen Verkehr mit meinem Prager Kollegen Herrn Professor Dr. P. Funk verdanke, dem Buche zugute gekommen. Auch meine Assistenten, Herr Dr. Lindner und Herr Ing. R. Höger haben sich in dankenswerter Weise bemüht, mir meine Arbeit zu erleichtern, insbesondere bei der Herstellung vieler Zeichnungen und der Anfertigung des Namen- und Sachregisters. Ferner gedenke ich noch dankbar eines früheren Schülers, des Herrn Dipl.-Ing. W. Bartels-Hannover, der bei den ersten Zeichnungen behilflich war.

Endlich möchte ich nicht versäumen, auch dem bewährten Verlag meinen schuldigen Dank abzustatten für das Entgegenkommen, das er meinen Wünschen gegenüber gezeigt hat und für die sorgfältige Ausstattung, die er dem Buche hat zuteil werden lassen.

Hannover, Juli 1932

WILH. MÜLLER

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung. § 1. Der allgemeine Begriff der Flüssigkeit . . . . .	1
I. Kapitel. Allgemeine Grundlagen und Grundgleichungen . . . . .	3
§ 2. Der Deformationstensor . . . . .	3
§ 3. Beziehung zwischen Deformation und Spannung . . . . .	7
§ 4. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen . . . . .	12
§ 5. Zähigkeit und Ähnlichkeitsgesetz . . . . .	16
§ 6. Reibungsarbeit und Dissipationsfunktion . . . . .	20
§ 7. Impulssätze für die allgemeine Flüssigkeit . . . . .	24
§ 8. Transformation auf Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	27
II. Kapitel. Stationäre Laminarströmung zwischen ebenen Wänden . .	31
§ 9. Lineare Strömung zwischen ebenen Wänden. . . . .	31
§ 10. Bewegung einer ebenen Tragfläche auf einer Flüssigkeitsschicht	35
§ 11. Ebene Strömung dünner Flüssigkeitsschichten . . . . .	37
§ 12. Strömende Flüssigkeitsschicht von linear veränderlicher Dicke	41
III. Kapitel. Geradlinige zweidimensionale Strömung mit zylindrischer	
Begrenzung . . . . .	43
§ 13. Axiale Bewegung von Zylindern in der zähen Flüssigkeit . .	43
§ 14. Achsiale Bewegung von Kreiszyllindern in der zähen Flüssigkeit	44
§ 15. Strömung mit festen und bewegten Grenzebenen . . . . .	48
§ 16. Einige weitere Fälle mit ebener Begrenzung. . . . .	50
IV. Kapitel. Strömung durch zylindrische Rohre . . . . .	54
§ 17. Das Poiseuillesche Gesetz . . . . .	54
§ 18. Einfache Anwendungen des Poiseuilleschen Gesetzes . . . . .	59
§ 19. Kapillarmethode der Zähigkeitsmessung . . . . .	61
§ 20. Strömung in Rohren mit nicht kreisförmigen Querschnittsformen	67
§ 21. Empirische Gesetze für die turbulente Rohrströmung . . . . .	71
§ 22. Gas- und insbesondere Luftströmung in nichtkapillaren Rohren	79
V. Kapitel. Ebene Strömung mit geometrischem Potentialcharakter . .	82
§ 23. Die allgemeinen Differentialgleichungen des Problems . . . . .	82
§ 24. Stationäre Quell- und Kreisströmung. . . . .	84
§ 25. Die freie Quellströmung in der zähen Flüssigkeit . . . . .	87
§ 26. Radialströmung zwischen ebenen Wänden . . . . .	88
VI. Kapitel. Instationäre Bewegung der zähen Flüssigkeit . . . . .	90
§ 27. Eindimensionale instationäre Flüssigkeitsbewegung . . . . .	90
§ 28. Das Fouriersche Problem für die zähe Strömung . . . . .	94
§ 29. Anwendungen der Fourierschen Formeln . . . . .	96
§ 30. Instationäre ebene Spiralströmung . . . . .	100
§ 31. Ausbreitung eines Wirbels in einer zähen Flüssigkeit . . . . .	104

§ 32. Beispiele von Strudelströmungen . . . . .	110
§ 33. Verallgemeinerungen . . . . .	113
VII. Kapitel. Zähle Strömung in der Umgebung geradlinig bewegter fester Körper bei kleinen Reynoldsschen Zahlen . . . . .	120
§ 34. Langsame stationäre Strömung um Kreiszyylinder . . . . .	120
§ 35. Die Lamb-Oseensche Lösung für einen Kreiszyylinder . . . . .	127
§ 36. Berechnung der Stromfunktion und Ergänzung der Lösung . . . . .	133
§ 37. Translation eines Rotationskörpers, insbesondere einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit . . . . .	137
§ 38. Annäherungslösung der genauen Gleichung . . . . .	144
§ 39. Vergleich mit dem Versuch. Einfluß der Gefäßwände auf die Bewegung . . . . .	147
§ 40. Berechnung des Widerstandes . . . . .	152
§ 41. Einfluß der Wände auf den Widerstand und Vergleich mit der Messung . . . . .	154
§ 42. Das Widerstandsgesetz für größere Geschwindigkeiten . . . . .	158
§ 43. Die beschleunigte Bewegung der Kugel in der zähen Flüssigkeit . . . . .	159
§ 44. Eine momentan aus der Ruhe in Bewegung versetzte Kugel in der zähen Flüssigkeit . . . . .	162
VIII. Kapitel. Theorie des Widerstandes für große Reynoldssche Zahlen (nach Prandtl) . . . . .	168
§ 45. Reibungs- oder Grenzschicht . . . . .	168
§ 46. Differentialgleichung und Impulsgleichung für die Grenzschicht . . . . .	173
§ 47. Zurückführung der Grenzschichtgleichung auf die Wärmeleitungs- gleichung . . . . .	178
§ 48. Widerstand einer in die Strömungsrichtung gestellten ebenen Platte (bei laminarer Grenzschicht) . . . . .	179
§ 49. Widerstand einer ebenen Platte bei turbulenter Grenzschicht . . . . .	183
§ 50. Lösung von Blasius für den symmetrischen Fall . . . . .	185
§ 51. Methode von Boussinesq-Burgers . . . . .	188
§ 52. Ablösung und Widerstand bei nicht-stationärer Bewegung . . . . .	193
§ 53. Der achsensymmetrische Fall . . . . .	198
IX. Kapitel. Rotation fester Körper in einer zähen Flüssigkeit . . . . .	200
§ 54. Allgemeiner Ansatz für die gleichmäßige langsame Drehung . . . . .	200
§ 55. Stationäre Drehbewegung von Zylindern in der Flüssigkeit . . . . .	202
§ 56. Versuche mit rotierenden Zylindern . . . . .	204
§ 57. Theorie des geschmierten Zapfens . . . . .	209
§ 58. Langsame Rotation eines Zylinders in der Nähe einer ebenen Wand . . . . .	215
§ 59. Rotation von Kugeln um einen Durchmesser . . . . .	220
§ 60. Langsame Rotation des Ellipsoids und der Kreisscheibe . . . . .	222
§ 61. Die genaue Rechnung für die rotierende Scheibe . . . . .	226
§ 62. Reibungswiderstand einer rotierenden Scheibe im turbulenten Fall . . . . .	230
§ 63. Die wirkliche Strömung in der Umgebung rotierender Körper . . . . .	233
X. Kapitel. Instationäre Drehbewegung von Rotationskörpern in zähen Flüssigkeiten . . . . .	237
§ 64. Dreheschwingungen einer Kugel um einen Durchmesser . . . . .	237



§ 65. Drehschwingung einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel . . .	241
§ 66. Aperiodische Drehung einer Kugel um einen Durchmesser . . .	245
§ 67. Beschleunigte (oder verlangsamte) Drehung eines Zylinders . . .	247
§ 68. Drehschwingung eines Zylinders in der Flüssigkeit . . . . .	250
§ 69. Drehschwingung eines begrenzten Zylinders . . . . .	253
§ 70. Schwingungen einer Scheibe . . . . .	257
XI. Kapitel. Elemente der Oseenschen asymptotischen Theorie des Widerstandes . . . . .	
§ 71. Allgemeines . . . . .	261
§ 72. Die asymptotische Lösung von Oseen . . . . .	264
§ 73. Allgemeine Formeln für die Berechnung der Kräfte. . . . .	270
§ 74. Charakterisierung des asymptotischen Potentialproblems. Das Poissonsche Integral . . . . .	272
§ 75. Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis . . . . .	275
§ 76. Widerstand eines Kreiszyllinders . . . . .	278
§ 77. Bewegung einer ebenen Platte . . . . .	281
§ 78. Berechnung der Stromfunktion für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	287
§ 79. Größe und Lage der Druckkraft . . . . .	292
§ 80. Allgemeine Sätze über Kielwasserströme vom Oseenschen Typus . . . . .	298
§ 81. Anwendung auf die Oseen-Strömung um die ebene Platte . . . . .	301
§ 82. Die Zeilonsche Erweiterung des Oseenschen Ansatzes . . . . .	303
§ 83. Druckverhältnisse im Kielwasser. Einführung von Gleitintervallen . . . . .	307
§ 84. Endliche Gleitintervalle für den Fall des Kreiszyllinders. . . . .	309
XII. Kapitel. Ergebnisse der Turbulenztheorie . . . . .	
§ 85. Stabilität und Turbulenz . . . . .	313
§ 86. Stabilität der Strömung zwischen ebenen Wänden . . . . .	316
§ 87. Stabilität der Poiseuille-Strömung . . . . .	320
§ 88. Stabilität der Flüssigkeitsbewegung zwischen rotierenden Zylindern . . . . .	323
§ 89. Stabilität und Grenzschicht . . . . .	328
§ 90. Einfluß der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils . . . . .	334
§ 91. Überblick über weitere Lösungsversuche . . . . .	338
§ 92. Energetische Ansätze zum Turbulenzproblem . . . . .	340
§ 93. Energiegleichung für die ausgebildete Turbulenz . . . . .	343
§ 94. Erweiterung der hydrodynamischen Differentialgleichungen für die Turbulenz . . . . .	351
§ 95. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz . . . . .	355
Namenverzeichnis . . . . .	363
Sachverzeichnis . . . . .	365

## Einleitung.

### § 1. Der allgemeine Begriff der Flüssigkeit.

Unter dem Begriff der Flüssigkeit faßt man alle Körper zusammen, deren Teile einen nicht-starren Zusammenhang haben, die also durch das Fehlen der Formbeständigkeit ausgezeichnet sind. Durch eine derartige Abgrenzung gegenüber den starren Körpern wird aber nur sehr wenig Positives über die besonderen Eigenschaften des flüssigen Zustandes der Materie ausgesagt, so daß man auch die gasförmigen Körper als flüssig oder fließend bezeichnen kann. In der Tat ergibt sich die Berechtigung dieser Begriffserweiterung aus einer großen Zahl von Gesetzen des Gleichgewichtes und der Bewegung, die allen nicht-starren Medien gemeinsam sind. Die Unterschiede sind aber doch groß genug, um eine Trennung zu rechtfertigen, die man einfach dahin formulieren kann, daß der typischen oder tropfbaren Flüssigkeit die Eigenschaft der Volumbeständigkeit zukommt, während das Volumen des typischen Gases in hohem Maße von Druck und Temperatur abhängt. Wir werden uns in der Hauptsache mit den echten Flüssigkeiten befassen und die Gasbewegung nur soweit berücksichtigen, als man berechtigt ist, auf sie die Gesetze der Flüssigkeiten anzuwenden, also von der Volumenänderung abzusehen.

Die Gruppe von Körpern, die man nach diesen Einschränkungen als echte Flüssigkeiten bezeichnen kann, zeigt aber noch eine so große Mannigfaltigkeit von Zuständen und Eigenschaften, daß eine weitere Aufteilung geboten erscheint. Wie bereits bei der Aufstellung des Begriffes der Starrheit bedürfen wir dabei einer Abstraktion, die sich für die Verfolgung der quantitativen Gesetzmäßigkeiten als äußerst fruchtbar erweist. Es ist bekannt, daß das Verhalten vieler echter Flüssigkeiten, z. B. des Wassers, besonders im Gleichgewichtszustand und unter bestimmten einfachen Bewegungsbedingungen sehr vollständig beschrieben werden kann, wenn man annimmt, daß kein innerer Widerstand gegen Formänderung oder keine innere Reibungsspannung zwischen den sich berührenden Schichten auftritt, daß also der Druck (z. B. auf einen eingetauchten Körper) stets senkrecht zur Angriffsfläche gerichtet und unabhängig ist von der Stellung

dieser Fläche. Dieses Verhalten, das für viele Flüssigkeiten unter bestimmten Voraussetzungen zutrifft, faßt man bekanntlich unter dem Begriff der idealen Flüssigkeit zusammen. Aber es gibt auch für Flüssigkeiten wie Wasser, die sich zunächst in vielen Fällen ideal verhalten, so viele Ausnahmerecheinungen wesentlicher Art, daß man auf die Dauer und für eine vollständige Erklärung der Bewegungsvorgänge ohne Erweiterung der Grundbegriffe, also ohne Einführung der inneren Reibung, nicht auskommen kann. Man braucht nur an die jeder Erfahrung widersprechende Folgerung aus dem Begriff der idealen Flüssigkeit zu denken, die besagt, daß ein in einer Flüssigkeit translatorisch bewegter Körper keinen Widerstand findet, eine Folgerung, die besonders für fast alle technischen Anwendungen ganz unannehmbar ist. Es wird sich zeigen, daß auch die unmittelbar technisch verwendbaren, von der Theorie der idealen Flüssigkeit gelieferten Kräfte, wie z. B. die Auftriebswirkung bei Flugzeugtragflügeln oder die treibenden Kräfte bei Turbinen, in letzter Linie auf innere Reibung zwischen den Flüssigkeitsteilchen zurückzuführen sind. Den entscheidenden Gesichtspunkt für die dynamische Beurteilung und Unterscheidung der verschiedenen Flüssigkeiten liefert nicht die innere Reibung selbst, sondern der damit verwandte Begriff der Zähigkeit, der in einfachster Weise mit der Reibung und der Dichte zusammenhängt. Mit Hilfe dieses zahlenmäßig festlegbaren Begriffes ist nicht nur die einzelne Flüssigkeit in bestimmter Weise gekennzeichnet und die Möglichkeit einer natürlichen Ordnungsskala gegeben; es gelingt auch auf der Grundlage der Zähigkeitsbestimmung, eine ganz neue Gruppe von Erscheinungen, die sich sonst nur oberflächlich erklären lassen — man denke an die für die Technik so wichtigen Kräfteverhältnisse bei der Reibung in geschmierten Maschinengelenken und Zapfen —, der strengeren Untersuchung zugänglich zu machen.

Die Berücksichtigung der tangentialen Spannkkräfte oder der Reibungsspannung führt zu dem Begriff der zähen Flüssigkeit, als deren in der Natur nur näherungsweise vertretene Grenzform die ideale Flüssigkeit aufzufassen ist. In ihrer allgemeinen Bedeutung tritt die Zähigkeit erst dann hervor, wenn man die Flüssigkeit dem allgemeinen elastischen Zustand unterordnet. In diesem Sinne werden wir im folgenden von dem elastischen Deformations- und Spannungszustand und seinen gesetzmäßigen Beziehungen auszugehen und die besonderen Folgerungen zu entwickeln haben, die sich ergeben, wenn man auf die durch Erfahrung gewonnenen Eigenschaften der Flüssigkeiten, also z. B. die Volumbeständigkeit oder Unzusammendrückbarkeit, Rücksicht nimmt.



## ERSTES KAPITEL.

## Allgemeine Grundlagen und Grundgleichungen.

## § 2. Der Deformationstensor.

Die Bewegung einer Flüssigkeit kann mathematisch durch das Vektorfeld der Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen dargestellt werden. Bei einer solchen Bewegung ist nun jedes Flüssigkeitselement im allgemeinen beständigen Formänderungen ausgesetzt, die in einem bestimmten Zeitpunkt von Ort zu Ort verschieden ausfallen werden. Wie wir uns die Flüssigkeit als eine kontinuierlich zusammenhängende Masse vorstellen, so wollen wir auch für die vom Ort abhängige innere Verschiebung der Teile das Prinzip der Stetigkeit voraussetzen. Nun läßt sich die örtlich bezogene Deformation durch den Unterschied der Verschiebungsgeschwindigkeiten zweier benachbarter Punkte  $P$  und  $P'$  darstellen. Wie alle gerichteten oder Vektorgrößen, die wir zu betrachten haben, werden wir den Geschwindigkeitsvektor mit einem deutschen Buchstaben ( $\mathbf{v}$ ) bezeichnen oder ihn durch die Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  in bezug auf ein gewöhnliches rechtwinkliges und rechtsdrehendes Koordinatensystem  $x, y, z$  darstellen. Wenn man den Übergang vom Punkt  $P$  zum Nachbarpunkt  $P'$  durch das Differential  $\delta$  ausdrückt (zum Unterschied vom zeitlichen Differentialzeichen  $d$ ), so werden die Komponenten der Relativgeschwindigkeit beider Punkte

$$(1) \quad \delta v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_j}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_j}{\partial z} \delta z \quad (j = x, y, z).$$

Bezeichnet man den vom Anfangspunkt zum Aufpunkt gezogenen Ortsvektor mit  $\mathbf{r}$  und den symbolischen Vektor der räumlichen Differentiation  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  abgekürzt mit  $\nabla$  (Nabla), so lassen sich die drei Gleichungen (1) in die eine Vektorgleichung zusammenziehen<sup>1)</sup>

$$(1a) \quad \delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Nach Einführung der für die Folge wichtigen Größen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ w_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad w_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad w_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Wir legen im folgenden die Bezeichnungen zugrunde, wie sie in dem Buche von M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1928, gebraucht werden.

erhalten wir nach einfacher Umformung z. B. für die  $x$ -Komponente den Ausdruck

$$(3) \quad \delta v_x = \varepsilon_x \delta x + \gamma_{xz} \delta y + \gamma_{xy} \delta z + w_y \delta z - w_z \delta y,$$

und die entsprechenden Ausdrücke für  $\delta v_y$  und  $\delta v_z$  ergeben sich hieraus durch zyklische Permutation der Indizes.

Die beiden letzten Glieder stellen nun die  $x$ -Komponente des Vektorprodukts  $\mathbf{w} \times \delta \mathbf{r}$  der beiden Vektoren  $\mathbf{w} (w_x, w_y, w_z)$  und  $\delta \mathbf{r} (\delta x, \delta y, \delta z)$ , also einen neuen Vektor dar, der senkrecht steht auf  $\mathbf{w}$  und  $\delta \mathbf{r}$  und so orientiert ist zu den Vektorfaktoren, daß  $\mathbf{w}$ ,  $\delta \mathbf{r}$  und  $\mathbf{w} \times \delta \mathbf{r}$  ein Rechtssystem bilden: das ist aber nichts anderes als der Vektor der Geschwindigkeit, die der Punkt  $P'$  annimmt, wenn er um die Achse  $\mathbf{w}$  im positiven Sinne mit der Winkelgeschwindigkeit  $w$  rotiert (vgl. Abb. 1). Der Vektor  $\mathbf{w}$ , der demnach die innere Rotation der Flüssigkeit an der betrachteten Stelle charakterisiert, wird auch als Wirbelvektor bezeichnet. Es ist

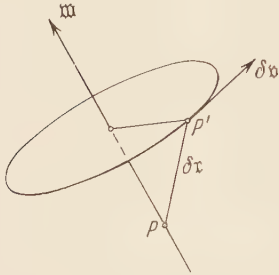


Abb. 1. Relativgeschwindigkeit bei der Drehung.

ohne weiteres klar, daß diese Verdrehung eines Teilchens auf seine Verzerrung ohne Einfluß bleibt.

Die eigentliche oder reine Deformation wird daher durch die ersten Glieder des Ausdruckes (3) bestimmt, und zwar ergibt sich aus einer einfachen Überlegung, daß  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  die Geschwindigkeiten der Streckung (bzw.

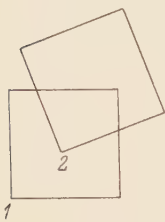


Abb. 2a. Translation und Drehung.



Abb. 2b. Streckung.

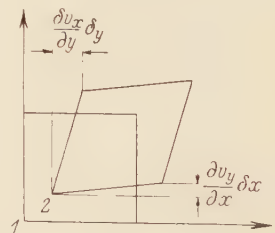


Abb. 2c. Schiebung.

Zusammenziehung) eines Flüssigkeitselementes in den Koordinatenrichtungen und die Größen  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$  die Geschwindigkeiten der Winkeländerungen in den zu den Koordinatenachsen senkrechten Ebenen bedeuten. Wir haben in den obenstehenden Abb. 2 die drei Verschiebungsformen in der Ebene an einem Flüssigkeitselement veranschaulicht, das nach Verlauf eines kleinen Zeitintervalls von der Lage 1 in die Lage 2 über-

geht. Während die Drehung die Gestalt des Quadrates ungeändert läßt, wird es im zweiten Fall ohne Winkeländerung gestreckt, während bei der Schiebung eine derartige Verzerrung eintritt, daß der ursprünglich rechte Winkel sich um den Betrag  $\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$  verkleinert bzw. vergrößert.

Das gesamte sechsgliedrige System der Größen (2) wird der Deformationstensor oder der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten genannt. Die Verknüpfung seiner Komponenten mit  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  in den Ausdrücken für die Geschwindigkeitsunterschiede, die also auf eine Vektorbildung hinauskommt, kann man unter Verallgemeinerung einer bekannten Begriffsbildung der Vektorrechnung als inneres Produkt des abgekürzt mit  $\mathbf{D}$  bezeichneten Tensors mit dem Vektor  $\delta \mathbf{r}$  bezeichnen. Dann lassen sich die Gleichungen (3) in anschaulicher Vektorschreibweise zusammenziehen zu

$$(3a) \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{w} \times \delta \mathbf{r}.$$

Daß der Tensor  $\mathbf{D}$  die Verzerrung vollständig charakterisiert, ergibt sich auch daraus, daß die Änderung des Abstandsquadrates der beiden Punkte  $P$  und  $P'$  als Funktion der Komponenten von  $\mathbf{D}$  dargestellt werden kann. Da nämlich nach Ablauf der Zeit  $dt$  den Punkten  $P$  und  $P'$  die Ortsvektoren

$$\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \text{ bzw. } \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} + (\mathbf{v} + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v})dt$$

entsprechen, von denen die Projektionen auf die  $x$ -Achse lauten

$$x + v_x dt, \text{ bzw. } x + dx + \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \delta z \right) dt,$$

so wird die zeitliche Änderung des Abstandes

$$d(\delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v} dt$$

oder

$$(4) \quad d(\delta \mathbf{r})^2 = 2dt [\epsilon_x (\delta x)^2 + \epsilon_y (\delta y)^2 + \epsilon_z (\delta z)^2 + 2\gamma_{yz} \delta y \delta z + 2\gamma_{xz} \delta x \delta z + 2\gamma_{xy} \delta x \delta y],$$

wenn wir in der Entwicklung die quadratischen Glieder vernachlässigen. Wenn wir die Klammerfunktion  $F$  ( $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ ) gleich einer Konstanten setzen, so erhalten wir in

$$(5) \quad F = \epsilon_x (\delta x)^2 + \epsilon_y (\delta y)^2 + \epsilon_z (\delta z)^2 + 2\gamma_{yz} \delta y \delta z + 2\gamma_{xz} \delta x \delta z + 2\gamma_{xy} \delta x \delta y = \text{konst.}$$

die Gleichung eines den Punkt  $P$  als Mittelpunkt umgebenden Ellipsoids mit  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  als laufenden Koordinaten, das man als Deformationsellipsoid zu bezeichnen pflegt, weil es das Verhalten des Deformationstensors vollkommen charakterisiert. Da nämlich die partiellen Ableitungen von  $F$  nach den Koordinaten mit den Verschiebungsgeschwindigkeiten (1) proportional sind, so ergibt sich, daß jeder dem Punkt  $P$  benachbarte

Punkt  $P'$  sich gegen  $P$  in Richtung der Normalen des zugehörigen Ellipsoids verschiebt. Die Hauptachsen des Ellipsoids sind die Hauptachsen der Deformation. Liegt der Punkt  $P'$  auf einer dieser Hauptachsen, des Ellipsoids, so erfährt die Verbindung  $PP'$  eine reine (positive oder negative) Streckung. Wenn wir das in die Hauptachsen fallende Bezugssystem mit  $x' y' z'$  bezeichnen, und die entsprechenden Deformationsglieder  $\varepsilon'_x = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon'_y = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon'_z = \varepsilon_3$  setzen, so gewinnen wir aus dem beistehenden Schema der Richtungskosinusse die Transformationsgleichungen

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & l_1 m_1 n_1 & x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' & v_x = l_1 v'_x + l_2 v'_y + l_3 v'_z \\ y' & l_2 m_2 n_2 & y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' & v_y = m_1 v'_x + m_2 v'_y + m_3 v'_z \\ z' & l_3 m_3 n_3 & z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' & v_z = n_1 v'_x + n_2 v'_y + n_3 v'_z \end{array}$$

aus denen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v'_x}{\partial x'} l_1^2 + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} l_2^2 + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} l_3^2$$

usw. folgt. Demnach erhalten wir für die Tensorkomponenten die Transformationsgleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = l_1^2 \varepsilon_1 + l_2^2 \varepsilon_2 + l_3^2 \varepsilon_3, & \gamma_{yz} = m_1 n_1 \varepsilon_1 + m_2 n_2 \varepsilon_2 + m_3 n_3 \varepsilon_3, \\ \varepsilon_y = m_1^2 \varepsilon_1 + m_2^2 \varepsilon_2 + m_3^2 \varepsilon_3, & \gamma_{xz} = l_1 n_1 \varepsilon_1 + l_2 n_2 \varepsilon_2 + l_3 n_3 \varepsilon_3, \\ \varepsilon_z = n_1^2 \varepsilon_1 + n_2^2 \varepsilon_2 + n_3^2 \varepsilon_3, & \gamma_{xy} = l_1 m_1 \varepsilon_1 + l_2 m_2 \varepsilon_2 + l_3 m_3 \varepsilon_3, \end{cases}$$

die z. B. die Beziehung liefern:

$$(7) \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Die Summe der Dilatationskomponenten erster Art hat also für jedes durch den Punkt  $P$  gezogene Achsenkreuz denselben Wert oder ist von der besonderen Wahl des Achsenkreuzes unabhängig.

Dieser Satz findet seine unmittelbare anschauliche Bestätigung durch die Bemerkung, daß diese Summe, die auch als Divergenz der Geschwindigkeit  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  bezeichnet wird, die räumliche Dilatation oder die bei der Dehnung eintretende Vergrößerung des Einheitsvolumens darstellt. Bei inkompressiblen oder volumbeständigen Flüssigkeiten hat man daher im besonderen die Gleichung

$$(8) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

die wir später den speziellen Anwendungen zugrunde legen werden, wenn es auch zunächst empfehlenswert erscheint, in den allgemeinen Ansätzen die Divergenz der Geschwindigkeit als eine von Null verschiedene Größe mitzuführen. Wenn wir eine strömende Flüssigkeit, deren Dichte konstant



sein möge, auf eine raumfeste, geschlossene Elementarfläche, etwa ein elementares Parallelepiped mit den Seitenlängen  $dx, dy, dz$ , also dem Volumen  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ , bezeichnen, so haben wir in der  $x$ -Richtung als eintretende bzw. austretende Flüssigkeitsmenge

$$(q_e)_x = v_x \cdot dy \cdot dz \quad \text{bzw.} \quad (q_a)_x = \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz$$

und entsprechend für die beiden anderen Richtungen. Addieren wir die Differenzen  $q_a - q_e$  für die drei Richtungen, so ergibt sich, daß

$$d\tau \cdot \text{div} \cdot \mathbf{v}$$

der Überschuß der aus dem Volumen  $d\tau$  austretenden Flüssigkeitsmenge über die eintretende Menge darstellt. Die Divergenz wird also nur dann einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn die Hüllfläche sogenannte Quellen oder Senken einschließt, in denen Flüssigkeit entsteht oder verschwindet und der Wert der Divergenz wird gleichzeitig ein Maß für die Ergiebigkeit der Quellen. Die Verallgemeinerung dieser Betrachtung auf eine endliche geschlossene Fläche  $F$  gibt der sogenannte Gaußsche Integralsatz, der von der Potentialtheorie her bekannt ist<sup>1)</sup> und hier nur hydrodynamisch veranschaulicht werden soll. Bezeichnen wir den Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen des Flächenelementes  $df$  mit  $\mathbf{n}$ , so ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df$  und der Überschuß der durch die Fläche austretenden über die eintretende Menge wird durch das Integral

$$(9) \quad \oint_F v_n df = \oint_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df$$

dargestellt. Da diese Menge dem Raumintegral der Divergenz für die eingeschlossene Flüssigkeit gleich sein muß, so hat man die Gleichung

$$\oint_F v_n df = \int_T \text{div} \cdot \mathbf{v} d\tau.$$

Wenn keine Quellen oder Senken in dem Raumgebiet  $T$  vorhanden sind, so gewinnen wir in

$$(10) \quad \oint_F v_n df = 0$$

die allgemeine Kontinuitätsgleichung für die inkompressible Flüssigkeit.

### § 3. Beziehung zwischen Deformation und Spannung.

Durch die Deformation der Flüssigkeit werden innere Kräfte hervorgerufen, die auf die Flächeneinheit bezogen als Spannungen

<sup>1)</sup> Vgl. etwa M. Lagally, a. a. O. S. 131.

bezeichnet werden. Für jede innerhalb der Flüssigkeit gelegene Fläche treten diese Kräfte bekanntlich paarweise auf als entgegengesetzte

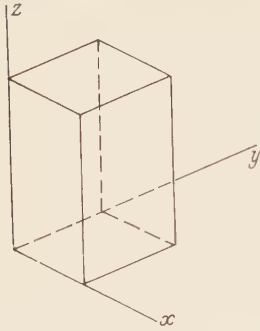


Abb. 3. Elementares Parallelepipid.

Wirkungen der beiden Teile I und II der Flüssigkeit, die sich in der Fläche berühren. Wenn wir uns einen Teil I herausgetrennt denken, so ist jedem Element der Grenzfläche eindeutig derjenige Spannungsvektor  $p$  zugeordnet, welcher der an dieser Stelle herrschenden Wirkung des benachbarten Gebietes II auf I entspricht. Dieser allgemein zur Fläche schief gestellte Vektor läßt sich in eine normale Zug- oder Druckkomponente und in eine in der Fläche wirkende Tangential- oder Schubspannungskomponente zerlegen. Um die Spannungs-

komponenten dem Bezugssystem anzupassen, betrachten wir ein elementares Parallelepipid, dessen Kanten den Bezugsachsen parallel sind

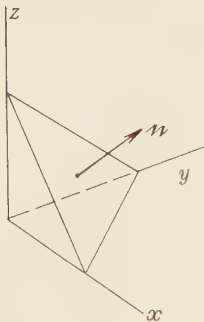


Abb. 4. Elementartetraeder.

(Abb. 3). Dann mögen in den Begrenzungs-ebenen die Normalspannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  wirken, die zunächst aus formalen Gründen als positiv oder als Zugspannungen eingeführt werden sollen. Die in den Ebenen wirkenden Schubspannungen mögen durch  $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  usw. bezeichnet werden, und zwar soll z. B.  $\tau_{xy}$  die in der Ebene normal zur  $y$ -Achse in der  $x$ -Richtung auftretende Spannung bedeuten. Die gesamte Zuordnung entspricht wieder dem Charakter eines Tensors, und es wird sich zeigen, daß diesem Spannungstensor ganz ähnliche Eigenschaften zukommen wie dem Deformationstensor, mit dem er in inniger Beziehung

steht. So ergeben sich z. B. aus der Tatsache, daß die Kräfte am Parallelepipid keine Drehungen hervorrufen dürfen, die Beziehungen der Symmetrie

$$(1) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Wenn wir dagegen ein elementares Tetraeder betrachten, das von drei zu den Koordinatenflächen parallelen Flächen  $f_x, f_y, f_z$  und einer vierten, schief gelegenen Fläche  $f$  begrenzt wird (Abb. 4), so lauten die Gleichgewichtsbedingungen bei Vernachlässigung der Raumkräfte, die gegenüber den Flächenkräften von höherer Ordnung unendlich klein sind,

$$p_{nx} \cdot f = \sigma_x f_x + \tau_{xy} f_y + \tau_{xz} f_z.$$

Heißen  $l, m, n$  die Richtungskosinus für die Normale der Fläche  $f$ , so ergeben sich daraus die Cauchy'schen Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} p_{nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{ny} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{nz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases}$$

Wenn wir den Spannungstensor  $\mathbf{P}$  nennen, so lassen sich die drei Gleichungen (2) in der Form

$$(2a) \quad p_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

zusammenfassen, oder der zur Fläche  $f$  gehörige Spannungsvektor läßt sich als inneres Produkt des Spannungstensors  $\mathbf{P}$  und des Einheitsvektors  $\mathbf{n}$  ( $l, m, n$ ) in Richtung der Normalen darstellen.

Auch im Tensorfeld der Spannungen gibt es durch jeden Feldpunkt drei ausgezeichnete Richtungen, die Richtungen der Hauptspannungen, die senkrecht auf den zugehörigen Flächen stehen, und die zugleich die Hauptachsenrichtungen des entsprechenden Spannungsellipsoids sind. Die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und ihre Richtungskosinus erhält man, wenn man in den Gleichungen  $p_{nx} = \sigma \cdot l, p_{ny} = \sigma \cdot m, p_{nz} = \sigma \cdot n$  setzt. Durch Elimination der Richtungskosinusse ergibt sich eine Gleichung 3. Grades für  $p$ , und die Form dieser Gleichung zeigt auch, daß die den drei Wurzeln  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  entsprechenden Richtungen ( $l_1, m_1, n_1$  usw.) aufeinander senkrecht stehen<sup>1)</sup>. Man sieht ferner ohne weiteres ein, daß die Achsenrichtungen des Deformations- und des Spannungsellipsoids zusammenfallen müssen, da eine reine Dehnung immer nur reine Normalspannungen erzeugen kann. Um die Beziehungen zwischen den Tensoren festzustellen, gehen wir von den Hauptachsen  $x', y', z'$  aus und denken uns eine ebene Fläche senkrecht zur  $x$ -Achse, die mit den Hauptebenen ein elementares Tetraeder bildet. Dann ergibt sich wie oben, z. B. für die  $x$ - und  $y$ -Komponente

$$\begin{aligned} \sigma_x f &= \sigma_1 f l_1^2 + \sigma_2 f l_2^2 + \sigma_3 f l_3^2 \\ \tau_{yz} f &= \sigma_1 f m_1 n_1 + \sigma_2 f m_2 n_2 + \sigma_3 f m_3 n_3. \end{aligned}$$

Wenn man mit  $f$  dividiert und dasselbe Verfahren für die  $y$ - und  $z$ -Richtung durchführt, so entstehen die Transformationsgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2, & \tau_{yz} = \sigma_1 m_1 n_1 + \sigma_2 m_2 n_2 + \sigma_3 m_3 n_3, \\ \sigma_y = \sigma_1 m_1^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 m_3^2, & \tau_{xz} = \sigma_1 l_1 n_1 + \sigma_2 l_2 n_2 + \sigma_3 l_3 n_3, \\ \sigma_z = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, & \tau_{xy} = \sigma_1 l_1 m_1 + \sigma_2 l_2 m_2 + \sigma_3 l_3 m_3, \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Eine Beweisführung findet man z. B. in A. E. H. Love, Treatise on the theory of elasticity, 3. Aufl., Cambridge 1929.

die mit den früher für die  $\varepsilon$  und  $\gamma$  aufgestellten Gleichungen übereinstimmen. Damit bestätigen sich auch die unter (1) gegebenen Beziehungen, die die Symmetrie der beiden Grundtensoren aussagen, und wir erhalten außerdem

$$(4) \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{konst.}$$

Die Summe der Normalspannungen für drei zueinander senkrechte Ebenen in einem Punkt ist also konstant.

Zur Aufstellung der Relationen zwischen den Komponenten  $\sigma$  und  $\varepsilon$  beider Tensoren gehen wir von den Hauptebenen aus. Wir können dann lineare Gleichungen von der Form ansetzen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -p + \alpha_1 \varepsilon_1 + \beta_1 \varepsilon_2 + \gamma_1 \varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= -p + \alpha_2 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= -p + \alpha_3 \varepsilon_1 + \beta_3 \varepsilon_2 + \gamma_3 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Da das flüssige Medium als isotrop vorausgesetzt wird, also keine Richtung als bevorzugt gilt, so erhält man durch zyklische Permutation

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3, \quad \beta_1 = \gamma_2 = \alpha_3, \quad \gamma_1 = \alpha_2 = \beta_3.$$

Ebenso muß aber auch der Unterschied zwischen den beiden tangentialen Richtungen auf einer Hauptebene wegfallen, daher auch  $\beta_1 = \gamma_1$ ,  $\alpha_2 = \gamma_2$ ,  $\alpha_3 = \beta_3$  sein. Es kommt daher nach Einführung neuer Koeffizientenbezeichnungen

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_1 = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_1 \\ \sigma_2 = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_2 \\ \sigma_3 = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_3. \end{cases}$$

Wendet man hierauf die Transformationsgleichungen (3) und (5) an, so ergeben sich die allgemeinen Beziehungen

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma_x = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_x, & \tau_{yz} = 2\mu \gamma_{yz}, \\ \sigma_y = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_y, & \tau_{xz} = 2\mu \gamma_{xz}, \\ \sigma_z = -p + \lambda \cdot \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{xy} = 2\mu \gamma_{xy}, \end{cases}$$

die jetzt näher diskutiert werden sollen.

Wenn man die drei ersten der Gleichungen (6) addiert, so erhält man

$$(7) \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p + (3\lambda + 2\mu) \cdot \text{div } \mathbf{v}.$$

Definiert man nun  $p$  als den mittleren an der betrachteten Stelle herrschenden Druck, d. h. als negatives arithmetisches Mittel der Normalspannungen, so ist für den allgemeinen Fall  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  zu setzen. Für inkompressible Flüssigkeiten hat man

$$(6a) \quad \sigma_x = -p + 2\mu \varepsilon_x \text{ usw.}, \quad \tau_{yz} = 2\mu \gamma_{yz} \text{ usw.}$$



Das zweite System von Gleichungen drückt die einfache Proportionalität zwischen den Schubspannungen und den Deformationsgrößen zweiter Art aus. Wenn z. B. die Flüssigkeit in ebenen Schichten parallel zur  $xy$ -Ebene in Richtung der  $x$ -Achse strömt, so reduzieren sich die Gleichungen (6a) auf die einfache Beziehung

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Die Schubspannung hat also den Charakter einer inneren Reibung, die dem Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zu den Strömungsebenen proportional ist und auf die Strömung eine bremsende bzw. schleppende Wirkung ausübt. Der Faktor  $\mu$ , der der Flüssigkeit eigentümlich ist, heißt der Koeffizient der inneren Reibung. Wenn wir für Kraft, Länge und Zeit die Einheiten g (Grammgewicht), cm (Zentimeter) und s (Sekunde) benutzen, so ist die Dimension von  $\mu$  gegeben durch

$$[\mu] = [\text{g s cm}^{-2}].$$

Dieser Reibungskoeffizient ist eine für die folgenden Betrachtungen sehr wichtige Größe, die in allen, besonders den auf die Bestimmung der Flüssigkeitskräfte sich beziehenden Ansätzen einen entscheidenden Einfluß hat. Mit den Methoden zur experimentellen Bestimmung von  $\mu$  werden wir uns später ausführlich auseinander zu setzen haben.

Für die beiden technisch wichtigsten Flüssigkeiten Wasser und Luft hat der Reibungskoeffizient allerdings sehr kleine Werte (für Wasser etwa 0,018 und Luft 0,00017  $\text{g} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2}$  bei einer Temperatur von  $0^\circ$ ), und man kann daher mit einer gewissen Berechtigung innerhalb einer gewöhnlichen Strömung die Reibungsglieder vernachlässigen. Es zeigt sich aber, daß man dabei für die meisten wirklichen Fälle doch einen Fehler begeht, der das Maß des Zulässigen übersteigt und namentlich größer ist, als die Größenordnung der Gleichungsglieder ahnen läßt. Denn in der unmittelbaren Nachbarschaft der begrenzenden Wände, an denen erfahrungsgemäß die Flüssigkeit haftet, hat der Geschwindigkeitsgradient  $\frac{\partial v}{\partial n}$  in Richtung der Normalen einen großen Wert, und daher auch der Ausdruck  $\mu \frac{\partial v}{\partial n}$  eine merkliche Größe, die nicht mehr vernachlässigt werden darf. Eine eingehende Untersuchung ergibt aber, daß der Einfluß der Wandreibung genügt, um das Strombild auch im Innern der Flüssigkeit, jedenfalls in bestimmten Gebieten, und daher zugleich die Druckverhältnisse daselbst sehr weitgehend zu verändern. Wir werden später auf diese Fragestellung zurückkommen.

### § 4. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.

1. Um die Differentialgleichungen der Bewegung einer Flüssigkeit möglichst allgemein und unabhängig vom Koordinatensystem abzuleiten, denken wir uns ein beliebig geformtes Volumen  $T$  aus dem Flüssigkeitsgebiet herausgetrennt. Wenn wir dann eine eingeprägte, auf die Einheit der Masse bezogene Kraft  $\mathfrak{f}$  annehmen und den Ausdruck  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  für den Spannungsvektor in einem Punkt der Berandung  $F$  benutzen, so ergibt sich aus der Newtonschen Grundgleichung der Dynamik

$$(1) \quad \int_T \rho \mathfrak{f} d\tau + \oint_F \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} df = \int_T \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau.$$

Das Oberflächenintegral läßt sich nun nach dem Gaußschen Lehrsatz in ein Raumintegral verwandeln; diesen Satz, der bereits in § 2 für den Geschwindigkeitsvektor benutzt wurde, kann man nämlich ohne weiteres auf Tensoren übertragen, die sich, wie bekannt, in drei Komponentenvektoren zerlegen lassen. Wir können daher schreiben

$$(1a) \quad \int_T \rho \mathfrak{f} d\tau + \int_T \mathcal{P} \cdot \mathbf{P} d\tau = \int_T \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau.$$

Wenn man die geschlossene Begrenzung auf einen im Innern des Gebiets  $T$  gelegenen Aufpunkt zusammenzieht, so erhält man durch einen unmittelbar verständlichen Grenzübergang aus (1a) die Differentialbeziehung

$$(2) \quad \mathfrak{f} + \frac{1}{\rho} \mathcal{P} \cdot \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

die sich in die drei Koordinatengleichungen zerlegen läßt

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_x}{dt}, \\ k_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = \frac{dv_y}{dt}, \\ k_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = \frac{dv_z}{dt}. \end{array} \right.$$

Die weitere Umformung geschieht mit Hilfe der Gleichungen (6) des § 2. Man erhält z. B. für die  $x$ -Richtung

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} \cdot \mathbf{P})_x = & - \frac{\partial p}{\partial x} - 3 \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) + 2 \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Wenn man die Laplacesche Operation

$$\mathcal{J} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

und die übrigen bereits bekannten Vektoroperationen einführt, so wird

$$(\mathcal{F} \cdot \mathbf{P})_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \mathcal{F} v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v},$$

und man erhält daher aus (1a) in vektorieller Schreibweise und mit Einführung der Abkürzung  $\frac{\mu}{\varrho} = \nu$  die sogenannten Stokes-Navierschen Differentialgleichungen der Hydrodynamik

$$(3) \quad \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho} \mathcal{F} p + \nu \mathcal{A} \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \mathcal{F} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

die für inkompressible Flüssigkeiten die einfache Form annehmen

$$(3b) \quad \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho} \mathcal{F} p + \nu \mathcal{A} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Eine weitere Umgestaltung der Bewegungsgleichung (3) geschieht durch Zerlegung der Beschleunigung in einen „stationären“ und „in-stationären“ Bestandteil, sowie durch Einführung des Wirbelvektors. Der erste Bestandteil der Beschleunigung ist die partielle Ableitung nach der Zeit ohne Ortsänderung, während der zweite Bestandteil die Geschwindigkeitsänderung bei einem Ortswechsel darstellt. Mit der bereits früher benutzten Bezeichnung hat man also

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v} = \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho} \mathcal{F} p + \nu \mathcal{A} \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \mathcal{F} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Für die Ausdrücke  $\mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v}$  und  $\mathcal{A} \mathbf{v}$  ergeben sich die sofort durch Ausrechnung der Komponentenausdrücke zu bestätigenden Formeln

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \mathcal{F} v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} \\ \mathcal{A} \mathbf{v} &= \mathcal{F} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}, \end{aligned}$$

wo z. B.  $\mathcal{F} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}$  den Gradienten der Geschwindigkeitsdivergenz bedeutet. Insbesondere zerlegt sich also die örtliche Geschwindigkeitsänderung in zwei Bestandteile, von denen der zweite  $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{w} \times \mathbf{v}$  durch die Rotation bestimmt ist und der Coriolis-Beschleunigung in der Dynamik fester Körper entspricht. Damit erhält dann unsere Bewegungsgleichung die Form

$$(4a) \quad \mathfrak{f} - \mathcal{F} \left( \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{4}{3} \nu \mathcal{F} \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} - \nu \text{rot rot } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}.$$

Bemerkenswert sind die folgenden Sonderfälle:

a) Wenn die inkompressible Flüssigkeit ( $\mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ ) wirbelfrei ist ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ), so geht die Gleichung (4) bzw. (4a) in die Eulersche Gleichung für Potentialströmungen über. Daraus folgt, daß die Bewegung der reibungsbehafteten inkompressiblen Flüssigkeit im allgemeinen nicht wirbelfrei sein wird.

b) Wenn bei der wirbelfreien Bewegung die Kräfte ein Potential haben

$$\mathfrak{f} = -\nabla \Omega,$$

so wird sich auch, wie (4a) zeigt, die Geschwindigkeit von einem Potential ableiten lassen, entsprechend der Formel

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \left( v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right).$$

Umgekehrt muß die Strömung überall da wirbelfrei sein, wo ein Geschwindigkeitspotential existiert. Die Differentialgleichung läßt sich in diesem Fall unmittelbar integrieren, und wir erhalten

$$(6) \quad \Omega + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t),$$

wobei  $C$  im allgemeinen eine Funktion der Zeit ist.

c) Bei stationärer wirbelfreier Strömung ist

$$(7) \quad \Omega + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = C,$$

d. h. die Gesamtenergie der Flüssigkeit eine im ganzen Gebiet gleichbleibende Konstante (Satz von Bernoulli).

d) Wenn man Reibungslosigkeit, aber nicht Wirbelfreiheit voraussetzt, so erhält man durch Integration von (3b) (mit  $\nu = 0$ ) längs einer Stromlinie eine Gleichung, die formal mit der Bernoullischen Gleichung (7) übereinstimmt. Die Konstante  $C$  ist aber in diesem Fall keine absolute Feldkonstante, sondern nur längs einer Stromlinie  $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$  konstant, während sie sich beim Übergang zu einer anderen Stromlinie ändert.

2. Eine weitere bemerkenswerte und für die Anwendung wichtige Form der Bewegungsgleichung erhält man durch Elimination des Druckes  $p$ . Zu diesem Zwecke bilden wir den Rotor jedes Gliedes der Gleichung (4a). Das würde in der Koordinatenschreibweise darauf hinauskommen, daß man die erste, auf die  $x$ -Richtung sich beziehende Gleichung nach  $y$ , die zweite, auf die  $y$ -Richtung sich beziehende nach  $x$  differenziert und die beiden so erhaltenen Gleichungen voneinander subtrahiert, usw. Da der Rotor eines Gradienten verschwindet, so bleibt eine Gleichung übrig, die neben dem Rotor der Kraft nur Ausdrücke mit den Geschwindigkeits- und Wirbelvektoren enthält. In der Vektordarstellung hat man mit  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  und  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\nabla \mathbf{v}) = \nabla \boldsymbol{\omega},$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}.$$



Die beiden ersten Gleichungen ergeben sich unmittelbar aus dem Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationen. Die letzte Gleichung kann ohne weiteres durch Ausrechnung der Komponentenglieder der beiden Seiten bestätigt werden. Man hat dann z. B. für die  $z$ -Richtung die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(v_z w_x - v_x w_z) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y w_z - v_z w_y) &= w_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &\quad - v_x \frac{\partial w_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial w_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln gehen die Bewegungsgleichungen über in

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nu \Delta \mathbf{w} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{f}.$$

Haben die Kräfte ein Potential, so verschwindet  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ , und wir erhalten

$$(8a) \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nu \Delta \mathbf{w},$$

eine Gleichung, aus der sich die Helmholtzschen und verwandten Wirbelsätze ableiten lassen<sup>1)</sup>.

Wenn eine Flüssigkeitsbewegung vorliegt, die in allen Ebenen etwa parallel zur  $xy$ -Ebene den gleichen Verlauf zeigt, so wird  $w_x = w_y = 0$ ,  $v_z = 0$ ; ferner verschwinden alle Ableitungen nach  $z$ . Dann verschwindet aber auch der Ausdruck  $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}$ , und es bleibt schließlich

$$(8b) \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}.$$

Ist  $\mathbf{w}$  von Null verschieden, dann existiert kein Geschwindigkeitspotential; wohl aber dürfen wir die Existenz einer Stromfunktion  $\Psi$  annehmen, die das Stromfeld derart charakterisiert, daß die Geschwindigkeitskomponenten in Übereinstimmung mit der Kontinuitätsgleichung ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) sich als partielle Ableitungen in der Form

$$(9) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

darstellen lassen. Die Wirbelstärke wird dann

$$2\mathbf{w} = 2\mathbf{w}_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta \Psi,$$

und die Funktion  $\Psi$  genügt der Differentialgleichung

$$(10) \quad \nu \Delta \Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t},$$

<sup>1)</sup> Vgl. Wilh. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 12, ferner M. Lagally, a. a. O. S. 150.

die im stationären Fall übergeht in

$$(10a) \quad \nu \Delta \Delta \Psi = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Delta \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \Delta \eta}{\partial x}.$$

Diese Gleichung ist nicht mehr linear wie im Fall der Potentialströmung. Wenn also  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  zwei Lösungen sind, so genügt im allgemeinen die Summe  $\Psi_1 + \Psi_2$  der Gleichung nicht mehr. Das Superpositionsprinzip, das die Theorie der Potentialströmungen beherrscht und wesentlich zur Erleichterung und zur Vereinfachung der Lösungsmethoden beiträgt, verliert im Fall der zähen Strömung seine Gültigkeit. Nur in besonderen Fällen, auf die wir noch zu sprechen kommen, können partikuläre Lösungen linear zusammengesetzt werden.

### § 5. Zähigkeit und Ähnlichkeitsgesetz.

In den zuvor abgeleiteten Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit tritt die innere Reibung nur in der Verbindung  $\frac{\nu}{\rho} - \nu$  auf. Dieser Quotient von Reibungskoeffizienten und Dichte wird als Zähigkeitszahl oder kinematische Zähigkeit bezeichnet. Er ist diejenige Größe, die die einzelne Flüssigkeit in erster Linie hydrodynamisch charakterisiert. Ihre Dimension ist

$$[\nu] = \left[ \frac{\text{gs cm}^{-2}}{\text{gs}^2 \text{cm}^{-4}} \right] = [\text{cm}^2 \text{s}^{-1}].$$

Da für die beiden technisch wichtigsten Flüssigkeiten, Wasser bzw. Luft, die Dichte  $\rho = 1$  bzw.  $\rho = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ gs}^2 \text{cm}^{-4}$  beträgt, so haben wir bei der Temperatur  $\vartheta = 0^\circ$

$$\text{für Wasser } \nu \approx 0,018 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$\text{für Luft } \nu \approx 0,145 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Die Luft besitzt also, obwohl ihre Reibung bedeutend kleiner ist als die des Wassers, bei  $0^\circ$  eine etwa 8mal, bei  $20^\circ$  sogar eine etwa 14mal so große Zähigkeit. Auf die experimentelle Bestimmung der Zähigkeitszahl, insbesondere die ziemlich empfindliche Abhängigkeit von der Temperatur, werden wir später ausführlich zurückkommen.

Hier interessiert vor allem die meßtechnisch wichtige Frage, nach welchen Gesichtspunkten man zwei verschiedene, aber geometrisch ähnliche Bewegungszustände — etwa einen wirklichen Vorgang und eine modellartige, kleinere, eventuell mit einer anderen Flüssigkeit ausgeführte Nachbildung — miteinander vergleichen kann. Um das zu entscheiden, wollen wir in der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$(I) \quad \mathfrak{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v}$$

zur Einführung dimensionsloser Größen die Substitution machen

$$(2) \quad \mathbf{r} = l \bar{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = u \bar{\mathbf{v}}, \quad t = \frac{l}{u} \bar{t},$$

wo  $l$  und  $u$  gewisse Normalgrößen der Längenmessung und der Geschwindigkeit bedeuten. Ferner wollen wir zunächst von einer besonderen eingepägten Kraft absehen. Dann ergibt sich aus (1) und (2)

$$(3) \quad -\frac{1}{\rho l} \mathcal{F} p = \frac{u^2}{l} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{I} \bar{\mathbf{v}} \right] - \frac{u \cdot \nu}{l^2} \cdot \mathcal{I} \bar{\mathbf{v}},$$

wobei die Differentialoperationen sich jetzt auf die dimensionslosen Größen beziehen. Führt man weiter für den Druck die Größe  $\bar{p}$  ein durch

$$p = \frac{\mu \cdot u}{l} \bar{p},$$

so erhält man nach Division mit  $\frac{u^2}{l}$  die Gleichung

$$(3b) \quad -\frac{\nu}{u l} \mathcal{F} \bar{p} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{I} \bar{\mathbf{v}} - \left( \frac{\nu}{u l} \right) \mathcal{A} \bar{\mathbf{v}},$$

die wir schließlich als Dimensionsgleichung in der Form schreiben können

$$(4) \quad \left[ \frac{P}{\rho u^2 l^2} \right] = [\mathbf{I}] + \left[ \frac{\nu}{u l} \right] = [\mathbf{I}] + [\mathfrak{R}],$$

wo  $\mathfrak{R}$  als Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften gedeutet werden kann.

Bei idealen Flüssigkeiten ( $\nu=0$ ) wird die Kraftwirkung, etwa die Resultierende der auf die Begrenzung ausgeübten Druckkräfte, in der Form darstellbar sein

$$P = c \rho u^2 l^2,$$

wo  $c$  einen dimensionslosen Beiwert bezeichnet, und es ist zu erwarten, daß in geometrisch ähnlichen Fällen, die in allen Abmessungsverhältnissen und Winkeln der Begrenzungskörper übereinstimmen, der Beiwert unverändert bleibt. Diese einfache Gesetzmäßigkeit trifft bei Berücksichtigung der Zähigkeit nicht mehr zu. Vielmehr ist es, wie die Gleichung (4) zum Ausdruck bringt, für die mechanische Gleichwertigkeit (oder Ähnlichkeit) erforderlich, daß neben der geometrischen Ähnlichkeit auch der Wert des Ausdrucks  $\frac{ul}{\nu} = \mathfrak{R}$ , der sogenannten Reynoldsschen Zahl, erhalten bleibt, d. h. die Gleichung

$$\frac{u_1 l_1}{\nu_1} = \frac{u_2 l_2}{\nu_2}$$

erfüllt ist, wenn  $u_1, l_1, \nu_1$  und  $u_2, l_2, \nu_2$  entsprechende Werte von Geschwindigkeit, Längenabmessung und Zähigkeit für beide Vergleichsfälle bezeichnen. Nur in solchen Fällen, die in der geometrischen und mechanischen Ähnlichkeit übereinstimmen, wird der Beiwert  $c$  der Kraft derselbe bleiben. Allgemein kann man dagegen sagen, daß dieser Beiwert bei nur geometrischer Gleichwertigkeit eine Funktion der Reynoldsschen Zahl  $\Re$  ist, so daß  $P$  die Form annimmt

$$P = c(\Re) \rho u^2 l^2.$$

Statt der Reynoldsschen, die im technisch wichtigen Bereich sehr groß ausfällt, verwendet man z. B. im Wasserbau nach Krey eine kleinere Kennzahl, die aus  $\Re$  dadurch erhalten wird, daß man an Stelle von  $\frac{1}{\nu}$  die Größe

$$Qk = \frac{1,2}{10^6 \cdot \nu}$$

einführt, die für mittlere, in der Natur vorkommende Temperaturen etwa den Wert  $1 \frac{s}{m^2}$  annimmt<sup>1)</sup>.

Da sich ferner die Zähigkeit bei aerodynamischen Laboratoriumsversuchen nur wenig ändert im Vergleich zu den Längen und Geschwindigkeiten, verwendet man hier auch einen mit  $E$  bezeichneten Kennwert, der als Produkt aus Körperlänge (in mm) und Geschwindigkeit (in m/s) definiert wird.

Die Folgerungen aus dem Reynoldsschen Gesetz sind im allgemeinen durch die Erfahrung gut bestätigt worden. Wir werden später sehen, daß z. B. der Charakter gewisser Strömungsvorgänge bei einer bestimmten Geschwindigkeit sich fast unvermittelt ändert, und daß dann auch die auftretenden Kräfte einem anderen Gesetz folgen. Diese kritische Geschwindigkeit hat keine absolute Bedeutung. Denn wenn wir die Abmessungen ändern, also etwa die halben Dimensionen nehmen, so wird die kritische Geschwindigkeit bei gleichbleibender Zähigkeit doppelt so groß ausfallen, d. h. wir müssen überhaupt die Geschwindigkeiten verdoppeln gegenüber dem ersten Fall, um die entsprechenden, mechanisch gleichwertigen Verhältnisse zu erreichen.

Eine Voraussetzung für diese Gesetze ist die Inkompressibilität der Flüssigkeit. So ist die Übertragung irgendwelcher Versuchsergebnisse von Wasser auf Luft nur dann möglich, wenn man von der Veränderung der Dichte absehen darf. Das ist z. B. der Fall in der Flugtechnik, wo es sich meist um Geschwindigkeiten handelt, die unter der Schallgeschwindigkeit

<sup>1)</sup> Vgl. etwa Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Heft 4, F. Eisner, Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern, Berlin 1929, S. 1.



keit liegen. Bei Steigerung der Fluggeschwindigkeit kommt man dem kritischen Gebiet allerdings immer näher. Aus verschiedenen Versuchen scheint ferner hervorzugehen, daß eine Abweichung vom Reynoldsschen Gesetz bereits dann in die Erscheinung tritt, wenn die Geschwindigkeit gegen die Luft die Hälfte der Schallgeschwindigkeit übertrifft. Da nun die Forderung der mechanischen Ähnlichkeit eine Steigerung der Geschwindigkeit beim Modellversuch einschließt, so übersieht man, daß der vollständigen versuchstechnischen Wiedergabe des wirklichen Vorganges manche Schranken gesetzt sind.

Im Fall einer Dichteänderung ist das Ähnlichkeitsgesetz dahin abzuändern, daß noch der sogenannte Kompressionsmodul  $k = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$  in die Formeln einzubeziehen ist, also die Vergleichbarkeit ähnlicher Vorgänge noch an die Übereinstimmung einer anderen dimensionslosen Zahl gebunden erscheint. Eine weitere Einschränkung gibt die Beschaffenheit der festen Wände, die sogenannte Rauigkeit. Um eine entsprechende Ergänzung des Ähnlichkeitsgesetzes vorzunehmen, würde eine besondere Definition der Rauigkeit erforderlich sein.

Die vorstehenden Betrachtungen sind unter der Voraussetzung angestellt, daß eine äußere Kraft, z. B. die Schwerkraft, nicht wesentlich ins Gewicht fällt. Sie sind insbesondere anwendbar auf (Schwimm-) Bewegungen innerhalb der Flüssigkeit. Bei Oberflächenerscheinungen dagegen, die in erster Linie von der Schwerkraft beherrscht werden, ist das Reynoldssche Gesetz nicht ohne weiteres anwendbar. Da nämlich hier gegenüber dem Einfluß der Schwerkraft die Wirkung der Zähigkeitskräfte völlig zurücktritt, so ist für den Ablauf der Oberflächenerscheinungen (z. B. der Bewegung des Schiffes) nicht allein die Reynoldssche Zahl, sondern daneben auch das Verhältnis der Schwerkraft zur Trägheitskraft, die sogenannte Froudesche Zahl

$$\mathfrak{F} = \left| \frac{gl}{v^2} \right|,$$

maßgebend<sup>1)</sup>. Da es bei ungeänderter Flüssigkeit und Temperatur unmöglich ist, eine Anordnung so geometrisch ähnlich zu verändern, daß die entsprechenden Kennzahlen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{F}$  gleichzeitig erhalten bleiben, so gibt es bei gleichzeitigem und gleichwertigem Auftreten von Zähigkeits- und Schwerkraftwirkungen überhaupt keine mechanische Ähnlichkeit zwischen geometrisch ähnlichen Vorgängen. Im folgenden werden wir im wesentlichen nur mit solchen Erscheinungen zu tun haben, die unter dem Gesichtspunkt des Reynoldsschen Gesetzes betrachtet werden können.

<sup>1)</sup> Vgl. F. Eisner im Handbuch der Experimentalphysik IV, 2, Leipzig 1932.

## § 6. Reibungsarbeit und Dissipationsfunktion.

Betrachten wir wieder ein beliebiges endliches Flüssigkeitsvolumen, so wird die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der Oberflächenkräfte  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} d\mathbf{f}$  bei einer Verschiebung des Teilchens durch das Flächenintegral dargestellt

$$A = \oint_F \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{f}.$$

Führt man das Integral mittels des Gaußschen Integralsatzes in ein RauminTEGRAL über, so erhält man

$$A = \int_T \mathbf{F} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{v}) d\mathbf{r} = \int_T \operatorname{div}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{r}.$$

Bringen wir nun von dieser Arbeit den Betrag der mechanischen Arbeit  $A_m$  in Abzug, die sich auf das Volumen als Ganzes bezieht und die kinetische Energie der enthaltenen Flüssigkeitsmasse vergrößert, so erhält man in

$$(1) \quad A_f = \int_T \mathbf{F} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{v}) d\mathbf{r} - \int_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} d\mathbf{r}$$

den Wert der auf  $T$  bezüglichen Formänderungsarbeit. Zieht man die Begrenzung auf den Aufpunkt zusammen, so ergibt sich die auf die Volumen- und Zeiteinheit bezogene Formänderungsarbeit an einer Stelle in der Form

$$(1a) \quad E_f = E - E_m = \operatorname{div}(\mathbf{P}\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Wie eine einfache Einsetzung der Koordinatenausdrücke ergibt, läßt sich  $E_f$  in der Form darstellen

$$\begin{aligned} E_f = E - E_m = & \sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ & + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ & + \tau_{xz} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(1b) \quad = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + 2\tau_{yz} \gamma_{yz} + 2\tau_{xz} \gamma_{xz} + 2\tau_{xy} \gamma_{xy} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D},$$

d. h. als doppeltskalarcs Produkt des Spannungs- und Deformationstensors<sup>1)</sup>. Wenn man den Drucktensor durch den Deformationstensor ausdrückt, also die Gleichungen (6) § 3 benutzt, so wird

$$E_f = -p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu [\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{xz}^2 + 2\gamma_{xy}^2].$$

Sieht man nun von dem ersten Ausdruck, der sich auf die Kompression bzw. Expansion bezieht, ab, so berechnet sich die eigentliche Reibungs-

<sup>1)</sup> Vgl. M. Lagally, a. a. O. S. 220, 263.

arbeit, die gleichzeitig die erzeugte Wärmemenge darstellt und nach Lord Rayleigh als Dissipationsfunktion bezeichnet wird, zu

$$(2) \quad E_r = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{xz}^2 + 2\gamma_{xy}^2].$$

Die Spannungen ergeben sich daraus durch einfache Ableitungen. Wie man leicht nachweist, kann man diese Funktion in folgender Weise als Summe von sechs Quadraten darstellen

$$(2a) \quad E_r = 2\mu \left\{ \left[ \varepsilon_x + \left( \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{3} \right]^2 + \dots + 2\gamma_{yz}^2 + \dots \right\},$$

und man sieht dann, daß  $3\lambda + 2\mu$  immer positiv oder Null sein muß, damit  $E_r$  einen reellen positiven Wert erhält.

Eine weitere Umgestaltung der Dissipationsfunktion ist besonders geeignet, um den Einfluß der Grenzbedingungen und der in der Flüssigkeit vorhandenen Wirbel zu verfolgen. Wenn man nämlich die Identität  $2\mu \operatorname{div} \mathbf{v} - 2\mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  hinzufügt und den Wirbelvektor einführt, so ergibt sich

$$E_r = (\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 4\mu w^2 - 4\mu [\varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y - (\gamma_{yz}^2 - w_x^2) - (\gamma_{xz}^2 - w_y^2) - (\gamma_{xy}^2 - w_z^2)] = (\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 4\mu w^2 - 4\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \dots \right].$$

Der Ausdruck in der Klammer kann durch Vermittlung der früher gegebenen Formel

$$\frac{1}{2} \mathcal{F} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v}$$

entwickelt werden. Bilden wir nämlich die Divergenz jeder Seite dieser Gleichung, so kommt wegen

$$\operatorname{div} (\mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 - 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \dots \right)$$

die Beziehung

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \dots = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 - (\mathcal{A} \frac{1}{4} v^2 - \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Daher erhalten wir für  $E_r$  die neue Form

$$(2b) \quad E_r = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 4\mu w^2 - 2\mu \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \operatorname{div} \mathbf{v} + 4\mu (\mathcal{A} \frac{1}{4} v^2 - \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}),$$

die für inkompressible Flüssigkeit übergeht in

$$(3) \quad E_r = 4\mu [w^2 + \mathcal{A} \frac{1}{4} v^2 - \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}].$$

Wenn wir mit dem Raumelement  $d\tau$  multiplizieren und über das gesamte von der Flüssigkeit eingenommene Gebiet integrieren, so ergibt sich nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$(4) \quad F = \int E_r d\tau = 4\mu \int w^2 d\tau - \mu \int \frac{\partial}{\partial n} v^2 df + 4\mu \int \mathbf{v} \times \mathbf{w} n df,$$

wobei unter  $n$  die von einem Punkt der Grenzflächen nach innen gezogene Normale zu verstehen ist.

Aus der Gleichung (2) ergibt sich, daß  $E_r$  nur verschwinden kann, wenn der Dilatationstensor verschwindet. In einer strömenden Flüssigkeit wird also nur dann keine Dissipation der Energie auftreten, wenn sie sich wie ein starrer Körper bewegt, d. h. wenn die Bewegung sich lediglich aus einer Translation und einer Rotation der Flüssigkeit als Ganzes zusammensetzt. Jede Zusammenziehung oder Ausdehnung und jede Winkelverzerrung ist dagegen mit einem mechanischen Energieverlust verbunden. Aus der Gleichung (4) läßt sich ferner der Einfluß der Grenzen und der inneren Rotation auf die Energieverzehrer beurteilen. Im allgemeinen kann man annehmen — auf die experimentelle Bestätigung werden wir später noch eingehen —, daß die Flüssigkeit an festen Wänden haftet, daß also nicht nur die normale, sondern auch die tangential Komponente der Strömungsgeschwindigkeit Null wird. Unter dieser Annahme verschwinden auch die beiden letzten Flächenintegrale der Gleichung. Ferner verschwindet das letzte Integral auch dann, wenn die Wirbelung Null ist oder wenn die Flächennormale in der den Geschwindigkeits- und Rotationsvektor enthaltenden Ebene gelegen ist. In einer wirbellosen inkompressiblen Flüssigkeit, für die  $F$  die Form annimmt

$$F = -\mu \int \frac{\partial}{\partial n} v^2 df,$$

ist keine Energiedissipation möglich, wenn gleichzeitig die Strömung längs der festen Berandung haftet. Da aber in diesem Falle der Tensor  $D$  verschwindet, so ergibt sich, daß eine wirbellose, an feste Grenzen gebundene Bewegung einer zähen Flüssigkeit unmöglich ist, daß vielmehr jede zähe Strömung dieser Art eine bestimmte Wirbelverteilung aufweisen muß.

Wir denken uns nun zwei Flüssigkeitsbewegungen überlagert. Wenn  $v$  die Geschwindigkeit bedeutet, die den Grenzbedingungen genügt, und  $v'$  die Geschwindigkeit einer beliebigen zusätzlichen Bewegung, die an den festen Grenzflächen verschwindet, dann haben wir für die elementare Dissipation der zusammengesetzten Strömung den Ausdruck

$$\begin{aligned} (E_s)_r &= (\sigma_x + \sigma'_x)(\epsilon_x + \epsilon'_x) + \dots + 2(\tau_{yz} + \tau'_{yz})(\gamma'_{yz} + \gamma'_{yz}) + \dots \\ &= E_r + E'_r + 2[\sigma_x \epsilon'_x + \dots + 2\tau_{yz} \gamma'_{yz} + \dots] \end{aligned}$$

oder in vektorieller Form mit Einführung des Spannungstensors

$$(E_s)_r = E + E'_r + 2[\operatorname{div} \mathbf{P} \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \cdot \operatorname{div} \mathbf{P}] = E + E'_r + 2[\mathcal{F} \cdot \mathbf{P} \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \mathcal{F} \cdot \mathbf{P}].$$

Wegen der früher aufgestellten Beziehung

$$\mathcal{F} \cdot \mathbf{P} = -F p + \mu \mathcal{A} v$$



ergibt sich

$$(E_s)_r = E_r + E'_r + 2[\mathcal{F} \cdot \mathbf{P} \mathbf{v}' + \mathbf{v}'(\mathcal{F} p - \mu \mathcal{A} \mathbf{v})].$$

Wenn man über den gesamten Flüssigkeitsbereich integriert und den Gaußschen Integralsatz anwendet, so erhält man

$$\int (E_s)_r d\tau = \int E_r d\tau + \int E'_r d\tau - 2 \int \mathbf{P} \mathbf{v}' n df + 2 \int \mathbf{v}'(\mathcal{F} p - \mu \mathcal{A} \mathbf{v}) d\tau.$$

Das Flächenintegral verschwindet nach der Voraussetzung. Nehmen wir ferner eine stationäre langsame Strömung an, bei der die Beschleunigung  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  vernachlässigt werden kann, und setzen überdies ein äußeres Kräftepotential  $\Omega$  voraus, so haben wir die Bewegungsgleichung

$$\mathcal{F} p - \mu \mathcal{A} \mathbf{v} = -\rho \nabla \Omega.$$

Nun ist

$$\int \mathbf{v}' \nabla \Omega d\tau = \int \nabla \cdot (\mathbf{v}' \Omega) d\tau - \int \Omega \nabla \cdot \mathbf{v}' d\tau = - \int \mathbf{v}' \Omega n df = 0.$$

Das letzte Raumintegral verschwindet also, und es bleibt

$$\int (E_s)_r d\tau = \int E_r d\tau + \int E'_r d\tau.$$

Da beide Integrale wesentlich positiv sind, so sieht man, daß die Dissipation der Energie für die zusammengesetzte Bewegung, die dieselben Geschwindigkeitswerte an der Begrenzung wie die wirkliche Bewegung hat, einen größeren Wert annimmt. Die langsame, unter dem Einfluß von Potentialkräften stehende Strömung ist also dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr die Dissipation kleiner ausfällt als bei irgendeiner anderen Bewegung mit derselben Geschwindigkeitsverteilung an den Grenzen.

Im allgemeinen Fall, also bei nicht langsamer Bewegung, wird die Dissipation ein Minimum, wenn das Integral

$$\int \mathbf{v}' \mathcal{A} \mathbf{v} d\tau$$

verschwindet. Das tritt aber ein, wenn

$$\mathcal{A} \mathbf{v} = \nabla \Phi,$$

also  $\mathcal{A} \mathbf{v}$  als Gradient einer eindeutigen Funktion  $\Phi$  von  $x, y, z$  darstellbar ist. Dann genügt der Wirbelvektor der Gleichung

$$\mathcal{A} \mathbf{w} = 0.$$

Bewegungen, welche dieser Bedingung genügen, sind z. B. die stationäre Strömung zwischen parallelen Ebenen und die Strömung zwischen koxialen Zylindern. Wir werden im speziellen Teil dieses Buches auf diese Fälle ausführlich zurückkommen.

### § 7. Impulssätze für die allgemeine Flüssigkeit.

1. Für die Ermittlung der Kräfte, die eine irgendwie begrenzte strömende Flüssigkeit auf die Gefäßwände ausübt, dienen die sogenannten Impulssätze, die im allgemeinen ohne weiteres von der Dynamik starrer Körper übernommen werden, aber streng genommen wegen der Wandlung einiger Grundbegriffe, wie z. B. der Masse, eine besondere Ableitung erfordern<sup>1)</sup>.

Wir gehen zu dem Zweck aus von der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$(1) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p$$

und integrieren über das gesamte von der Flüssigkeit eingenommene Raumgebiet  $T$ , das etwa von festen Wänden  $G$  und von gewissen ergänzenden „Kontroll-“ oder Hilfsflächen  $H$  begrenzt sein möge. Man erhält dann auf der linken Seite

$$\int_T \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau = \int_T \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\tau + \rho \int_T \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} d\tau.$$

Um das zweite Integral umzuformen, betrachten wir etwa den auf die  $x$ -Richtung bezogenen Ausdruck

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Wenn wir  $v_x \nabla \cdot \mathbf{v} = v_x \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  hinzufügen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left( v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left( v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_x v_z). \end{aligned}$$

Jede Komponente der „stationären“ Beschleunigung läßt sich also als Divergenz eines aus den Produkten der Geschwindigkeitskomponenten gebildeten Vektors darstellen; die drei Vektoren charakterisieren einen besonderen symmetrischen Tensor, die „Dyade“ oder das dyadische Produkt  $\mathbf{v} \mathbf{v}$ . Der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  ist also gleichbedeutend mit der Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}$  dieser Dyade. Wenn wir nun den Gaußschen Lehrsatz auf das Integral

$$\rho \int_T \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\tau$$

anwenden und die äußere Normale der begrenzenden Flächen  $F(G+H)$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa W. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 22 ff.

mit  $n$  bezeichnen, so ergibt sich, wie man durch Ausrechnung einer Komponente sofort feststellt, die Beziehung

$$(2) \quad \int_T \rho \mathbf{v} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v} d\tau = \int_T \rho \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} d\tau = \rho \int_F v_n df \cdot \mathbf{v} = \rho \int_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df.$$

Im Integral der rechten Seite von (1) ergibt der erste Ausdruck sofort die Resultierende der auf die Flüssigkeit wirkenden eingepägten Kräfte

$$(3) \quad \int \rho \mathfrak{I} d\tau = \mathfrak{R},$$

während das auf den Druck sich beziehende Integral

$$\int \mathcal{F} p d\tau$$

unmittelbar in ein Flächenintegral umgeformt werden kann. Bezeichnen wir dann mit  $\mathfrak{P}$  den Vektor des resultierenden Reaktionsdruckes, den die Flüssigkeit auf die Grenzen ausübt, so wird

$$(4) \quad \int_T \mathcal{F} p d\tau = \int_F p n df = \mathfrak{P}.$$

Aus dem zweiten Ausdruck erhalten wir

$$(5) \quad \mu \int \mathcal{A} \mathbf{v} d\tau = \mu \int \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v} d\tau = \mu \int \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{v}) d\tau$$

und nach dem Integralsatz von Gauß

$$(6) \quad \mu \int_T \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v} d\tau = \mu \int_F \mathcal{F} \mathbf{v} n df = \mu \int_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} df.$$

Wenn  $n_i$  die in die Flüssigkeit gehende innere Normale bedeutet, so sieht man, daß das längs der festen Wände erstreckte Integral

$$(7) \quad -\mathfrak{R} = \mu \int_G \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_i} df = -\mu \int_G \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_i} df$$

unmittelbar die Summe der von den Wänden auf die Flüssigkeit ausgeübten Reibungskräfte ergibt. Umgekehrt ist  $+\mathfrak{R}$  die Resultierende der von der Flüssigkeit auf die Wände ausgeübten Reibungskräfte. Wenn die Flüssigkeit unendlich ausgedehnt ist, also die Kontrollflächen im Unendlichen liegen, wie etwa eine Kugeloberfläche mit unendlich großem Radius, so verschwindet das über die Flächen  $K$  erstreckte Integral, wenn  $\mathbf{v}$  wie eine Potenz von  $\frac{1}{r}$  verschwindet oder das Feld im Unendlichen homogen ist. Auch sonst kommen bei kleiner Reibung wesentlich nur die Reibungskräfte längs der Flächen  $G$  in Betracht, da nur hier der Geschwindigkeitsgradient  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n_i}$  von nennenswerter Größenordnung ist. Wir können also schreiben

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_T \rho \mathbf{v} d\tau + \int_F \rho v_n df \cdot \mathbf{v} = \mathfrak{R} - (\mathfrak{R} + \mathfrak{P}).$$

Der erste Ausdruck auf der linken Seite ist die zeitliche Änderung des im Gebiet enthaltenen Impulses (die bei stationärer Strömung verschwindet); der zweite Ausdruck stellt den Impulstransport durch die Kontrollflächen dar, weil der Ausdruck längs der festen Grenzen ( $v_n = 0$ ) verschwindet, oder den Überschuß des durch die Flächen austretenden Impulses gegenüber dem eintretenden. Wenn die eingeprägte Kraft verschwindet, so haben wir demnach den Satz:

Die substantielle Impulsänderung, die sich aus der lokalen und der konvektiven Änderung oder dem Impulstransport zusammensetzt, ist gleich dem negativen Wert der vektoriellen Summe der auf die Wände ausgeübten Reaktionsdrucke und Reibungskräfte. Wir sehen also, daß der Impulssatz für zähe Flüssigkeiten ebenso gilt wie für reibungslose Flüssigkeiten.

2. Zur Bestimmung der Lage der Kräfte läßt sich ein entsprechender Satz für die Impulsmomente in bezug auf irgendeinen festen Punkt aufstellen. Es wird im wesentlichen darauf ankommen, das Moment der Massenbeschleunigung

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \rho \int_V \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau$$

umzuformen. Für den ersten Teil des Integrals erhält man

$$\mathfrak{J}_1 = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau,$$

für den zweiten Teil

$$\mathfrak{J}_2 = \rho \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}) d\tau.$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen läßt sich wieder als Divergenz darstellen, wie man etwa durch direkte Ausrechnung der  $x$ -Komponente feststellt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} & y \left[ \frac{\partial}{\partial x} v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} v_z^2 \right] - z \left[ \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} v_y^2 + \frac{\partial}{\partial z} v_y v_z) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [v_x (y v_z - z v_y)] + \frac{\partial}{\partial y} [v_y (y v_z - z v_y)] + \frac{\partial}{\partial z} [v_z (y v_z - z v_y)]. \end{aligned}$$

In vektorieller Schreibweise hat man also

$$(9) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Das Integral  $\mathfrak{J}_2$  ergibt daher nach dem Gaußschen Satz

$$\mathfrak{J}_2 = \rho \int_V \mathbf{v} n d f \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$



Auf der rechten Seite erhalten wir in derselben Weise wie oben das Moment der Kräfte. Im ganzen können wir daher schreiben

$$(10) \quad \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau + \varrho \int_V \mathbf{v} n d f \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} - \mathbf{r} \times (\mathfrak{R} + \mathfrak{P}).$$

Das Moment der substantiellen Impulsänderung oder der Summe aus der lokalen und der konvektiven Impulsänderung in der Zeiteinheit ist demnach gleich dem Moment der auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte oder bei Fehlen einer eingepprägten Kraft gleich dem negativen Moment der auf die Grenzen ausgeübten Reaktionsdrucke und Reibungskräfte.

In dem Fall, daß in der Flüssigkeit singuläre Stellen vorhanden sind, sind die Impulsbeträge entsprechend zu modifizieren bzw. zu ergänzen, worauf wir aber nicht eingehen wollen.

## § 8. Transformation auf Zylinder- und Kugelkoordinaten.

1. Allgemeine Zylinderkoordinaten. Die in den vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten hydrodynamischen Grundgleichungen, die für rechtwinklige Koordinaten entweder schon gegeben sind oder doch sofort angeschrieben werden können, wollen wir nun auf orthogonale krummlinige, insbesondere auf Zylinderkoordinaten  $(r, q, z)$ , übertragen, um die Formeln für spätere Anwendung sofort zur Hand zu haben. Dabei werden wir die Rechnungen, die im ganzen elementarer Natur sind, nach Möglichkeit abkürzen.

Um zunächst den Verzerrungstensor nach den Richtungen  $r, q, z$  zu zerlegen, haben wir die relative Verschiebung bzw. Verschiebungsgeschwindigkeit zweier Nachbartheilchen der Flüssigkeit zu ermitteln. Da die Richtungen von  $v_r$  und  $v_q$  nicht mehr unverändert bleiben, so haben wir bei der Bildung der Geschwindigkeitsänderung bzw. der Beschleunigung gewisse Zusatzglieder zu berücksichtigen, die der Drehung bzw. der Änderung des Winkels  $q$  entsprechen. Bedeutet  $\mathfrak{A}$  einen allgemeinen Vektor, so setzt sich die totale Änderung zusammen aus einer Änderung in der Richtung von  $\mathfrak{A}$  und einer Drehung des Vektors. Wir können diesen Satz durch die allgemeine Formel ausdrücken

$$(1) \quad \delta \mathfrak{A} = \mathbf{e} \delta A + \delta \bar{q} \times \mathfrak{A}, \quad \ddagger$$

wenn  $\mathbf{e} = \frac{\mathfrak{A}}{A}$  den Einheitsvektor in der Richtung  $\mathfrak{A}$  und  $\delta \bar{q} = \omega dt$  den Vektor der Drehbewegung bedeutet. Daraus folgt z. B., daß die Änderung der Radialgeschwindigkeit  $v_r$  auf dem Wege  $r \delta q$  sich zusammensetzt aus den Vektoren  $\frac{\partial v_r}{r \partial q}$  in Richtung und dem Vektor  $v_r \delta q \cdot \frac{v_r}{r} r \delta q$  in der

dazu senkrechten Richtung der Geschwindigkeit  $v_q$ . Auf demselben Wege ändert sich die Geschwindigkeit  $v_q$  um den Vektor  $\frac{\partial v_q}{r \partial \varphi}$  und den Vektor  $v_q \delta \varphi$ , von denen der erste die Richtung  $v_q$ , der zweite die Richtung des negativen Radiusvektors  $r$  hat. Wir gewinnen daraus folgende Formeln für die Änderungen der Geschwindigkeiten  $v_r, v_\varphi, v_z$ :

$$(2) \quad \begin{cases} \delta v_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \delta r + \left( \frac{\partial v_r}{r \partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) r \delta \varphi + \frac{\partial v_r}{\partial z} \delta z, \\ \delta v_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \delta r + \left( \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} \right) r \delta \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \delta z, \\ \delta v_z = \frac{\partial v_z}{\partial r} \delta r + \frac{\partial v_z}{r \partial \varphi} r \delta \varphi + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß das Quadrat des Linienelementes zweier Nachbarpunkte nach der Deformation in der Zeit  $dt$  die Größe hat

$$(3) \quad \begin{aligned} d\lambda^2 &= (\delta r + \delta v_r dt)^2 + (r \delta \varphi + \delta v_\varphi dt)^2 + (\delta z + \delta v_z dt)^2 \\ &= dl^2 + 2dt[\varepsilon_r(\delta r)^2 + \varepsilon_\varphi(r \delta \varphi)^2 + \varepsilon_z(\delta z)^2 + \gamma_{r\varphi}(r \delta r \delta \varphi) \\ &\quad + \gamma_{rz}(\delta r \delta z) + \gamma_{z\varphi}(r \delta \varphi \delta z)]. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten in dem Ausdruck  $d\lambda^2 = dl^2$  geben dann ohne weiteres die Komponenten des Verzerrungstensors. Wir erhalten

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, & 2\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}, & 2\gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \varphi}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, & 2\gamma_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{cases}$$

und daraus dann die Kontinuitätsgleichung

$$(5) \quad r(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) = r \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0.$$

Ebenso leitet man nach der Vorschrift des § 2 für die Wirbelkomponenten ohne Schwierigkeit die Ausdrücke ab

$$(6) \quad \begin{aligned} w_r &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial z} \right), & w_\varphi &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ w_z &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Wenn wir die Ausdrücke (2) durch das Zeitelement  $dt$  dividieren und die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial v_r}{\partial t}$  usw. hinzufügen, so erhalten wir die Beschleunigungskomponenten. Es möge bemerkt werden, daß wir die Beschleunigungsgrößen auch ohne weiteres durch Benutzung der aus der Dynamik bekannten Zusatzbeschleunigungen gewinnen können.

So ergibt sich für die Beschleunigung  $b_r$  bei Hinzufügen der Zentripetalbeschleunigung

$$b_r = v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + r \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} v_\varphi - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}.$$

Ferner ist das auf den Anfangspunkt bezogene Moment der Beschleunigung  $b_\varphi$  gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Impulsmomentes. In dem entsprechenden Ausdruck

$$r \bar{b}_\varphi = \frac{d}{dt}(r \cdot v_\varphi) = r \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} v_\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} v_z \right) + v_r v_\varphi,$$

der mit dem aus (2) sich ergebenden übereinstimmt, tritt dann auch nach entsprechender Umformung die bekannte Coriolis-Beschleunigung  $2v_r \frac{v_\varphi}{r}$  auf.

Um die vollständigen Bewegungsgleichungen darzustellen, bedarf es noch der Entwicklung der Ausdrücke  $\Delta v_r$ ,  $\Delta v_\varphi$ .

Wenn wir in (5)

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\varphi = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \mathbf{v} = \mathcal{F} \Phi$$

einsetzen, so ergibt sich eine skalare Funktion

$$(7) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Für  $\Phi$  können wir wegen der Unveränderlichkeit der Richtung ohne weiteres  $v_z$  einsetzen. Dagegen erhalten wir durch zweimalige Anwendung der Formel (1) bzw. der daraus durch Division durch den Weg  $r \delta \varphi$  abgeleiteten Formel, am einfachsten auf geometrischem Wege,

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \Delta v_\varphi = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen werden dann

$$(9) \quad \begin{cases} k_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta v_r = \bar{b}_r, \\ k_\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + \nu \Delta v_\varphi = \bar{b}_\varphi, \\ k_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z = \bar{b}_z. \end{cases}$$

2. Der achsensymmetrische Fall. Wenn wir keissymmetrische Verhältnisse um die  $z$ -Achse haben, so verschwindet  $v_\varphi$  und alle Ableitungen nach  $\varphi$ . Es bleiben dann die beiden Bewegungsgleichungen für

die  $z$ - und die  $r$ -Richtung übrig. Wenn man ein Potential  $\Omega$  für die äußeren Kräfte annimmt und

$$-\left(\Omega + \frac{\rho}{\sigma}\right) = Q$$

setzt, so erhält man

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}, \\ \frac{\partial Q}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}. \end{cases}$$

Elimination von  $Q$  führt mit der Substitution

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

zu der Gleichung

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ - \nu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathcal{A} v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{A} v_z \right], \end{aligned}$$

die durch Benutzung der Kontinuitätsgleichung vereinfacht werden kann. Die einzig möglichen Wirbellinien sind Kreise, die die  $z$ -Achse zur gemeinsamen Symmetrieachse haben. Setzt man die Wirbelstärke

$$w_\eta = w,$$

so wird

$$w = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Die Gleichung (12) schreibt sich dann

$$(12a) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + v_r \frac{\partial w}{\partial r} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{v_r}{r} = \nu \left( \mathcal{A} w - \frac{w}{r^2} \right).$$

Führen wir die Stromfunktion  $\Psi$  mit

$$(13) \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ein, und bezeichnen wir zur Abkürzung mit  $D$  die Operation

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

so wird zunächst

$$(14) \quad 2w = -\frac{1}{r} D \Psi,$$

und die Gleichung (12) bzw. (12a) läßt sich dann bei Benutzung der Kontinuitätsbeziehungen auf die Form bringen

$$(15) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial z} + v_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2v_r}{r} - \nu D \right) D \Psi = 0.$$



Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig, Kugelkoordinaten  $R$  und  $\vartheta$  einzuführen, die mit  $z$  und  $r$  durch die Beziehungen

$$z = R \cos \vartheta, \quad r = R \sin \vartheta$$

zusammenhängen. Auf Grund der zu (2) analogen Transformationsgleichungen findet man dann

$$(16) \quad \begin{cases} v_R = v_z \cos \vartheta + v_r \sin \vartheta = \frac{1}{R \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial \psi}{\partial z} \sin \vartheta \right) = \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \\ v_\vartheta = v_r \cos \vartheta - v_z \sin \vartheta = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich durch elementare Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{v_r}{r} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \cos \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial R} \right), \\ v_r \frac{\partial}{\partial z} + v_r \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right), \\ D &\equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten daher für die Stromfunktion  $\psi$  die Differentialgleichung

$$(17) \quad \begin{aligned} &\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{2}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \right] \cdot \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

auf die wir bei einer späteren Gelegenheit ausführlich zurückkommen werden.

## ZWEITES KAPITEL.

### Stationäre Laminarströmung zwischen ebenen Wänden.

#### § 9. Lineare Strömung zwischen ebenen Wänden.

Nachdem wir die allgemeinen Ansätze der Dynamik zäher Flüssigkeiten entwickelt und die leitenden physikalischen Gesichtspunkte kennengelernt haben, wollen wir eine Übersicht über die wichtigsten Integrale und Integrationsmethoden geben und zunächst mit der Betrachtung einiger einfacher Bewegungsformen beginnen, deren Verlauf nur durch eine einzige Koordinate charakterisiert wird. Haben wir z. B. eine laminare Bewegung der Flüssigkeit, die in allen Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse gleichmäßig verläuft und parallel zur  $x$ -Achse gerichtet ist, so können wir annehmen, daß die Geschwindigkeit  $v_x$  nur von  $z$  abhängt,

während  $y_j$  und  $v$  verschwinden. Eine solche Bewegung kann z. B. als erzeugt betrachtet werden von einer festen Ebene, etwa  $z=0$ , die sich in der  $x$ -Richtung gleichmäßig in sich selbst verschiebt und die an ihrer Oberfläche haftende Flüssigkeit mitführt. Das System der Bewegungsgleichungen (3) bzw. (4) des § 4 geht über in

$$(1) \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Wegen der Gleichmäßigkeit aller Verhältnisse in der  $x$ -Richtung kann  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , also  $p$  als konstant angesehen werden. Ist die Strömung außerdem stationär, so reduziert sich (1) mit  $v_z = v$  auf

$$(2) \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

woraus sich die einfache Lösung

$$(3) \quad v = u_0 + az$$

ergibt. Die Geschwindigkeit der Strömung nimmt also linear mit der Entfernung von der mit der Geschwindigkeit  $u = u_0$  bewegten Ebene  $z=0$  zu. Da die Geschwindigkeit  $v = \infty$  nicht zulässig ist, so ist die einzig mögliche Bewegung der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit die gleichförmige Translation mit der Geschwindigkeit  $u_0$  ( $a=0$ ). Man kann also im besonderen nicht voraussetzen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht und sich im übrigen stationär bewegt.

Wenn wir annehmen, daß der feste Boden, an dem die Flüssigkeit haftet, durch  $z=0$  dargestellt wird und die bewegungserzeugende Ebene den Abstand  $z=h$  vom Boden hat, so wird

$$(4) \quad v_x = \frac{u_0 z}{h}.$$

Die längs der Oberfläche  $z=h$  bewegte Ebene erfährt daher einen Widerstand, der pro Flächeneinheit den Wert hat

$$(5) \quad r_{xz} = -\mu \frac{u_0}{h}.$$

Da das Geschwindigkeitsgefälle von der bewegten Wand aus mit dem Abstände abnimmt, so ergibt sich, wie auch die Formel zum Ausdruck bringt, daß der Widerstand umgekehrt proportional mit dem Abstand der beiden Ebenen  $z=0$  und  $z=h$  ist.

Die Gleichung (4) findet sich übrigens angenähert bei der stationären Meeresströmung realisiert, die wahrscheinlich von der Luftströmung durch Vermittlung der Reibung zwischen Luft und Wasser verursacht wird. Sie bedarf allerdings, um den wirklichen Verhältnissen gerecht zu

werden, noch einer wesentlichen Erweiterung für den instationären Fall, den wir später ausführlich besprechen werden.

2. Wenn die Flüssigkeitsbewegung zwischen parallelen Wänden unter einem bestimmten konstanten Druckgefälle  $\frac{\partial p}{\partial x}$  steht, so erhalten wir für den stationären Fall die Gleichung

$$(6) \quad \mu \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen ergibt sich dann für  $v$  eine quadratische Abhängigkeit von der Koordinate  $z$  in der Form

$$\mu v = A + Bz + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2},$$

wobei die Konstanten  $A$  und  $B$  verschiedenen Grenzbedingungen angepaßt werden können.

a) Wenn z. B. die Wand  $z = h$  die Geschwindigkeit  $u_0$  hat, während für  $z = 0$  die Geschwindigkeit Null ist, so haben wir

$$A = 0; \quad B = \frac{\mu u_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

zu wählen, also

$$v = \frac{u_0 z}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z(h-z)}{2\mu}.$$

Der Gesamtfluß durch eine zur Stromrichtung senkrechte Ebene wird daher

$$Q = \int_0^h v dz = \frac{1}{2} h u_0 - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

woraus als mittlere Geschwindigkeit sich der Wert ergibt

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = \frac{1}{2} u_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{12\mu}.$$

Diese Formel kann auch dann als erste Näherung angewendet werden, wenn die Höhe  $h$  veränderlich ist, vorausgesetzt, daß  $\frac{dh}{dx}$  klein bleibt; ferner auch bei schwach gekrümmten Grenzflächen.

Die sich bewegende Grenzfläche erfährt einen Widerstand, der pro Flächeneinheit den Wert hat

$$r_{xz} = - \left( \mu \frac{u_0}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

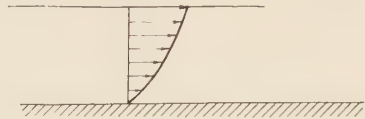


Abb. 5. Geschwindigkeitsprofil bei einer Laminarströmung zwischen parallelen Ebenen.

Wenn der Druck mit der Richtung der Führungsgeschwindigkeit abfällt, also  $\frac{\partial p}{\partial x}$  negativ ist, so verschwindet der Reibungswiderstand für

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2\mu}.$$

b) Wenn die Flüssigkeitsform von zwei ruhenden parallelen Wänden  $z = \pm h$  eingeschlossen wird, so gibt die Bedingung des Haftens für die Integrationskonstanten die Werte

$$B = 0, \quad A = -\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dann wird also die Stromgeschwindigkeit

$$v = -\frac{1}{2\mu} (h^2 - z^2) \frac{\partial p}{\partial x},$$

ferner der Gesamtfluß

$$Q = \int_{-h}^{+h} v dz = \frac{2}{3\mu} h^3 \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{h^2}{3\mu} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Das Druckgefälle ist also der mittleren Geschwindigkeit direkt und dem Quadrat des Plattenabstandes indirekt proportional.

c) Haben die Wände außerdem eine natürliche Neigung gegen die Horizontale, so gilt anstatt (6) die Gleichung

$$-\gamma \sin \alpha + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 v}{dz^2}.$$

Dieser Fall erledigt sich also dadurch, daß an Stelle von  $\frac{\partial p}{\partial x}$  der Ausdruck  $\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \sin \alpha$  einzuführen ist. Wenn  $\rho$  konstant ist, haben wir für eine zwischen zwei geneigten parallelen Wänden  $z = \pm h$  abfließende Flüssigkeitsschicht

$$v = \frac{g}{2\nu} (h^2 - z^2) \sin \alpha.$$

Die Geschwindigkeit in der Mittelschicht  $z = 0$  ist

$$v_0 = \frac{g}{2\nu} \sin \alpha \cdot h^2.$$

Diese Schicht kann als freie Oberfläche der halben Flüssigkeitsschicht von der Dicke  $h$  angesehen werden, da in ihr wegen  $\frac{dv}{dz} = 0$  die Reibung verschwindet. Dann erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{1}{2h} \frac{g}{\nu} \int_0^h (h^2 - z^2) \sin \alpha dz = \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \sin \alpha \cdot h^2.$$



Bei einer Breite  $b$  der Schicht haben wir für die sekundlich abfließende Menge

$$Q = \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \sin \alpha \cdot b \cdot h^3$$

und daraus

$$\nu = \frac{1}{3} \frac{g}{Q} \sin \alpha \cdot b h^3.$$

Die Zähigkeit der Flüssigkeit erweist sich also als proportional der dritten Potenz der Dicke und umgekehrt proportional der Menge  $Q$ . Auf Grund dieser Beziehung kann man die Zähigkeit  $\nu$  berechnen, wenn man durch Messung die Neigung  $\alpha$  und die Dicke  $h$  bestimmt hat. Es zeigt sich dabei, daß die Reynoldssche Zahl  $\frac{v_m \cdot h}{\nu}$

unterhalb des Grenzwertes  $\Re_k \approx 330$  liegen muß. In diesem laminaren Gebiet, in dem also eine merkliche Schichtenströmung stattfindet, bleibt  $\nu$  für die verschiedenen Werte von  $\Re$  konstant. Wenn  $\Re$  dagegen den Wert 330 übersteigt, so wächst die kinematische Zähigkeit etwa linear mit  $\Re$  (vgl. Abb. 6). Man muß ferner bei den Versuchen in Rücksicht ziehen, daß die Kapillarkräfte einen nicht unwesentlichen Einfluß ausüben, der bei verschiedenen Flüssigkeiten verschieden ausfällt und sich besonders darin zeigt, daß

die Flüssigkeitsschicht sich in der Nähe der Grenzen verengt. Die Kapillarität dürfte auch der Grund dafür sein, daß der kritische Grenzwert für  $\Re_k$  für verschiedene Flüssigkeiten verschieden ausfällt: Während der Wert 330 für Wasser gilt, liegt der Wert für eine 12%ige Zuckerlösung bei 280, für eine 25%ige Zuckerlösung etwa bei 250. Man kann also die Vorgänge nicht exakt miteinander vergleichen, wenn man mit verschiedenen Flüssigkeiten arbeitet.

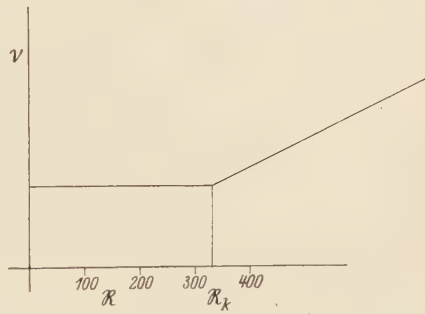


Abb. 6. Zähigkeit in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl bei linearer Strömung.

### § 10. Bewegung einer ebenen Tragfläche auf einer Flüssigkeitsschicht.

Wichtig für die später zu erwähnende Theorie der Schmiermittelreibung ist der von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> behandelte Fall einer ebenen

<sup>1)</sup> Philos. Magaz. 35 (1918), S. 1. Vgl. auch A. Sommerfeld, Zeitschr. f. techn. Physik, 2. Bd., 1921, S. 91f.

unendlich langen Platte (Tragfläche), die auf einer dünnen Schmier-  
schicht bewegt wird (Abb. 7). Für den Ansatz kommt es auf dasselbe

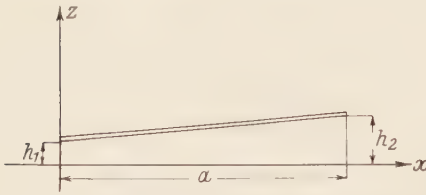


Abb. 7. Tragfläche auf einer Flüssigkeitsschicht.

hinaus, wenn wir die Tragfläche als ruhend voraussetzen und annehmen, daß die ebene Unterlage mit einer Geschwindigkeit  $u_0$  in ihrer Richtung fortschreitet. Nehmen wir an, daß die Fläche von  $x=0$  bis  $x=a$  reicht, und daß die Dicke der Schicht sich linear ändert im Sinne der Gleichung

$$h = h_1 + \beta x \quad (h_2 = h_1 + \beta a),$$

so können wir die Formeln für den von  $x$  unabhängigen Fluß und die Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der Koordinate  $z$  senkrecht zur Unterlage anwenden

$$(1) \quad v = \frac{h-z}{h} u_0 - \frac{z(h-z)}{2\mu} \frac{dp}{dx}; \quad Q = \frac{1}{2} h u_0 - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Wir erhalten dann

$$(2) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{6\mu}{h^3} (h u_0 - 2Q).$$

Wenn wir nach  $x$  zwischen den Grenzen  $x=0$ ,  $h=h_1$ ,  $p=0$  und  $x=a$ ,  $h=h_2$ ,  $p=0$  integrieren, so ergibt sich

$$(3) \quad 0 = a \frac{6\mu}{h_1 h_2} \left( u_0 - Q \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \right),$$

woraus mit der Abkürzung

$$h_0 = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{die Beziehung} \quad Q = \frac{u_0 h_0}{2}$$

folgt, mit der gemäß (2)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu u_0}{h^3} (h - h_0); \quad \frac{dp}{dh} = \frac{6\mu u_0}{\beta h^3} (h - h_0)$$

sich ergibt oder nach Integration unter Elimination von  $h_0$  und passender Wahl der Integrationskonstanten

$$(4) \quad p = \frac{6\mu u_0 a}{h_1^2 - h_2^2} \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2}.$$

Man sieht daraus, daß der Abstand  $h$  der Ebenen in der Bewegungsrichtung sich verkleinern muß, damit  $p$  positiv wird, daß ferner der Druck bei veränderlicher Schmier-  
schicht nicht mehr konstant ausfällt, sondern zwischen den beiden Endwerten  $p=0$  (für  $x=0$  und  $x=a$ ) ein Maximum hat, das der Stelle  $h=h_0$  entspricht.

Für den Gesamtdruck, den die Fläche zu tragen vermag, erhalten wir mit  $k = \frac{h_1}{h_2}$

$$(5) \quad P_1 = \int_0^a p \, dx = \frac{6\mu u a^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left( 1gk - \frac{2(k-1)}{k+1} \right),$$

während der Reibungswiderstand den Wert annimmt

$$(6) \quad P_2 = - \int_0^a \mu \frac{\partial v}{\partial z} \, dx = - \frac{2\mu u a}{(k-1)h_2} \left( 21gk + \frac{3(k-1)}{k+1} \right).$$

Es ergibt sich daraus das bemerkenswerte Resultat, daß  $P$  ein Maximum erreicht für  $\frac{h_1}{h_2} = 2,2$ ; dann wird

$$P_1 = 0,16 \mu u \frac{a^2}{h_2^2}; \quad P_2 = 0,75 \frac{\mu u a}{h_2}.$$

Mit  $\mu=0,03$ ,  $u=1$  m/s,  $h_1=0,2$  mm,  $a=10$  cm ergibt sich als Größe der tragbaren Last pro Quadratcentimeter

$$\frac{P_1}{a} = 1,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Eine praktisch wichtige Anwendung dieses Falles der Tragfläche auf der zähen Flüssigkeit werden wir später in der Theorie der (Sommerfeldschen) Zapfenreibung besprechen.

## § 11. Ebene Strömung dünner Flüssigkeitsschichten.

1. Wir haben oben die geradlinige Strömung in einer von zwei Parallelebenen  $z = \pm h$  begrenzten Flüssigkeitsschicht betrachtet und gefunden, daß die mittlere Stromgeschwindigkeit dem Druckgefälle in der Strömungsrichtung proportional ist. Wenn die Flüssigkeit nach zwei Richtungen zwischen zwei parallelen Horizontalebene mit geringem Abstand fließt, so haben wir das Gleichungssystem

$$(1) \quad \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \gamma,$$

wenn wir unter Voraussetzung kleiner Geschwindigkeiten die Differentialquotienten von  $v_x$  und  $v_y$  nach  $x$  und  $y$  gegenüber den Änderungen mit  $z$  vernachlässigen und überdies  $v_z$  gleich Null setzen. Diese Grundgleichungen gelten auch dann, wenn die Strömung infolge von zylindrischen, in das Stromfeld hineingestellten Hindernissen (von der Höhe  $2h$ ) einen gekrümmten Verlauf hat, jedenfalls unter der Voraussetzung, daß die Abweichung der Stromlinien von einer Geraden nicht allzu groß wird.

Aus (1) ergibt sich, daß für den Druck die Beziehung

$$p = \gamma z + f(x, y)$$

besteht, derzufolge die beiden Ableitungen des Druckes nach  $x$  und  $y$  von  $z$  unabhängig, also bei der Integration als Konstante anzusehen sind. Dann erhalten wir bei Haftung an den Wänden die Integrale

$$(2) \quad v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu} (h^2 - z^2); \quad v_y = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (h^2 - z^2),$$

aus denen sich die mittleren Geschwindigkeiten zu

$$(3) \quad (v_x)_m = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{3\mu}; \quad (v_y)_m = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{h^2}{3\mu}$$

oder

$$(3a) \quad (v_x)_m = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{h^2}{3\mu} p(x, y) \right]; \quad (v_y)_m = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{h^2}{3\mu} p(x, y) \right]$$

berechnen. Die Mittelwerte der Geschwindigkeiten können daher als partielle Ableitungen einer Potentialfunktion

$$\Phi = -\frac{h^2}{3\mu} p(x, y)$$

dargestellt werden, so daß sich also die zähe Strömung einer dünnen, von zwei parallelen (Glas-)Wänden eingeschlossenen Flüssigkeitsschicht in ihrem mittleren Geschwindigkeitsverlauf wie eine ideale wirbelfreie Strömung verhält. Die Kurven gleichen Druckes fallen daher mit den Potentiallinien der idealen Vergleichsströmung zusammen. Diese Sätze verlieren ihre Gültigkeit in der unmittelbaren Umgebung der vertikalen zylindrischen Querwände, da die Geschwindigkeit hier für jedes  $z$  verschwindet.

Hele-Shaw<sup>1)</sup> hat eine ursprünglich parallele, durch ein irgendwie (kreisförmig, geradlinig und schiffskörperartig) profiliertes Hindernis gestörte Strömung dadurch sichtbar gemacht, daß er gefärbte Flüssigkeitsfäden aus mehreren äquidistanten Kanälchen in den Strom einfuhrte. Da bei der kleinen Geschwindigkeit die Fäden durch das ganze Stromgebiet sich getrennt erhalten, so gewinnt man durch ihren veränderlichen Abstand ein deutliches Bild von dem Geschwindigkeitsverlauf in der Umgebung des Hindernisses, der auch im Lichtbild festgehalten werden kann.

<sup>1)</sup> Hele-Shaw, Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream-line motion under certain experimental conditions, Inst. of Nav. Arch. 40, 2, 1898; ferner The Motion of a Perfect Liquid. Proc. Roy. Soc. 16, 49, 1899.

2. Als einen weiteren Fall betrachten wir eine zwischen zwei vertikalen Wänden fließende Flüssigkeitsschicht, die mit einem größeren Gefäß in Verbindung steht. Wenn die Flüssigkeit im Gefäß die Höhe  $H$  einnimmt und die Schicht in der horizontalen Richtung die Länge  $l$  hat (vgl. Abb. 8), so können wir uns die Aufgabe stellen, den Verlauf der Stromlinien, also insbesondere die Gestalt der freien Oberfläche, zu bestimmen. Berücksichtigt man die Schwerkraft und das Druckgefälle, so haben wir die beiden Gleichungen

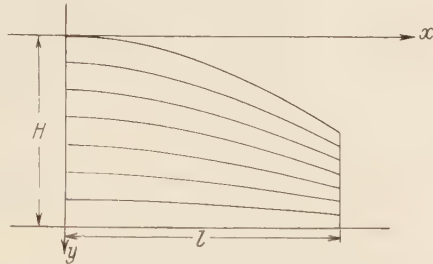


Abb. 8. Bewegung einer dünnen Flüssigkeitsschicht mit freier Oberfläche.

$$(1) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g y = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}.$$

Mit Einführung der mittleren Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  und der Potentialfunktion

$$(2) \quad \Phi = - \left( \frac{p - \rho g y}{3\mu} \right) h^2$$

hat man wieder

$$(3) \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

In diesem Falle fallen die Potentiaallinien nicht mehr mit den Kurven gleichen Druckes zusammen. Wenn  $\Phi$  als Funktion von  $x$  und  $y$  bestimmt ist, so hat man für den Druck

$$(4) \quad p = \rho g y - \frac{3\mu \Phi}{h^2}.$$

Für die Funktion  $\Phi$  haben wir die folgenden Randbedingungen zu erfüllen: sie muß erstens konstant sein längs der  $y$ -Achse, d. h. für  $x=0$  muß  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  werden, was gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß die Flüssigkeitsteilchen horizontal aus dem Gefäß in den Kanal eintreten. Ferner muß für  $z=H$ , d. h. also auf dem Boden des Gefäßes bzw. des Kanals, für jeden Wert von  $x$

$$v_y = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

werden. Wenn die Kanalwände bis  $x=l$  reichen, so muß schließlich der Druck für  $x=l$  konstant sein. Wir können ihn gleich Null setzen.



Die beiden ersten Bedingungen können befriedigt werden durch eine Reihe von der Form

$$(5) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Im \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2H} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2H}.$$

Für  $x=l$  wird gemäß (5)  $\Phi = \frac{\rho g y h^2}{3\mu}$ , also gemäß (2) unter Beachtung der dritten Bedingung

$$\frac{\rho g y h^2}{3\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Im \sin \frac{(2n-1)\pi l}{2H} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2H}.$$

Auf Grund der Identität

$$y = \frac{8H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2H}$$

findet man daraus durch Koeffizientenvergleich

$$(6) \quad A_n = (-1)^n \frac{8\rho g H h^2}{3\mu(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{\Im \sin \frac{(2n-1)\pi l}{2H}}.$$

Die sekundlich durch den Verbindungsquerschnitt  $2Hh$  zwischen Gefäß und Kanal hindurchtretende Flüssigkeitsmenge wird

$$(7) \quad Q = 2h \int_0^H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 2h \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(2n-1)\pi}{2H} \int_0^H \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2H} dy = 2h \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Die Funktion  $\Phi$  ist der reelle Teil der komplexen Stromfunktion

$$(8) \quad W = \Phi + i\Psi = i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \left( \frac{(2n-1)\pi Z}{2H} \right),$$

wobei  $Z = x + iy$  zu setzen ist. Daher wird die Stromfunktion

$$(8a) \quad \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2H} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2H}.$$

Man sieht, daß der Boden  $z=H$  der Stromlinie  $\Psi=0$  entspricht, während die freie Grenze der Schicht die Gleichung

$$(9) \quad \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

hat. Daraus ergibt sich wieder der oben berechnete Wert des Flusses.

## § 12. Strömende Flüssigkeitsschicht von linear veränderlicher Dicke.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen wollen wir auf den Fall ausdehnen, daß die beiden Begrenzungsebenen der Schicht unter einem sehr spitzen Winkel zusammenstoßen. Wenn die  $x$ -Achse mit der Schnittgeraden beider Ebenen zusammenfällt, und wenn die  $xy$ -Ebene die keilförmige Schicht halbiert, so können wir setzen:

$$h = \alpha y.$$

Die Kontinuitätsgleichung wird in diesem Fall, da wir  $y$  und  $h$  als radiale Zylinderkoordinaten auffassen können,

$$(1) \quad \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{y} = 0.$$

Übernehmen wir ferner die Ausdrücke des vorigen Paragraphen

$$(2) \quad v_x = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial y},$$

so ergibt sich durch Einsetzen in (1) die Differentialgleichung für die Druckfunktion

$$(3) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Wenn wir die Stromfunktion durch die Gleichungen

$$(4) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_y; \quad -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x$$

eingeführen, so ergibt sich für  $\Psi$  die Gleichung

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{3}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich, wenn wir die Geschwindigkeitsausdrücke (2) und (4) gleichsetzen und  $p$  eliminieren.

Allgemeine Lösungen der Gleichungen (3) und (5) kann man durch die Substitution

$$\Psi = (A \mathfrak{C}_0 \int kx + B \mathfrak{S} \sin kx) \psi(y)$$

erhalten. Die Funktion  $\psi(y)$  genügt dann der Differentialgleichung

$$\psi''(y) - \frac{3}{y} \psi'(y) + k^2 \psi(y) = 0.$$

Setzt man  $\psi = y^2 \cdot Z(ky)$ , so genügt  $Z$  der Besselschen Gleichung

$$Z'' + \frac{1}{ky} Z' + \left(1 - \frac{4}{k^2 y^2}\right) Z = 0.$$

$Z$  ist also eine Besselsche Funktion 2. Ordnung, und wir erhalten daher ein Integral der Gleichung (5) in der Form

$$(6) \quad \Psi = \sum_k (A \mathfrak{C}_0 \int kx + B \mathfrak{S} \sin kx) y^2 Z_2(ky).$$

Auf Integrale dieser Art werden wir später bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen. Vorläufig wollen wir uns begnügen mit einer besonderen Lösung, die folgenden Annahmen entspricht. Denken wir uns eine Strömung in Richtung der  $x$ -Achse, die durch den zwischen den Grenzebenen liegenden Teil einer Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

vom Radius  $a$  abgelenkt wird, so genügt die Stromfunktion

$$(7) \quad \Psi = c \left( 1 - \frac{a^5}{r^5} \right) y^4 = c \left( 1 - \frac{a^5}{r^5} \right) r^4 \sin^4 \varphi$$

der Differentialgleichung (5) und den einschlägigen Grenzbedingungen.

Denn zunächst wird  $\Psi = 0$  für  $r = a$ . Ferner erhalten wir

$$(8) \quad v_y = \frac{5cy^3xa^5}{a^7r^7}, \quad v_x = -\frac{cy^2}{a} \left[ 4 \left( 1 - \frac{a^5}{r^5} \right) + \frac{5y^2a^5}{r^5} \right],$$

$v_y$  nähert sich in größerem Abstände von der Kugel der Null. Für die ungestörte Strömung ergibt sich

$$v_x = -\frac{4cy^2}{a}.$$

Wenn etwa durch einen Querschnitt, der durch die Wände und den mit  $y = y_0$  beschriebenen Zylinder begrenzt wird, die Menge  $Q_0$  hindurchfließt, so wird

$$(9) \quad Q_0 = \int_0^{y_0} v_x \alpha y dy = cy_0^4,$$

also

$$c = \frac{Q_0}{y_0^4}.$$

Zur Charakterisierung der durch (7) dargestellten Strömung erinnern wir an die entsprechende achsensymmetrische, nach außen unbegrenzte Strömung, deren Stromfunktion der Gleichung

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

genügt und im Falle eines kugelförmigen Hindernisses die Form

$$(11) \quad \Psi = \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) y^2$$

hat<sup>1)</sup>. In unserem Beispiel der Keilströmung drängen sich die Stromlinien in der Mittelebene mit wachsendem Abstand von der Kontur  $y = 0$  viel enger zusammen als im Meridianschnitt einer reibungslosen Strömung um eine Kugel.

<sup>1)</sup> Vgl. Wilh. Müller, Math. Strömungslehre, S. 57.

DRITTES KAPITEL.

Geradlinige zweidimensionale Strömung  
mit zylindrischer Begrenzung.

§ 13. Axiale Bewegung von Zylindern in der zähen  
Flüssigkeit.

Wenn sich ein unbegrenzt langer Zylinder mit beliebigem Querschnitt in der Richtung der geradlinigen Erzeugenden bewegt, so wird infolge des Haftens an der Oberfläche eine Strömung erzeugt, die als geradlinig vorausgesetzt werden kann. Ist die  $z$ -Achse der Bewegung parallel, so ist die Geschwindigkeit  $v_x = v$  nur von  $x$  und  $y$  abhängig, und wir erhalten bei Unterdrückung der Trägheitsglieder und unter der Annahme, daß der Druck in der  $z$ -Richtung unveränderlich ist, als maßgebende Gleichung für  $v$

$$(1) \quad v \Delta v = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial t},$$

die im stationären Fall die einfache Form erhält

$$(2) \quad \Delta v = 0.$$

Die Lösung soll an die Bedingung geknüpft sein, daß am Zylinder die Stromgeschwindigkeit mit der Bewegungsgeschwindigkeit des Zylinders übereinstimmt. Die Strömung genügt also derselben Differentialgleichung wie die Potential- oder Stromfunktion der ebenen Strömung einer idealen Flüssigkeit. Die in der Theorie der reibungsfreien Strömung angewendeten Methoden (insbesondere die Methode des komplexen Potentials und der konformen Abbildung) können also ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen werden. So kann man

$$v = \Phi(x, y)$$

als Potential einer idealen Strömung auffassen, deren Stromlinien  $\Psi(x, y) = c$  die Potentiallinien  $\Phi(x, y) = c$  orthogonal durchschneiden. Da  $\Phi$  und  $\Psi$  ihrer Bedeutung nach vertauschbar sind, liefert jede analytische Funktion

$$\chi(Z) = \chi(x + iy) = \Phi + i\Psi$$

der komplexen Veränderlichen  $Z = x + iy$  zwei Lösungen des vorliegenden Problems. Das Geschwindigkeitsgefälle  $\frac{\partial v}{\partial n}$  der zähen Strömung längs des Randes, das der widerstehenden Tangentialspannung proportional ist, ist identisch mit dem ortsgleichen Geschwindigkeitswert der zugeordneten normalen Strömung, deren Potentialflächen den Zylinder enthalten. Das

in der Umgebung des Zylinders entstehende Geschwindigkeitsfeld ist übrigens an dieselben analytischen Bedingungen geknüpft wie als elektrisches Potentialfeld des zylindrischen Leiters. Der allgemeine Fall einer zähen Strömung, die von  $n$  parallelen sich in Richtung der Erzeugenden mit den Geschwindigkeiten  $v_1, v_2 \dots v_n$  fortbewegenden Zylindern hervorgerufen wird, ist gleichbedeutend dem elektrischen Feld in der Umgebung der elektrisch geladenen zylindrischen Konduktoren. Die Widerstandskraft pro Flächeneinheit, die auf den  $i$ ten Zylinder wirkt, entspricht dabei der elektrischen Oberflächendichte

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i$$

an derselben Stelle.

## § 14. Axiale Bewegung von Kreiszyllindern in der zähen Flüssigkeit.

1. Um Lösungen der Gleichung (2) von § 13 zu erhalten, genügt es, analytische Funktionen der komplexen Variablen  $Z = x + iy$  zu bilden<sup>1)</sup>. Setzen wir z. B. den reellen Teil der Funktion

$$(1) \quad \chi(Z) = u_0 + A \lg \frac{Z}{a}$$

mit reellem  $u, A$  und  $a$  der Geschwindigkeit  $v$  gleich, so ergibt sich

$$(2) \quad v = u_0 + A \lg \frac{r}{a},$$

und man sieht, daß  $v$  längs der Spur  $|Z| = r = a$  eines Kreiszyllinders mit dem Radius  $a$  den Wert  $u_0$  annimmt. Durch (2) ist also jedenfalls eine der Grenzbedingungen erfüllt.

Die Lösung stimmt aber insofern nicht mit den wirklichen Verhältnissen überein, als im Unendlichen die Geschwindigkeit über alle Grenzen wächst. Fügen wir jedoch einen konzentrischen festen Zylinder vom Radius  $R$  hinzu, an dem die Flüssigkeit haften soll, so kann man für die von beiden Zylindern eingeschlossene lineare Strömung einen Ansatz von der Form

$$(3) \quad v = A \lg \left| \frac{Z}{a} \right| + B \lg \frac{R}{a}$$

machen. Aus den beiden Randbedingungen

$$(v)_{r=a} = u_0 = B \lg \frac{R}{a}; \quad (v)_{r=R} = 0 = A + B$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa M. Brillouin, Leçons sur la viscosité des Liquides et des Gaz, T. I. Paris 1907, S. 61 f.



ergibt sich dann

$$B = \frac{u_0}{\lg \frac{R}{a}}; \quad A = \frac{u_0}{\lg \frac{a}{R}},$$

also die Lösung

$$(4) \quad v = u_0 \frac{\lg \frac{r}{R}}{\lg \frac{a}{R}}.$$

Wenn man jetzt  $R$  wachsen läßt, so kann man mit jeder beliebigen Annäherung dem Fall einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit Rechnung tragen.

Der Widerstand pro Längeneinheit, den der Zylinder  $r=a$  bei der Bewegung erfährt, ist

$$(5) \quad P_r = \mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r} a d\varphi = -\frac{2\pi\mu u_0}{\lg \frac{R}{a}}.$$

Er ist also der Geschwindigkeit proportional und um so größer, je enger das Rohr ist, in dem sich der Kreiszyllinder bewegt.

Durch Vermittlung einer konformen Abbildung gelingt es, den Ausdruck (3) auf andere Randkurven zu übertragen. So transformiert sich das von den beiden Kreisen  $|z|=a$ ,  $|z|=R$  eingeschlossene Gebiet durch die Funktion

$$\zeta = Z + \frac{p^2}{Z}$$

in das entsprechende Gebiet zwischen zwei konfokalen Ellipsen der  $\zeta$ -Ebene, deren halbe Brennweite gleich  $2p$  ist. Wir werden weiter unten auf den Fall zurückkommen.

2. Als weiteres Beispiel betrachten wir einen Kreiszyllinder in der Umgebung einer festen unbegrenzten Ebene. Die Ebenenspur kann ersetzt werden durch das auf sie bezogene Spiegelbild des Kreises.

Führt man bipolare Koordinaten ein in bezug auf die beiden symmetrisch zur Ebenenspur  $x=0$  gelegenen Punkte  $O_1$  und  $O_2$  mit den Koordinaten  $\pm id$  und nennt  $r_1$  und  $r_2$  die Koordinaten  $O_1P$  bzw.  $O_2P$  eines Auf-

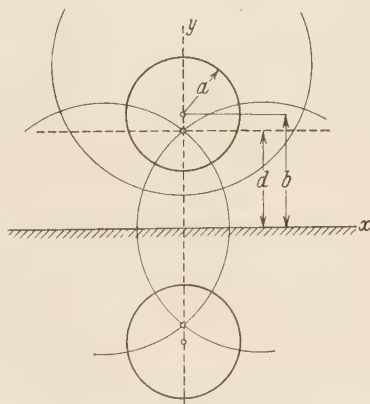


Abb. 9. Zur Bewegung eines Kreiszyllinders parallel zu seinen Erzeugenden in der Nähe einer ebenen Wand.

punkts  $P$ , so ist  $\frac{r_1}{r_2}$  auf den Kreisen eines Büschels konstant (Abb. 9). Die Mittelpunkte der beiden symmetrischen Kreise mit den Radien  $a$  haben den Abstand

$$b = \sqrt{d^2 + a^2}$$

von der Geraden  $x=0$ . Wenn  $a$  und  $b$  gegeben sind, so kann man  $d$  eindeutig bestimmen. Für einen dieser Kreise ist ferner

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a-b+d}{b+d-a} = \frac{b-d}{a} = \frac{a}{b+d}.$$

Als Geschwindigkeitsfunktion kann man den Realteil  $\Phi$  der analytischen Funktion

$$(6) \quad \chi = \Phi + i\Psi = \lg \frac{Z-id}{Z+id}$$

benutzen, der die bemerkenswerte Umkehrung gestattet

$$(7) \quad Z = -id \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}.$$

Den Geraden  $\Phi = \text{const}$ , in der  $\chi$ -Ebene entsprechen die Kreise des durch die Gleichung

$$\lg \frac{r_1}{r_2} = \lg \left| \frac{Z-id}{Z+id} \right| = \text{const}$$

definierten Büschels der  $Z$ -Ebene. Es sind die Potentiallinien einer idealen Strömung, die als von einer in  $Z=id$  gelegenen Quelle und einer in  $Z=-id$  gelegenen Senke erzeugt gedacht werden kann. Die konjugierte Strömung hat als erzeugende Singularitäten zwei gegensinnige Wirbel in denselben Punkten.

Setzt man also

$$(8) \quad v = c \lg \frac{r_1}{r_2} = c\Phi$$

und bestimmt die Konstanten durch die Forderung, daß die Geschwindigkeit  $v$  am Umfang des Kreises  $K$  gleich  $u_0$  wird, so hat man

$$(9) \quad v = \frac{u_0}{\lg \frac{b-d}{a}} \cdot \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Das Geschwindigkeitsgefälle längs des Kreiszyllinders ergibt sich aus der Geschwindigkeit der Vergleichsströmung  $c\chi(Z)$  zu

$$V = c \frac{d}{dZ} \left( \lg \frac{Z-id}{Z+id} \right) = c \frac{2id}{Z^2 + d^2};$$

setzt man  $Z = a \cdot \cos \varphi + i(b + a \cdot \sin \varphi)$ , so wird

$$V_n = |V| = \frac{dc}{a(b + a \sin \varphi)}.$$

Daher ist die Widerstandskraft pro Längeneinheit des Kreiszyllinders

$$(10) \quad P_r = cd \cdot \mu \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b + a \sin \varphi} = 2\pi \mu c = 2\pi \mu \frac{u_0}{\lg \frac{b-d}{a}}$$

3. Wenn wir von der konjugierten Vergleichsströmung ausgehen, die von zwei Gegenwirbeln erzeugt wird, und eine Drehung um  $90^\circ$  vornehmen, so ergibt sich

$$(11) \quad \chi = \Phi + i\Psi = ci \lg \frac{Z-a}{Z+a}$$

Betrachten wir den Kreis  $|Z|=a$  als Querschnitt des mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegten Zylinders sowie den diametral dazu liegenden äußeren Teil der  $X$ -Achse als Spur einer festen Ebene (vgl. Abb. 10), so ist  $c = \frac{2u_0}{\pi}$  zu setzen und es wird

Abb. 10), so ist  $c = \frac{2u_0}{\pi}$  zu setzen und es wird

$$(12) \quad v = \Phi = \frac{2u_0}{\pi} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

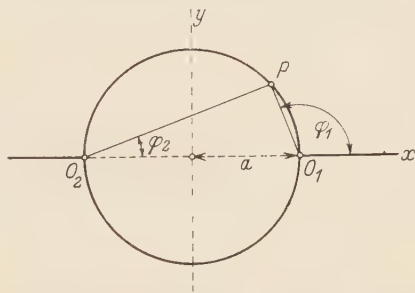


Abb. 10. Zur Bewegung eines Zylinders zwischen zwei diametral gelegenen Ebenen.

Die Geschwindigkeit  $v$  wird dann in der Tat gleich  $u_0$  auf dem Zylinder und sie verschwindet längs der beiden Halbebenen  $y=0$  außerhalb des Kreises sowie im Unendlichen. Die Reibungskraft längs eines Elementes  $ad\varphi$  des Kreiszyllinders wird

$$dP_r = \mu a d\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \mu \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} d\varphi = \mu d\Psi;$$

nun ist längs des Kreises

$$\left| \frac{Z-a}{Z+a} \right| = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \operatorname{tg} \varphi_2,$$

also

$$(13) \quad dP_r = \frac{2\mu u_0}{\pi} d(\lg \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Bei der Berechnung des Integrals ist zu beachten, daß die Reibung an der Stelle, wo der Zylinder mit der Ebene zusammenstößt, theoretisch unendlich wird. Wenn wir diese Stellen umgehen oder ausschließen, so erhält man für die Reibung eines durch die Werte  $\varphi_2$  und  $\varphi_2'$  bestimmten Streifens

$$(14) \quad P_r = \frac{2\mu u_0}{\pi} \lg \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2'}$$

### § 15. Strömung mit festen und bewegten Grenzebenen.

Zwei weitere Fälle lassen sich durch die bekannte Transformation

$$(1) \quad Z = x + iy = f \operatorname{Co}[\zeta]; \quad \zeta = \operatorname{ArCo} \frac{Z}{f} = \lg \frac{Z + \sqrt{Z^2 - f^2}}{f}$$

erledigen. Wie man durch Trennung des Reellen und Imaginären und Elimination von  $\Psi$  bzw.  $\Phi$  feststellt, entsprechen den Kurven  $\Phi = \text{const}$  und  $\Psi = \text{const}$  in der  $\zeta$ -Ebene zwei orthogonale Scharen von Ellipsen und Hyperbeln in der  $Z$ -Ebene mit den Gleichungen

$$(2) \quad f^2 \operatorname{Co}^2 \psi + f^2 \operatorname{Si}^2 \psi = 1; \quad f^2 \cos^2 \psi - f^2 \sin^2 \psi = 1.$$

Man sieht, daß das Verhältnis der kleinen zur großen Achse der durch den Punkt  $Z$  gehenden Ellipse durch  $\operatorname{Tg} \Phi$  und der Winkel der Asymptoten der durch  $Z$  gehenden Hyperbel und der  $x$ -Achse unmittelbar

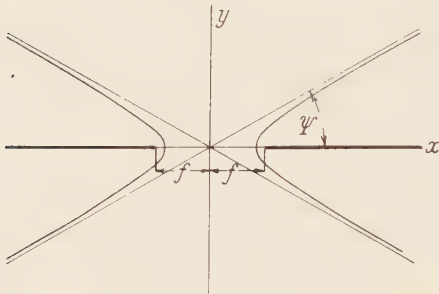


Abb. 11. Zur konformen Abbildung einer konfokalen Hyperbelschar.

durch  $\Psi$  dargestellt wird (vgl. Abb. 11). Die Bewegung eines elliptischen Zylinders mit den Halbachsen  $a, b$  in Richtung der Mantellinie ist nun durch den Ausdruck

$$(3) \quad v = \frac{u_0 \Phi}{\Phi_0}$$

dargestellt, wenn

$$\operatorname{Tg} \varphi_0 = \frac{b}{a}; \quad \varphi_0 = \operatorname{ArTg} \frac{b}{a}$$

gesetzt wird. Im Unendlichen erhält man allerdings einen unendlich großen Wert für  $v$ . Wenn man aber einen zweiten, konfokalen elliptischen Zylinder annimmt, dem der Parameter  $\Phi = \Phi_1$  entspricht und die Geschwindigkeit  $v = 0$ , so ergibt sich für  $v$  der Ausdruck

$$(4) \quad v = \frac{u_0(\Phi - \Phi_1)}{\Phi_0 - \Phi_1}$$

Wenn  $\Phi_0 = 0$  ist, so erhalten wir in

$$(4a) \quad v = \frac{u_0(\Phi_1 - \Phi)}{\Phi_1}$$

den Grenzfall einer bewegten ebenen Platte innerhalb eines elliptisch begrenzten zylindrischen Flüssigkeitsraumes. In diesem Falle ist für einen Punkt der Platte

$$(5) \quad \Psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{f^2 - x^2}{x}} = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{f}$$

Das Geschwindigkeitsgefälle wird daher

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u_0}{\phi_1} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{u_0}{\phi_1} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und daher der Reibungswiderstand der Platte

$$(6) \quad P_r = 2\mu \int_0^f \frac{\partial v}{\partial n} dx = \frac{2\mu u_0}{\phi_1} [d\psi]^f_0 = -\frac{\mu \pi u_0}{\phi_1}.$$

Durch diese Formel wird das von früher bekannte Gesetz für den Wand- einfluß bestätigt.

In der Hyperbelschar der  $Z$ -Ebene ist die  $y$ -Achse und der positive in  $x=f$  beginnende Teil der  $x$ -Achse enthalten, die wir als Spuren zweier Ebenen ansehen können. Setzen wir voraus, daß die Ebene  $x=0$  mit der Geschwindigkeit  $u_0$  bewegt wird, während die zweite Ebene fest ist, so können wir die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  durch

$$(7) \quad v = \frac{2u_0\psi}{\pi}$$

darstellen. Für einen Punkt der  $y$ -Achse, d. h. der bewegten Ebene wird

$$(8) \quad \chi = \lg \frac{i(y + \sqrt{y^2 + f^2})}{f}; \quad \Phi = \lg \frac{y + \sqrt{y^2 + f^2}}{f} = \frac{1}{2} \lg \frac{y^2 + f^2 + y}{\sqrt{y^2 + f^2} - y}.$$

Die Reibung, die auf den Streifen zwischen  $y$  und  $y + dy$  entfällt, wird dann

$$dP_r = \mu \frac{2u_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} dy = -\mu \frac{2u_0}{\pi} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -\frac{2\mu u_0}{\pi} d\Phi.$$

Für den von  $y=0$  bis  $y=h$  reichenden Teil der Ebene wird also

$$(9) \quad P_r = -\mu \frac{2u_0}{\pi} \lg \frac{h + \sqrt{h^2 + f^2}}{f}.$$

Sondert man im Logarithmand den Faktor  $\frac{2h}{f}$  ab und entwickelt den übrigbleibenden Faktor, so kommt

$$(9a) \quad P_r = -\frac{2\mu u_0}{\pi} \left[ \lg \frac{2h}{f} + \frac{1}{4} \frac{f^2}{h^2} \dots \right].$$

Ist  $h$  gegen  $f$  groß, so reduziert sich der Widerstand auf

$$(10) \quad P_r = -\frac{2\mu u_0}{\pi} \lg \frac{2h}{f}.$$

Der Widerstand ist also um so größer, je kleiner der Schlitz zwischen beiden Ebenen wird.

Die Formel (9) kann ferner dazu verwendet werden, um den Einfluß eines Schlitzes zwischen dem Kreiszyylinder  $|Z|=a$  und der Ebene  $y=0$  in dem Beispiel des § 14 anzugeben. Wenn  $\varphi'_2$  klein ist, so können wir für den Bogen  $O_1P$  die Tangente in  $O_1$  an den Kreis substituieren.



Wenn  $h$  auf der Tangente gemessen wird, so ist zunächst der Widerstand des vom Punkt  $P$  (zu  $q'_2$  gehörig) bis zum Punkt  $q_2 = \frac{\pi}{4}$  reichenden Kreiszylinders

$$(11) \quad (P_r)_{q'_2}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\mu u_0}{\pi} \lg \frac{2a}{h}.$$

Hat der Schlitz die Größe  $f$ , so ergibt sich der Widerstand des von  $q_2=0$  bis  $q_2=q'_2$  reichenden Teils des Kreiszylinders aus der Formel

$$(12) \quad (P_r)_0^{q'_2} = -\frac{2\mu u_0}{\pi} \left( \lg \frac{2h}{f} + \frac{f^2}{4h^2} + \dots \right).$$

Wenn man den zweiten Ausdruck in der Klammer vernachlässigt, so erhält man den Widerstand des Viertelzylinders zu

$$(13) \quad (P_r)_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\mu u_0}{\pi} \lg \frac{4a}{f},$$

daher den Gesamtwiderstand

$$(14) \quad (P_r) = -\frac{8\mu u_0}{\pi} \lg \frac{4a}{f}.$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist an die Voraussetzung geknüpft, daß  $\frac{f^2}{4h^2}$  und  $\frac{h}{2a}$  vernachlässigbar klein sind.

## § 16. Einige weitere Fälle mit ebener Begrenzung.

1. Als weiteres Beispiel zu dem Ansatz des vorigen Paragraphen betrachten wir die Beziehung

$$(1) \quad Z = a\chi + b(1 + e^{c\chi}),$$

aus der sich für  $x$  und  $y$  sich die Werte ergeben

$$(1a) \quad \begin{cases} x = a\Phi + b(1 + e^{c\Phi} \cos c^i\Phi) \\ y = a^iP + b e^{c^i\Phi} \sin c^i\Phi. \end{cases}$$

Mit dieser Transformation läßt sich z. B. die Strömung behandeln, die durch die Translation einer Ebene mit freier Grenze ( $y=h$ ,  $x=0$ ) erzeugt wird, und die längs einer dazu parallelen, beiderseits ins Unendliche gehenden Ebene ( $y=0$ ) haftet. Die Bedingungen, die zur Ermittlung der noch unbestimmten Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  führen, sind

$$\begin{aligned} 1. \quad \Psi &= \Psi_0 & \text{für } y &= h, \quad x \text{ negativ,} \\ 2. \quad \Psi &= 0 & \text{für } y &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung folgt

$$a = \frac{h}{q_0}, \quad c = \frac{\pi}{q_0}.$$

Entwickelt man ferner die Exponentialfunktion, so folgt für  $\Psi = \Psi_0$

$$x = \frac{\hbar}{u_0} \Phi - b \frac{\pi}{u_0} \Phi - \frac{b}{2!} \left( \frac{\pi \Phi}{u_0} \right)^2 - \dots$$

Der Ausdruck bleibt negativ, wenn  $b = \frac{\hbar}{\pi}$  gesetzt wird. Damit ist dann auch die zweite Bedingung erfüllt. Wenn wir also  $\Psi = v$  setzen, so haben wir die Darstellung

$$(2) \begin{cases} x = \frac{\hbar}{u_0} \Phi + \frac{\hbar}{\pi} \left( 1 + e^{\frac{\pi \Phi}{u_0}} \cdot \cos \pi \frac{v}{u_0} \right), \\ y = \hbar \frac{v}{u_0} + \frac{\hbar}{\pi} e^{\frac{\pi \Phi}{u_0}} \cdot \sin \pi \frac{v}{u_0}. \end{cases}$$

Längs der beweglichen Ebene wird

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial v}{\partial y} dx = \mu d\Phi.$$

In der Nähe des Randes der Ebene haben wir nach der Entwicklung für  $x$

$$x = -\frac{\hbar \pi}{2 u_0^2} \Phi^2; \quad \Phi = \pm u_0 \sqrt{\frac{-2x}{\pi \hbar}},$$

wobei das positive Vorzeichen sich auf die äußere, das negative auf die innere Seite bezieht. Daher wird die Reibung vom Rande bis zu einem kleinen Abstand  $x$  auf jeder Seite

$$(3) \quad P_r^{-x} = \mu \int_0^\varphi d\Phi = \mu \Phi = -\mu u_0 \sqrt{\frac{-2x}{\pi \hbar}}.$$

In großem Abstand vom Rande auf der inneren Seite ( $\varphi$  negativ und absolut groß) erhält man aus (2)

$$\frac{x \pi}{\hbar} - 1 = \frac{\Phi \pi}{u_0} - e^{\frac{\pi \Phi}{u_0}},$$

oder, wenn man das zweite Glied rechts unterdrückt,

$$\Phi \infty - \frac{u_0}{\hbar} \left( -x + \frac{\hbar}{\pi} \right),$$

daher

$$(4) \quad (P_r)_1 = -\frac{\mu u_0}{\hbar} \left( -x + \frac{\hbar}{\pi} \right).$$

Auf der oberen (äußeren) Seite ( $\Phi > 0$ ) dagegen wird angenähert

$$\frac{x \pi}{\hbar} - 1 = -e^{\frac{\Phi \pi}{u_0}}; \quad \Phi = \frac{u_0}{\pi} \lg \left( 1 - \frac{\pi x}{\hbar} \right),$$

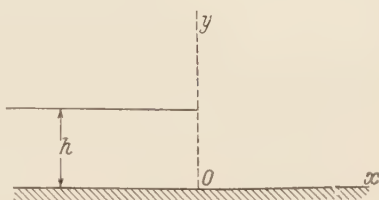


Abb. 12. Zur Bewegung einer einseitig begrenzten Ebene parallel zu einer parallelen festen Ebene.

also der Reibungswiderstand

$$(5) \quad (P_r)_2 = -\frac{\mu u_0}{\pi} \lg\left(1 - \frac{\pi x}{h}\right).$$

Der Gesamtwiderstand, gerechnet bis zu einem im Vergleich mit  $h$  großen Abstand  $x$ , wird daher

$$(6) \quad P_r = (P_r)_1 + (P_r)_2 = -\mu u_0 \left\{ -\frac{x}{h} + \frac{1}{\pi} \left[ 1 + \lg\left(1 - \frac{\pi x}{h}\right) \right] \right\}.$$

Dieselbe Lösung ist zu verwenden für die beiden Ebenen  $y = \frac{1}{2}h$ ,  $x \leq 0$  und  $y = -\frac{1}{2}h$ ,  $x \leq 0$ , deren eine sich in der  $z$ -Richtung bewegt, während die andere in Ruhe ist. Man hat nur an Stelle von  $u_0$  und  $h$  die Werte  $\frac{u_0}{2}$  und  $\frac{1}{2}h$  einzusetzen. Es muß aber bemerkt werden, daß im Unendlichen die Geschwindigkeit nicht verschwindet, sondern gleich  $\frac{u_0}{2}$  wird.

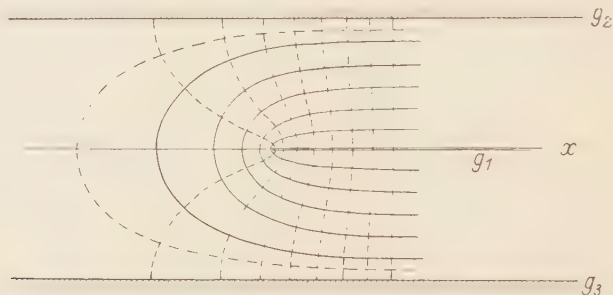


Abb. 13. Isotachen für die Strömung, die von der Bewegung einer einseitig begrenzten Ebene zwischen zwei festen Ebenen erzeugt wird (nach Maxwell).

2. Der Einfluß der Bewegung einer einseitig berandeten Ebene ( $y=0$ ,  $x>0$ ) zwischen zwei unendlichen Ebenen im Abstand  $h$  läßt sich mittels der konformen Abbildungen

$$(7) \quad \begin{cases} x + iy = \frac{h}{\pi} (i\eta - \lg(\xi^2 - 1)), \\ \chi = \Phi + i\Psi = \frac{u_0}{\pi} \lg \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \end{cases}$$

berechnen. Wie man sieht, entspricht die bewegte Ebene  $g_1$  der Strecke  $\eta=0$ ,  $\xi^2=1$  (mit den Endpunkten  $A_1$ ,  $A_2$ ) in der  $\xi$ -Ebene, und der Randpunkt dem Punkt  $\xi=0$ . Die Verlängerung von  $g_1$  über den Rand hinaus entspricht der  $\eta$ -Achse. Ferner wird, da für  $\eta=0$ ,  $\xi^2 < 1$

$$\chi = \Phi + i\Psi = \frac{u_0}{\pi} \left[ \lg \frac{1 - \xi}{1 + \xi} + i\pi \right]$$

$$\Psi = \text{const} = u_0$$

Die beiden festen Ebenen  $g_2$  und  $g_3$  dagegen entsprechen dem von den Endpunkten  $A_1$  und  $A_2$  ins Unendliche gehenden Teile der  $\xi$ -Achse; da in diesem Fall

$$\Phi + i\Psi = \frac{u_0}{\pi} \lg \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

wird, so verschwindet  $\Psi$  für die Punkte der Geraden  $g_2$  und  $g_3$ .  $\Psi$  kann daher unmittelbar als Geschwindigkeitsfunktion  $v$  definiert werden. Da  $\zeta$  die komplexe Stromfunktion einer Strömung in der  $\zeta$ -Ebene darstellt, die von der Quelle  $A_1$  zur Senke  $A_2$  geht, so entsprechen die Stromlinien, d. h. die Kreise durch  $A_1, A_2$ , den Linien gleicher Geschwindigkeit  $v$  der zähen Strömung (vgl. Abb. 13, 14). Diese Kurven in der  $Z$ -Ebene selbst haben zwei Asymptoten parallel und zu beiden Seiten der Ebene  $g_1$  und ihre Scheitel auf der Verlängerung von  $g_1$ .

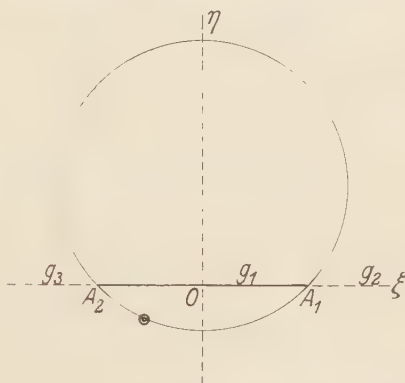


Abb. 14. Zur konformen Abbildung der Maxwell-Strömung.

Wie in den früheren Beispielen erhalten wir mit  $\Psi = v$  für die

Reibung auf der oberen Seite der beweglichen Ebene vom Rande  $x=0, \xi=0, \Phi=0$  bis zu der Stelle  $x$  den Ausdruck

$$(8) \quad P_r = -\mu \frac{u_0}{\pi} \left[ \frac{\pi y}{h} + 2 \lg \left( 1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{\pi y}{h}}} \right) \right],$$

der für ein kleines  $y$  in den Ausdruck

$$(8a) \quad P_r = -\mu \frac{u_0}{\pi} \left( \frac{\pi y}{h} + 2 \lg 2 \right) = -\mu \frac{u_0}{h} \left[ y + \frac{2 \lg 2}{\pi} h \right]$$

übergeht. Die Gesamtreibung ist also ebenso groß, als ob die Verteilung bis zum Rande gleichmäßig und die Ebene über den Rand hinaus um ein Stück  $\frac{2 \cdot \lg 2}{\pi} \cdot h = 0,44 h$  verlängert wäre. Dieses Ergebnis hat Maxwell benutzt, um den Einfluß des Randes einer in der zähen Flüssigkeit zwischen zwei Ebenen rotierenden Scheibe näherungsweise zu ermitteln<sup>1)</sup>. Bei Maxwell wird ferner noch der Fall berücksichtigt, daß die Scheibe eine merkliche Dicke  $2 \delta$  hat. Dann lautet, wie wir ohne

<sup>1)</sup> Vgl. J. Cl. Maxwell, *Scientific Papers* vol. II, Cambridge 1890, S. 17.

Beweis mitteilen wollen, der entsprechende Ausdruck für die Korrekturlänge

$$\lambda = \frac{2h}{\pi} \left[ \lg 2 + \lg \sin \frac{\pi(h-l)}{2h} \right],$$

der in der Tat mit  $\delta=0$  in den vorigen Ausdruck übergeht.

Weitere Einzelheiten, die mehr Bedeutung haben für elektrische und magnetische Strömungserscheinungen, findet man in den Abhandlungen von J. J. Thomson<sup>1)</sup> und in dem bereits angeführten Buch von M. Brillouin<sup>2)</sup>.

## VIERTES KAPITEL.

### Strömung durch zylindrische Rohre.

#### § 17. Das Poiseuillesche Gesetz.

1. Wenn eine Flüssigkeit unter einem Druckgefälle durch ein gerades, in der  $x$ -Richtung gestelltes Rohr fließt, so haben wir für die Hauptrichtung die Bewegungsgleichung

$$(1) \quad k_z + \nu \mathcal{A} v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Wenn wir annehmen, daß die Strömung laminar sei, und die Bahnen aller Flüssigkeitsteilchen der Rohrachse parallel laufen, so folgt aus der Kontinuitätsgleichung wegen  $v_x = v_y = 0$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Die Stromgeschwindigkeit ist also längs einer Parallelen zur Rohrachse konstant und die Gleichung (1) vereinfacht sich daher zu

$$(1a) \quad k_z + \nu \mathcal{A} v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

während die anderen beiden Bewegungsgleichungen die einfache Form annehmen

$$(2) \quad k_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad k_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

2. Kreisquerschnitt. Ist das Rohr kreiszylindrisch, so können wir bei gleichförmiger Strömung Achsensymmetrie für die Geschwindig-

<sup>1)</sup> Recent researches in Electricity and Magnetism, 1893, Ch. III.

<sup>2)</sup> a. a. O., S. 72 und 73.



keit voraussetzen und es ergibt sich bei Einführung von Zylinderkoordinaten aus der Kontinuitätsgleichung

$$(3) \quad \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0$$

die Beziehung  $rv_r = c$ , mithin, da nur  $c=0$  möglich ist,

$$v_r = 0;$$

ferner haben wir mit  $v_z = v$

$$(4) \quad k_z + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad k_r - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad k_\varphi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} = 0.$$

Wenn das Rohr etwa mit der Horizontalen einen (kleinen) Winkel  $\alpha$  bildet, so ergibt sich

$$k_r = -g \cos \alpha \sin \varphi, \quad k_\varphi = -g \cos \alpha \cos \varphi, \quad k_z = g \sin \alpha.$$

Man erhält dann

$$(5) \quad p = -\gamma r \cos \alpha \sin \varphi + f(z).$$

Die Abhängigkeit des Druckes von der Höhenlage  $y = r \cdot \sin \varphi$  folgt also dem hydrostatischen Gesetz. Aus der Hauptgleichung

$$(6) \quad g \sin \alpha + \nu \mathcal{A} v_x = \frac{1}{\varrho} f'(z)$$

ergibt sich weiter, daß  $f'(z)$  eine Konstante sein muß, da  $v$  nicht von  $z$  abhängt. Nehmen wir an, daß auf einer Länge  $l$  der Druck von  $p_1$  auf  $p_2$  abfällt, so wird mit  $p_1 - p_2 = P$

$$f'(x) = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{(p_1 - p_2)}{l} = -\frac{P}{l},$$

und die Gleichung

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\left( \frac{P}{l} + \gamma \sin \alpha \right)$$

führt dann, wenn man von der Schwerkraft absieht, also  $\alpha=0$  setzt, zu dem Integral

$$(7) \quad v = -\frac{P}{4\mu l} r^2 + B \lg r + C.$$

Beim Fehlen einer inneren Begrenzung wird  $B=0$ , und wenn an der Wand für  $r=r_0$  kein Gleiten stattfindet, so folgt

$$(8) \quad v = \frac{P}{4\mu l} (r_0^2 - r^2),$$

d. h. eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt. Die größte axiale Geschwindigkeit für  $r=0$  hat den Wert

$$(9) \quad v_0 = \frac{P}{4\mu l} r_0^2.$$

Die Schubspannung bzw. Reibung pro Flächeneinheit an der Wand wird

$$(10) \quad \tau_0 = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{Pr_0}{2l}.$$

Der Gesamtfluß und die mittlere Geschwindigkeit werden

$$(11) \quad \begin{cases} Q = \int_0^{r_0} v \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \cdot \frac{P}{l} \\ v_m = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{r_0^2 \cdot P}{8\mu l} = \frac{1}{2} v_0; \quad \frac{P}{l} = v_m \cdot \frac{8\mu}{r_0^2} \end{cases}$$

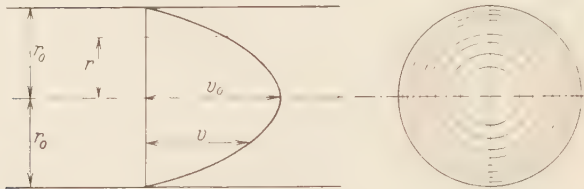


Abb. 15. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachensystem bei der Poiseuille-Strömung durch ein Kreisrohr.

Das damit abgeleitete Hagen-Poiseuillesche Gesetz<sup>1)</sup> können wir dahinaussprechen, daß das Druckgefälle proportional der mittleren Stromgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Quadrat des Radius ist. Die Durchflußmenge dagegen ist bei gleichbleibendem Druckabfall der vierten Potenz des Radius proportional.

Die Geschwindigkeit erhält einen zusätzlichen Bestandteil, wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit an den Wänden gleitet, mithin eine Bedingung von der Art

$$-kv = \mu \frac{dv_x}{dr} \quad \text{für } r = r_0$$

besteht. Es ergibt sich dann

$$v = \frac{P}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) + \frac{1}{2} \frac{Pr_0}{k}.$$

Setzen wir  $\lambda = \frac{\mu}{k}$ , so wird

$$(12) \quad v = \frac{P}{4\mu l} [r_0^2 - r^2 + 2\lambda r_0],$$

und man sieht, daß bei kleinem  $\frac{\lambda}{r_0}$  die Geschwindigkeitsverteilung die-

<sup>1)</sup> Vgl. G. Hagen, Abh. der Berl. Akad. d. Wiss., Math. Abt., S. 17; Ann. d. Phys. 46, 413 (1839); J. L. M. Poiseuille, Mém. Savants Étrangers 9, 433 (1846).

selbe ist wie in einem Rohr vom Radius  $r_0 + \lambda$ , an dessen Wand die Flüssigkeit haftet. Für den Fluß haben wir

$$(13) \quad Q = \frac{\pi r_0^4 P}{8\mu l} \left(1 + 4 \frac{\lambda}{r_0}\right) \approx \frac{\pi P}{8\mu l} (r_0 + \lambda)^4.$$

Diese Gleichung ist insbesondere für die Gasströmung von O. E. Meyer (1866) und von Boussinesq (1868) übernommen worden. Wenn wir den mittleren Druck  $p = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)$  und die Dichte  $\rho$  einführen, so haben wir für die Masse des pro Zeiteinheit durch ein Rohr strömenden Gases den Ausdruck

$$(14) \quad \rho Q = \frac{\pi r_0^4}{8l} \left(1 + 4 \frac{\lambda}{r_0}\right) \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2\mu} \left(\frac{\rho}{p}\right).$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß die Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz um so deutlicher in Erscheinung treten, je enger das Kreisrohr ist. Sehr genau durchgeführte Messungen haben aber dieses Gesetz, jedenfalls für Flüssigkeiten und für kleine, unterhalb eines gewissen kritischen Grenzwertes bleibende Geschwindigkeiten, und damit gleichzeitig indirekt das Haften der Flüssigkeit an den Wänden bestätigt. Um z. B. die Gültigkeit des Potenzgesetzes zu erweisen, hat Poiseuille Kapillarröhren von verschiedenem Durchmesser verwendet und die Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  konstant gehalten. Bei einem Eintrittsdruck  $p_1 = 775$  mm und dem atmosphärischen Austrittsdruck ergab sich für Wasser folgende Tabelle<sup>1)</sup> für die durch den Versuch und nach dem Potenzgesetz rechnerisch bestimmten Durchflußmengen  $Q$ :

$2 \cdot r_0$ (mm)	Q (Versuch) $\text{cm}^3/500\text{s}$	Q (Rechnung)
0,014	1,465	1,465
0,029	28,826	28,808
0,044	141,50	141,63
0,0855	2067,4	2069,8
0,113	6398,3	6389,2
0,14	15532	15547

Man sieht daraus, daß die mittlere Abweichung der Versuchswerte von den theoretischen Werten nicht einmal  $1\text{‰}$  erreicht. In ähnlicher Weise läßt sich die Abhängigkeit vom Druck und von der Länge des Rohres nachprüfen.

Bei allen diesen Versuchen ist vorausgesetzt worden, daß sich bereits der stationäre Zustand der Strömung ausgebildet hat. In Wirklichkeit

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. Brillouin, a. a. O., S. 123f.

tritt aber die durch das Poiseuillesche Gesetz ausgedrückte Geschwindigkeitsverteilung nicht sofort beim Einlauf in das Kapillarrohr in die Erscheinung, sondern erst nach einer gewissen Anlaufstrecke unterhalb des Einlaufes, die etwa dem 50fachen Rohrdurchmesser gleich ist. Die Voraussetzung der gleichmäßigen Strömung schließt daher die praktische Forderung in sich, die Druckmessung an solchen Punkten anzuordnen, die von der Einlauf- und Auslaufstelle einen angemessenen Abstand haben. Im anderen Falle, d. h. wenn der Druck jenseits der Enden in den Behältern  $A$  und  $B$  gemessen wird, ist eine Korrektur einzuführen, die zum Ausdruck zu bringen hat, daß die Druckkraft die Reibung überwinden und die Beschleunigung beim Eintritt und auf der Anlaufstrecke erzeugen muß<sup>1)</sup>. Das tatsächlich zwischen den Enden  $C$  und  $E$  herrschende Druckgefälle  $p_1' - p_2'$  ist kleiner als das gemessene Gefälle. Auf der Beschleunigungsstrecke  $AC$  wächst der dynamische Druck auf den Betrag  $\frac{\rho}{2} v^2$ ; der statische Druck sinkt demgemäß angenähert um den gleichen Betrag,



Abb. 16.

so daß der Gesamtdruck konstant angenommen werden kann. Um die Poiseuillesche stationäre Strömung zu erzeugen, ist ein Druckaufwand erforderlich, der sich nach Erk folgendermaßen berechnet. Die kinetische Energie der in der Zeit  $dt$  durch den Querschnitt strömenden Menge ist bei Benutzung der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung

$$\int_0^{r_0} 2\pi r dr v dt \cdot \rho \frac{v^2}{2} = \pi \rho r_0^2 v^3 m dt.$$

Dividiert man durch das Volumen  $\pi r_0^2 v_m dt$ , so ergibt sich  $\rho v_m^2$  als dynamischer Druckwert  $p_d$ . Da dieser auf der Strecke  $AC$  auf den Betrag  $\frac{1}{2} \rho v_m^2$  angewachsen ist, muß er auf der Anlaufstrecke nochmals um  $\frac{\rho}{2} v_m^2$  zunehmen, während der statische Druck  $p_s$  entsprechend fallen muß. Der Wert  $\Delta p' = \rho v_m^2$  ist ferner um den Reibungsverbrauch  $\Delta p''$  an Druckenergie zu vergrößern. Im Gebiete der stationären Strömung bleibt  $p_d$  konstant, während  $p_s$  und der Gesamtdruck linear abfallen müssen. Der am Ende der Kapillare herrschende Druck wird, wie die Versuche ergeben haben, nicht mehr in statischen Druck zurückverwandelt. Der Druckunterschied zwischen  $A$  und  $B$  ist also gegenüber der Poiseuilleschen

<sup>1)</sup> Vgl. S. Erk, Über Zähigkeitsmessungen nach der Kapillarmethode, Zeitschr. f. techn. Physik, (10) 1929, S. 452—457.

Annahme um  $\Delta p' + \Delta p'' = \lambda \rho v_m^2$  ( $\lambda > 1$ ) zu vergrößern. Wir haben daher in der verbesserten Formel zu setzen

$$(15) \quad p_1 - p_2 = \frac{8\mu Q l}{\pi r_0^4} + \lambda \rho v_m^2.$$

Wenn wir nach  $\mu$  auflösen, ergibt sich der korrigierte Wert für die Reibung

$$(15 a) \quad \begin{aligned} \mu &= \frac{\pi r_0^4 P}{8 Q l} - \frac{\lambda \rho Q}{8 \pi l} \\ &= \frac{\pi r_0^4 P}{8 Q l} \left( 1 - \frac{\lambda \rho Q^2}{\pi^2 P} \right). \end{aligned}$$

Das Zusatzglied wird auch als Hagenbachsche<sup>1)</sup> Korrektur bezeichnet. Der von Hagenbach angenommene Wert  $\lambda = 0,79$  stimmt aber weder mit der Theorie, nach der  $\lambda > 1$  sein muß, noch mit den neueren Versuchsergebnissen überein. Aus strengen theoretischen Ansätzen hat Boussinesq<sup>2)</sup> den Wert  $\lambda = 1,12$  abgeleitet, der mit dem experimentellen Resultat von Riemann<sup>3)</sup>, nämlich  $1,124 \pm 0,006$  (unabhängig von Kapillardurchmesser und Zähigkeit), gut übereinstimmt. Weitere Literaturangaben sind in der Erkschen Arbeit nachzulesen. Dort findet sich auch eine neue Behandlung der bei der Messung der Zähigkeit von Gasen notwendig werdenden Korrektur, die größer ausfällt als bei inkompressiblen Flüssigkeiten, da hier noch die Expansionsbeschleunigung beim Druckabfall beachtet werden muß.

## § 18. Einfache Anwendungen des Poiseuilleschen Gesetzes.

1. Im Anschluß an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen besprechen wir das einfache dynamische Problem des Anstieges einer Flüssigkeit in einem Kapillarrohr, das in ein weites, teilweise mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß taucht (vgl. Abb. 17). Für die veränderliche Geschwindigkeit des Anstieges haben wir nach § 17

$$(1) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{P r_0^2}{z 8 \mu}.$$

Wenn der Höhenunterschied der beiden Spiegel  $h - z$  beträgt, und die Kapillaritätskonstante oder die Zugspannung pro Längeneinheit an der Oberfläche der Flüssigkeit im Rohr  $S$  heißt, so haben wir als aufwärtstreibende Kraft

$$K = \pi r_0^2 \gamma (h - z) + 2 \pi r_0 \cdot S,$$

<sup>1)</sup> Vgl. E. Hagenbach, Pogg. Ann. 109 (1860) S. 385.

<sup>2)</sup> J. Boussinesq, Comptes Rendus, 110 (1891) S. 1160 u. 113 (1891) S. 9.

<sup>3)</sup> W. Riemann, Journ. Amer. Chem. Soc., 50 (1928) S. 46.



mithin

$$(2) \quad P = \frac{K}{\pi r_0^2} = \gamma(h-z) + \frac{2S}{r_0}.$$

Nach (1) ergibt sich daher für  $z$  die Differentialgleichung

$$(3) \quad 8\mu z \frac{dz}{dt} = \gamma(h-z) + \frac{2S}{r_0}.$$

Wenn  $z=0$  ist zur Zeit  $t=0$ , so ergibt sich für die Zeit, die bis zur Erreichung der Höhe  $z$  vergeht, der Ausdruck

$$(4) \quad t = \frac{8\mu}{\gamma r_0^2} \left[ \left( h + \frac{2S}{\gamma r_0} \right) \lg \frac{\gamma h + \frac{2S}{r_0}}{\gamma(h-z) + \frac{2S}{r_0}} - z \right].$$

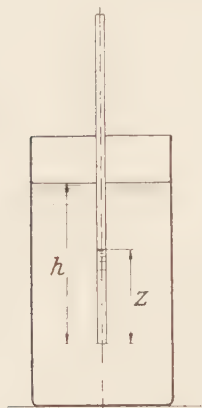


Abb. 17. Anstieg einer Flüssigkeit im Kapillarrohr.

Setzt man die Geschwindigkeit gleich 0, so ergibt sich, daß die Flüssigkeit im Kapillarrohr bis zur Höhe  $H = h + \frac{2S}{\gamma r_0}$  steigt. Bis zur tatsächlichen Erreichung dieser Höhe würde sich allerdings aus der Theorie eine unendlich große Zeit ergeben.

2. Wenn die Flüssigkeit in einem von zwei konzentrischen Kreiszyllindern mit den Radien  $r_0$ ,  $R_0$  begrenzten Rohr fließt, so haben wir in dem allgemeinen Ausdruck [§ 17, (7)]

$$v = -\frac{P}{4\mu l} r^2 + B \lg r + C$$

die Konstanten  $B$  und  $C$  aus den Haftbedingungen zu bestimmen. Man erhält dann

$$B = \frac{P}{4\mu l} \frac{R_0^2 - r_0^2}{\lg R_0 - \lg r_0}; \quad C = \frac{P}{4\mu l} \frac{r_0^2 \lg R_0 - R_0^2 \lg r_0}{\lg R_0 - \lg r_0},$$

mithin

$$(5) \quad v = \frac{P}{4\mu l} \frac{(r^2 - R_0^2) \lg r_0 - (r^2 - r_0^2) \lg R_0 + (R_0^2 - r_0^2) \lg r}{\lg R_0 - \lg r_0}.$$

Die Durchflußmenge wird

$$(6) \quad Q = 2\pi \int_{r_0}^{R_0} v r dr = \frac{\pi P}{4\mu l} \left( \frac{R_0^2}{\lg R_0} - \frac{r_0^2}{\lg r_0} \right) \left[ -\frac{(R_0^2 + r_0^2)}{2} + \frac{R_0^2 \lg R_0 - r_0^2 \lg r_0 - R_0^2 \lg r_0 + r_0^2 \lg R_0}{\lg \frac{R_0}{r_0}} - \frac{R_0^2 - r_0^2}{\lg \frac{R_0}{r_0}} \right] = \frac{P \cdot \pi}{8\mu l} \left[ R_0^4 - r_0^4 - \frac{(R_0^2 - r_0^2)^2}{\lg \frac{R_0}{r_0}} \right].$$

3. Diese Formeln können auch auf einen Fall angewendet werden, der mit den Betrachtungen des III. Kapitels zusammenhängt<sup>1)</sup>. Sei ein

<sup>1)</sup> Vgl. auch H. Bouasse, Hydrodynamique générale, Paris 1928, S. 205.

kreisförmiges, beiderseits abgeschlossenes Gefäß  $A$  gegeben, dessen Höhe groß sein möge im Verhältnis zum Durchmesser  $2 \cdot R_0$ . Ein koaxialer Zylinder  $a$  mit dem Radius  $r_1$  bewegt sich in den Führungen  $F_1$  und  $F_2$  mit der axialen Geschwindigkeit  $U$ , während das Ringgebiet zwischen beiden Zylindern mit Flüssigkeit gefüllt ist (vgl. Abb. 18). Die Flüssigkeit wird von  $a$  mitgenommen und auf der anderen Seite in einem gewissen Gebiet in der entgegengesetzten Richtung fließen, so daß im ganzen eine ringförmige Zirkulation entsteht. In der Mitte des Zylinders, d. h. in genügend großem Abstand von beiden Enden, wird der Geschwindigkeitsverlauf etwa dem in der Figur dargestellten Diagramm entsprechen, und wir können die Strömung in erster Annäherung als eine zylindrische auffassen. Da in einem gewissen Abstände  $r_0$  von der Achse die Geschwindigkeit verschwinden muß, ebenso wie längs des äußeren Zylinders, so können wir den Ausdruck (5) unmittelbar benutzen. Durch zwei weitere Bedingungen lassen sich dann sowohl  $P$  wie  $r_0$  bestimmen. Diese Bedingungen beziehen sich darauf, daß die Geschwindigkeit der Strömung längs  $a$  den Wert  $U$  annehmen und der Gesamtfluß durch den mittleren Querschnitt verschwinden, d. h.

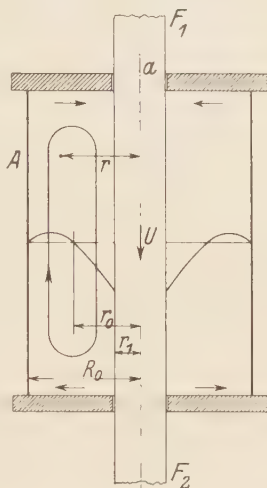


Abb. 18.

$$\int_{r_1}^{R_0} v r dr = \left[ -\frac{P}{16 \mu l} r^4 + \frac{1}{2} B r^2 \left( \lg r - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} C r^2 \right]_{r_1}^{R_0} = 0$$

werden muß.

### § 19. Kapillarmethode der Zähigkeitsmessung.

Wenn man zunächst die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes für Kapillarröhren voraussetzt, so kann man durch versuchsmäßige Bestimmung der durch das Rohr fließenden Menge  $Q$  bzw. der Durchfluß- oder Ausflußzeit  $T$  den Reibungskoeffizienten  $\mu$  und damit die kinematische Zähigkeit  $\nu$  für verschiedene Flüssigkeiten nach der Formel

$$(1) \quad \mu = \nu \cdot \rho = \frac{\pi}{8} \frac{P}{l} \frac{r_0^4}{Q}$$

bestimmen, die eventuell durch das berechnete Korrekturglied zu ergänzen ist. Bei der Ableitung dieser Formel ist zunächst der Druck

als konstant angenommen, was bei den üblichen Viskosimeterformen nicht immer zutrifft. Nur wenn der Druck durch komprimierte Luft erzeugt wird, kann er leicht konstant gehalten werden, falls man einen Behälter verwendet, dessen Volumen groß ist im Verhältnis zu dem bei der Messung zu bewegenden Flüssigkeitsvolumen, und der außerdem vor Temperaturschwankungen geschützt ist. Wenn die Druckdifferenz dagegen nur durch eine Flüssigkeitssäule hervorgerufen wird, so wird er im allgemeinen mit der Höhe dieser Säule selbst veränderlich sein. Wird auf diese Veränderlichkeit Rücksicht genommen, und  $z$  die augenblickliche Höhe der Säule genannt, so muß man von der aus (1) zu entnehmenden Differentialbeziehung ausgehen, d. h. von dem Ausdruck für die während der Zeit  $dt$  ausgelaufene Menge

$$(1a) \quad dQ = \frac{\pi r_0^4 z \gamma}{8 \mu l} dt.$$

Man kann nun die Gleichung integrieren und eine einfache Bestimmung der Zähigkeit durchführen, wenn die Teile des Viskosimeters,

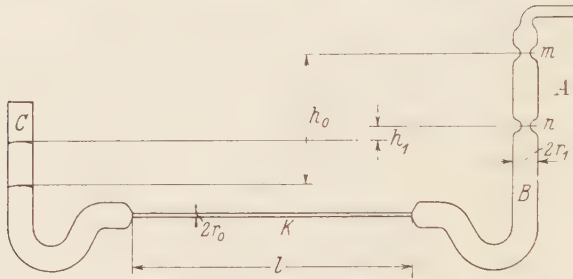


Abb. 19. Viskosimeter von Koch.

aus denen die Flüssigkeit in das Kapillarrohr eintritt, von einfacher geometrischer Form, also etwa kreiszylindrisch sind, wie bei dem abgebildeten Kochschen Viskosimeter<sup>1)</sup>. Die Beziehung zwischen  $Q$  und der variablen Spiegeldifferenz  $z$  der Flüssigkeitssäulen  $A$ ,  $B$  und  $C$  beiderseits des Kapillarrohres  $K$  lautet, wenn der konstante Radius des Gefäßquerschnittes  $r_1$  genannt wird,

$$Q = \frac{h_0 - z}{2} \cdot \pi r_1^2.$$

Setzt man das daraus sich ergebende Differential

$$dQ = -\frac{1}{2} dz \pi r_1^2$$

<sup>1)</sup> Vgl. K. R. Koch, Wied. Ann. 14, 1 (1881); weitere Einzelheiten über Viskosimeter finden sich in E. Hatschek, Die Viskosität der Flüssigkeiten, Dresden und Leipzig 1929, S. 24f.

in die Gleichung (1a) ein und integriert zwischen den Grenzen  $z = h_0$  und  $z = h_1$ , so ergibt sich

$$\lg \frac{h_0}{h_1} r_1^2 = \frac{\gamma r_0^4 \cdot T}{4 \mu l} ; \quad r_1^2 = \frac{\gamma r_0^4 T}{4 \mu l \lg \frac{h_0}{h_1}}$$

Setzt man diesen Wert für  $r_1^2$  in den Ausdruck für die gesamte beförderte Flüssigkeitsmenge

$$Q = \frac{h_0 - h_1}{2} \pi r_1^2$$

ein, so erhält man folgenden Ausdruck für die Zähigkeit

$$(2) \quad \mu = \frac{\pi r_0^4 (h_0 - h_1) \gamma \cdot T}{8 Q l \lg \frac{h_0}{h_1}}$$

Diese Grundformel kann für sehr verschiedene Instrumente zur Zähigkeitsbestimmung angewendet werden. Wir erwähnen hier einen von Wo. Ostwald und R. Auerbach konstruierten Apparat<sup>1)</sup>, der zur Untersuchung kolloider Lösungen verwendet worden ist. Hier ist die Kapillare  $K$  mit dem weiteren Gefäß  $B$  verbunden, und da die Flüssigkeit vom oberen Ende von  $B$  in den Trichter  $C$  läuft, so ist der Spiegel in  $B$  konstant, und die Höhen  $h_0$  und  $h_1$  können von hier aus gerechnet werden.

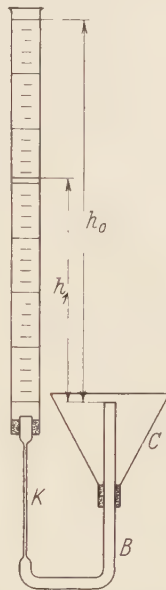


Abb. 20. Viskosimeter von Wo. Ostwald u. R. Auerbach.

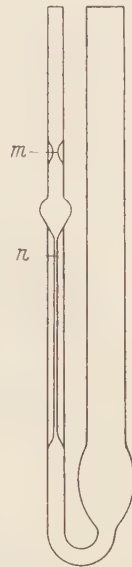


Abb. 21. Ostwald-Viskosimeter.

Da gegenwärtig die Reibungskoeffizienten vieler Flüssigkeiten bekannt sind, so genügt es, statt der absoluten die relative Viskosität, d. h. das Verhältnis der entsprechenden Koeffizienten zweier Flüssigkeiten (von denen derjenige der einen bekannt ist), zu bestimmen. Ein diesem Zweck dienendes Instrument ist das von Wilh. Ostwald angegebene „Ostwald-Viskosimeter“, das in der Abb. 21 skizziert ist. Ein konstantes, in den rechten Schenkel des Gefäßes unterhalb der Kapillare eingefülltes Flüssigkeitsvolumen wird über die Marke  $m$  hinaufgesaugt, und mittels Stoppuhr die Zeit gemessen, die es braucht, um von  $m$  bis  $n$  zurückzufließen.

<sup>1)</sup> W. Ostwald und R. Auerbach, Koll. Zeitschr. 41, 56 (1927).

Bei Annahme einer konstanten Druckhöhe  $h$  hat man dann, wenn man die Konstanten der Formel zusammenfaßt,

$$\mu = C \rho T,$$

mithin für die Reibung einer anderen Flüssigkeit, mit der derselbe Versuch durchgeführt wird,

$$(3) \quad \mu' = \mu \frac{\rho' T}{\rho T}.$$

In Wirklichkeit ist selbst bei konstant gehaltenem Volumen die wirksame mittlere Flüssigkeitssäule bei verschiedenen Flüssigkeiten verschieden infolge der verschiedenen Oberflächenspannung (vgl. § 18).

Um den hydrostatischen Druck bei den beiden Marken  $m$  und  $n$  zu bestimmen, hat man von dem Niveauunterschied zwischen  $m$  und  $n$  die kapillaren Steighöhen zu subtrahieren, die den Durchmessern an beiden Marken entsprechen, d. h. einen Betrag, der der Oberflächenspannung der betreffenden Flüssigkeit proportional ist.

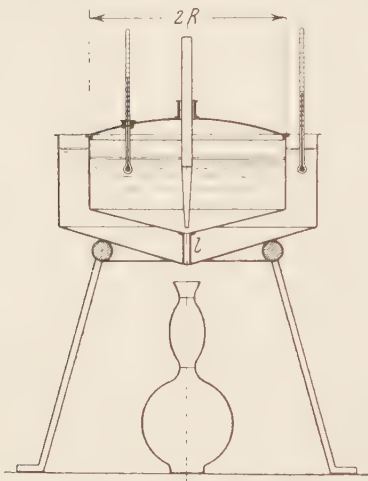


Abb. 22. Englers Viskosimeter.

2. Für technische Zwecke, namentlich um die Zähigkeit von Schmiermitteln zu bestimmen, verwendet man unter anderem namentlich in Deutschland das Englersche Viskosimeter, das im wesentlichen besteht aus einem größeren Gefäß mit dem Durchmesser  $2R$  und aus einem an

der Mitte des kugelförmigen Bodens befestigten kapillaren Ausflußröhrchen vom Durchmesser  $2r_0$  und der Länge  $l$ , das durch einen Hahn oder besser einen Holzstab abgeschlossen werden kann. Um den Zusammenhang zwischen der Ausflußzeit  $T$  (der Zeit, welche vergeht, bis eine bestimmte, ablesbare Flüssigkeitsmenge ausgeflossen ist) und der Zähigkeit  $\nu$  zu finden<sup>1)</sup>, kann man die Reibungsverluste in dem größeren Gefäß gegenüber der Reibung im Ausflußrohr vernachlässigen. Dieser Reibung entspricht die Verlusthöhe

$$(4) \quad h_w = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8\mu\nu}{\gamma r_0^2} l.$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, I. Teil, Leipzig 1914, S. 184; ferner R. v. Mises, Physik. Zeitschr. Bd. 10, 1911, S. 812.



Man hat daher nach Bernoulli, wenn das Quadrat der Sinkgeschwindigkeit im größeren Gefäß vernachlässigt und die variable Spiegelhöhe über der unteren Öffnung  $z$  genannt wird,

$$\frac{v^2}{2g} = z - \frac{8\mu\nu l}{\gamma r_0^2},$$

woraus mit  $k = \frac{gr_0^4}{32\nu^2 l^2}$  und der Durchflußgleichung

$$-\pi R^2 \frac{dz}{dt} = \pi r_0^2 \cdot v$$

sich ergibt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{8\nu l}{R^2} [1 - \sqrt{1+kz}]; \quad dt = \frac{R^2}{8\nu l} \frac{dz}{(1 - \sqrt{1+kz})}.$$

Wenn man  $1+kz = x^2$  setzt, und zwischen den Grenzen  $z=h_0$  ( $x=x_0$ ),  $z=h_1$  ( $x=x_1$ ) integriert, so erhält man die Ausflußzeit

$$(5) \quad T = \frac{8\nu l R^2}{gr_0^4} \left[ x_0 - x_1 + \log \frac{x_0 - 1}{x_1 - 1} \right].$$

Das Engler-Gefäß pflegt in ganz bestimmten Abmessungen hergestellt zu werden. Diese sind  $2R=10,6$  cm,  $2r_0=0,29$  cm,  $h_0=5,2$  cm,  $h_1=2,93$  cm ( $Q=200$  cm<sup>3</sup>). Wenn man ferner die Zeit  $T_0$  für den entsprechenden Versuch mit Wasser von  $20^\circ$  ( $T_0=51,6$  sec) bestimmt, so pflegt man das Verhältnis

$$(6) \quad E = \frac{T}{T_0}$$

als Anzahl der Engler-Grade der Flüssigkeit zu bezeichnen. Mit Einführung von  $E$  ergibt sich durch angenäherte Auflösung der Gleichung (5) nach v. Mises die Beziehung

$$(7) \quad \nu = 0,0864 E - \frac{0,08}{E},$$

die von Ubbelohde durch die mit den Versuchen besser übereinstimmende Formel

$$(7a) \quad \nu = 0,0732 E - \frac{0,0631}{E}$$

ersetzt worden ist. Allgemein hat W. H. Herschel nachgewiesen, daß die Zähigkeit als Funktion der mit den Normalinstrumenten gefundenen Auslaufszeit  $T$  in der Form

$$(8) \quad \nu = AT - \frac{B}{T}$$

darstellbar ist, wo  $A$  und  $B$  Apparatkonstanten darstellen, die durch Messung der Auslaufszeit geeigneter Normalflüssigkeiten gefunden werden können. Die entsprechenden Tabellen zur Umrechnung der mit den verschiedenen deutschen, englischen und amerikanischen Normal-

apparaten gefundenen Zahlen finden sich in dem für alles Versuchs-technische maßgebenden auf S. 62 zitierten Werke von Hatschek.

Tabelle für einige Zähigkeitszahlen.

Substanz	Temp. [°C]	$\nu$ [cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
Quecksilber	0	0,00125
	20	0,00117
Benzol	20	0,00731
	60	0,00466
Wasser	0	0,0178
	10	0,013
	20	0,0101
Luft (Normaldruck)	0	0,133
	20	0,149
Maschinenöl (Deutz)	10	7,34
	20	3,82
Glyzerin	3	33,40
	20	6,80

3. Bei allen Versuchen der geschilderten Art ist auf die Tatsache Rücksicht zu nehmen, daß sowohl der Reibungskoeffizient als auch die Zähigkeit große Empfindlichkeit gegenüber einer Temperaturänderung zeigen (siehe Tabelle). Jede Messung muß sich daher gleichzeitig auf die Temperatur beziehen, die nach Möglichkeit während des Versuches konstant zu halten ist. Für die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur ( $\vartheta$  °C) existieren verschiedene empirische Formeln, von denen nur einige namhaft gemacht werden sollen. So gilt nach Poiseuille für Wasser von 0°—100° die Beziehung

$$(9) \quad \nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337 \vartheta + 0,00022 \vartheta^2}$$

Aus teilweise theoretischen Erwägungen hat Graetz die Formel

$$(10) \quad \mu = A \frac{\vartheta_c - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_1}$$

angegeben, welche die kritischen Konstanten der Flüssigkeit enthält (kritische Temperatur  $\vartheta_c$  und eine tief unter dem Gefrierpunkt liegende, praktisch konstante Temperatur  $\vartheta_1$ ), und die für eine größere Anzahl von Flüssigkeiten gültig bleibt.

Eine weitere, eine große Reihe von Flüssigkeiten umfassende Formel von K. F. Glotte

$$(11) \quad \mu = \frac{C}{(\vartheta + a)^n}$$

ist von Thorpe und Rodger auf alle Messungen angewendet worden. Wir haben für einige Flüssigkeiten die entsprechenden Konstanten zusammengestellt.

	C	a	n
Wasser (5,47° bis Siedepunkt)	5,9848	43,252	1,5423
Pentan . . . . .	19,459	165,59	1,7285
Chloroform . . . . .	40,4244	158,33	1,8196
Äthyläther . . . . .	3,8307	136,38	1,4644
Äthylalkohol . . . . .	251908000	209,63	4,3731

Durch Entwicklung der Formel haben ferner Thorpe und Rodger für  $\mu$  die Darstellungsform abgeleitet

$$(12) \quad \mu = \frac{C}{1 + \alpha \vartheta + \beta \vartheta^2}$$

Die Größenordnung des Gesamtfehlers der nach dieser Formel berechneten Werte wird auf 0,02% geschätzt. Thorpe und Rodger haben dabei die Hagenbachsche Korrektur mit dem Zahlenfaktor  $m=2$  angebracht. Setzt man  $m=1,12$ , so würden die entsprechenden Korrekturen 3,36 : 4,48 betragen. Der Unterschied des Wertes von  $m$  bedingt daher einen möglichen Fehler von 0,36 : 0,48%, der bereits die dritte Dezimalstelle beeinflussen kann.

In bezug auf weitere Formeln, ferner die Zusammenhänge zwischen den Resultaten und den Viskositätskoeffizienten einerseits und dem Temperaturkoeffizienten derselben und dem Ausdehnungskoeffizienten andererseits, die sich aus dem Zahlenmaterial ableiten lassen, möge wieder auf das Buch von E. Hatschek verwiesen werden.

### § 20. Strömung in Röhren mit nicht-kreisförmigen Querschnittsformen.

Die in § 17 angegebene Grundgleichung für die gleichmäßige laminare Strömung in zylindrischen Röhren

$$(I) \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{P}{\mu l} = -C$$

stimmt formal überein mit der Differentialgleichung der Spannungsfunktion eines verdrehten zylindrischen Stabes oder der Stromfunktion

einer idealen Flüssigkeit, deren zylindrische Begrenzung einer gleichmäßigen Drehung um eine zur Erzeugenden parallele Achse unterworfen ist. Im ersten Falle hat man die Konstante  $C$  durch  $2 \cdot G \cdot q$  zu ersetzen, wo  $q$  den auf die Längeneinheit bezogenen Torsionswinkel und  $G$  den Schubmodul bedeuten, im zweiten Falle tritt an die Stelle von  $C$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, deren entgegengesetzter Wert gleichzeitig die konstante, in der Flüssigkeit herrschende Wirbelstärke darstellt. Bei derselben Grenzkurve sind die Kurven gleicher Stromgeschwindigkeit im vorliegenden Falle gleichbedeutend mit dem System der Spannungslinien bzw. der Stromlinien in den Vergleichsfällen. Alle drei Felder lassen sich ferner durch das Prandtlsche Gleichnis veranschaulichen, das gleichzeitig eine gewisse experimentelle Lösung der Gleichung (1) liefert. Denkt man sich nämlich aus einem ebenen horizontalen Blech die vorgegebene Querschnittsform herausgeschnitten und die Öffnung durch eine Seifenhaut überspannt, so wird die Haut bei einem Drucküberschuß auf der einen Seite die Gestalt einer krummen Fläche annehmen, und es läßt sich zeigen, daß die Kurven gleicher Höhe auf dieser Fläche (dem „Spannungshügel“) zugleich die Spannungslinien bzw. Stromlinien des Querschnittes<sup>1)</sup> angeben. Wenn  $S$  die Hautspannung und  $P$  den Überdruck bedeuten, so genügt die Ausbiegung  $\zeta$  der Haut der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\frac{P}{S}.$$

Wir wollten diese Zusammenhänge nicht unerwähnt lassen, weil besonders für den Torsionszustand für eine große Zahl von Fällen Lösungen<sup>2)</sup> vorliegen, die ohne weiteres auf den gegebenen Fall der Reibungsströmung übertragen werden können.

1. Elliptischer Querschnitt. Wenn der elliptische Querschnitt der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entspricht, so haben wir eine der Gleichung (1) genügende Geschwindigkeitsfunktion  $v(x, y)$  zu bestimmen, die für jeden Punkt dieser Ellipse verschwindet. Setzen wir

$$v = c \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, II. Teil, München u. Berlin 1920, S. 88.

<sup>2)</sup> Vgl. die Übersicht von Th. Pöschl, Bisherige Lösungen des Torsionsproblems, Zeitschr. für ang. Math. u. Mech., I. Bd. 1921, S. 312–328.

so ergibt sich

$$(2) \quad c = \frac{P}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \text{ also } v = \frac{P}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Die Durchflußmenge wird, wenn die linke Seite der Ellipsengleichung mit  $\lambda$  bezeichnet wird,

$$(3) \quad Q = \frac{P\pi a^3 b^3}{2\mu l(a^2 + b^2)} \int_0^1 (1 - \lambda) d\lambda = \frac{P\pi}{4\mu l} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}.$$

Die Kurven gleicher Geschwindigkeit sind zur Grundellipse ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, die man erhält, wenn man den Parameter  $\lambda$  die Werte von 0 bis 1 durchlaufen läßt. Wie beim Kreisrohr ergibt sich, daß die mittlere Geschwindigkeit  $v_m = \frac{Q}{\pi ab}$  halb so groß ist wie die axiale größte Geschwindigkeit. Hält man die Querschnittsfläche konstant und verändert das Achsenverhältnis, so ergibt sich, daß dem Kreisrohr die maximale Durchflußmenge entspricht. Weiter sieht man, daß die mittlere Schubspannung am Rande beim elliptischen Rohr kleiner wird als die Randspannung für das Kreisrohr<sup>1)</sup>.

2. Dreieckiger Querschnitt. Wenn der Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $s$  ist, so verlegen wir den Anfangspunkt in den Schwerpunkt und lassen die eine Höhe in die  $y$ -Achse fallen. Setzt man dann

$$v = a(2\sqrt{3}x - s)(x\sqrt{3} - 3y + s)(x\sqrt{3} + 3y + s),$$

so ist die Randbedingung erfüllt. Es ergibt sich ferner

$$\Delta v = 36sa = -\frac{P}{\mu l};$$

$v(x, y)$  ist also eine Funktion, die der Differentialgleichung genügt, wenn wir setzen

$$a = -\frac{P}{36s\mu l}.$$

Daher ist der endgültige Ausdruck

$$(4) \quad v = \frac{P}{36\mu sl} (s^3 + 18\sqrt{3}xy^2 - 6\sqrt{3}x^3 - 9x^2s - 9sy^2).$$

Für die axiale Geschwindigkeit in  $x=y=0$  findet man

$$v_0 = \frac{Ps^2}{36\mu l}.$$

Die Kurven gleicher Geschwindigkeit können in der Form

$$y^2 = \frac{c + 6\sqrt{3}x^3 - 9x^2s - s^3}{18\sqrt{3}x - 9s}$$

<sup>1)</sup> Vgl. auch I. Boussinesq, Journal de Liouville, t. XIII, 1868, S. 377.



dargestellt werden. Die Durchflußmenge und mittlere Geschwindigkeit erhält man ohne weiteres aus dem Verdrehungsmoment des entsprechenden Torsionsproblems zu

$$Q = \frac{Ps^4\sqrt{3}}{320\mu l} \quad \text{bzw.} \quad v_m = \frac{Ps^2}{80\mu l}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit verhält sich also zu der Geschwindigkeit in der Mitte des Dreiecks wie 9 : 20.

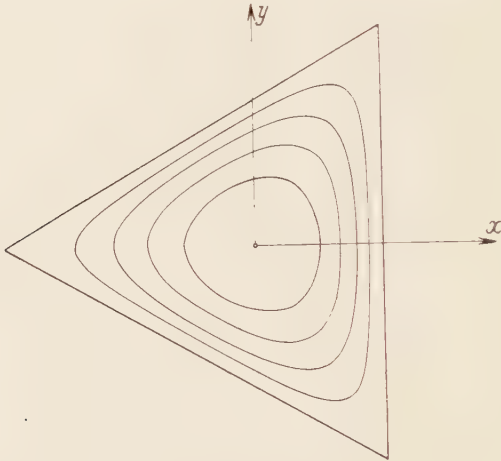


Abb. 23. Theoretisch-laminares Isotachensystem für einen Kanal von dreieckigem Querschnitt.

3. Rechteckiger Querschnitt. Die Geschwindigkeitsverteilung für den rechteckigen Querschnitt ist ohne weiteres der bekannten Saint-Venantschen Darstellung für das entsprechende Torsionsfeld zu entnehmen. Wenn die Rechteckseiten zum Achsenkreuz die Lage haben  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ , wobei  $a > b$  vorausgesetzt wird, so ergibt sich

$$v = \frac{P}{\mu l} \left\{ \frac{1}{2}y^2 + \frac{16b^2}{\pi^2} \left[ \cos \frac{\pi y}{2b} \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{I} \frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{C}o\mathfrak{I} \frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi y}{2b} \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{I} \frac{3\pi x}{2b}}{\mathfrak{C}o\mathfrak{I} \frac{3\pi a}{2b}} + \dots \right] \right\}.$$

Für die Durchflußmenge hat man

$$Q = \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} v \, dx \, dy = \frac{Pab^3}{4\mu l} \left\{ \frac{16}{3} - \frac{1024b}{\pi^5 a} \left[ \mathfrak{I}g \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^3} \mathfrak{I}g \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right] \right\},$$

also die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{Pb^2}{16\mu l} \left\{ \frac{16}{3} - \frac{1024b}{\pi^5 a} \left[ \mathfrak{I}g \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^3} \mathfrak{I}g \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right] \right\} = \frac{Pb^2}{16\mu l} \epsilon_2 \left( \frac{a}{b} \right).$$

Die für den Durchfluß maßgebende Funktion  $\epsilon_2\left(\frac{a}{b}\right)$  des Achsenverhältnisses steigt, wie die beigegebene Tabelle zeigt, vom Werte 2,25

$\frac{a}{b}$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	100	$\infty$
$\epsilon_2$	2,253	3,664	4,203	4,498	4,665	4,777	4,842	4,916	5,000	5,059	5,299	5,333

für  $\frac{a}{b} = 1$  (d. h. den quadratischen Querschnitt) erst schneller, dann mit asymptotischer Annäherung bis zum Werte 5,33 für  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$  (d. h. den unendlich langen rechteckigen Querschnitt). Für das Quadrat ergibt sich z. B. der Wert

$$v_m = \frac{P \cdot F}{28,4 \mu l}$$

Man sieht also, daß die mittleren Geschwindigkeiten für die drei regulären Querschnittsformen des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrats und des Kreises bei gleichbleibender Querschnittsfläche und Rohrlänge und gleichem Druck sich verhalten wie die Zahlen

$$\frac{1}{34,6} : \frac{1}{28,4} : \frac{1}{25,1}$$

Auch für den Kreissektor, den Kreisringsektor und andere Querschnittsformen läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung und die Durchflußmenge in Form von unendlichen Reihen darstellen, worüber man in den Arbeiten über das Torsionsproblem das Nähere nachlesen möge<sup>1)</sup>.

## § 21. Empirische Gesetze für die turbulente Rohrströmung.

Die in den vorigen Abschnitten besprochenen Gesetze verlieren ihre Gültigkeit, sobald die (mittlere) Geschwindigkeit der Strömung durch ein zylindrisches Rohr einen gewissen von der inneren Reibung und den Abmessungen des Querschnittes abhängigen Wert überschreitet. Wenn man für ein Kreisrohr als Reynoldssche Zahl

$$\Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

annimmt, wo  $v$  die mittlere Geschwindigkeit und  $d$  den Durchmesser bedeuten, so liegt der kritische Wert der Reynoldsschen Zahl zwischen 2000 und 2300. Physikalisch ist der nach Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit eintretende Zustand dadurch charakterisiert, daß die

<sup>1)</sup> Eine ausführliche Literaturangabe findet sich in der bereits zitierten Arbeit von Th. Pöschl, sowie im Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper, S. 143ff. Berlin 1928.

Flüssigkeitsteilchen im Rohr nicht mehr in geradlinigen oder angenähert geradlinigen Bahnen, d. h. „laminar“ sich bewegen, sondern in scheinbar unregelmäßiger Weise durcheinander wirbeln, so daß ein Teilchen alle möglichen Lagen im Querschnitt annehmen kann. Dieser zeitlich veränderliche Zustand wird als Turbulenz bezeichnet. Seine Unterscheidung vom laminaren Zustand, wie ihn Poiseuille in erster Linie betrachtet, ist zum ersten Male von O. Reynolds<sup>1)</sup> (1883) ausgesprochen worden. Er beobachtete, daß ein in die Rohrströmung eintretender dünner Farbfaden im laminaren Falle bei seiner Bewegung durch das Rohr im wesentlichen erhalten bleibt, während er sich im turbulenten Falle auflöst und ausbreitet. Wenn man ferner ein erwärmtes Rohr benutzt und die Temperatur feststellt, so zeigt sich der Eintritt der Turbulenz auch in einer bedeutenden Steigerung der Wärmeleitung.

Neuerdings hat L. Schiller<sup>2)</sup> nach dem Muster der klassischen Versuchsanordnung von Reynolds, d. h. mit Hilfe von Farbfäden, das Strömungsbild der Rohrströmung in den ersten Stadien der Turbulenzbildung, insbesondere in der Nähe des „scharfen“ oder ringförmig abgedeckten Einlaufes näher festzulegen gesucht. Aus den Versuchen scheint hervorzugehen, daß die kritische Zahl wesentlich durch den Einlauf charakterisiert wird. Bei  $R < R_k$  bildet sich, von der Eintrittskante ausgehend, eine Unstetigkeitsfläche, die weiterhin in leichtem Bogen sich der Wand nähert und in der Nähe der stärksten Kontraktion in eine regelmäßige Folge von kleinen Wirbeln sich auflöst. Bei der kritischen Zahl rollt sich diese Diskontinuitätsfläche am Einlauf zu größeren Wirbeln zusammen, die dann in die Strömung gehen. Weiterhin sollte die Frage versuchsmäßig entschieden werden, ob die kritische Zahl zu charakterisieren ist durch eine Beziehung zwischen der im laminaren Profil enthaltenen Wirbelung und der vom Einlauf her in die Strömung getragenen Wirbelung. Nach dem vorläufigen Bericht scheint für eine solche Beziehung eine gute Bestätigung gefunden zu sein.

Da die turbulente Strömung selbst wesentlich instationär ist, so können sich die Messungen an einem Orte nur auf zeitliche Mittelwerte beziehen. Es ergibt sich dann auf Grund eingehender Versuche, daß z. B. das Druckgefälle nicht mehr der durchschnittlichen Stromgeschwindigkeit selbst, sondern einer Potenz dieser Geschwindigkeit, ferner etwa dem Rohrradius in einer von der ersten nicht sehr verschiedenen

<sup>1)</sup> O. Reynolds, Philos. Trans., A, 174, 935 (1883); 177 (1886).

<sup>2)</sup> Vgl. L. Schiller, Strömungsbilder zur Entstehung der turbulenten Rohrströmung. Verhandl. III. Intern. Kongreß für techn. Mechanik, Stockholm 1930; ferner A. Naumann, Dissert. Leipzig 1931.

Potenz umgekehrt proportional wird. Wenn man den Druckabfall auf den Staudruck bezieht, so läßt sich nach Blasius die Abhängigkeit von Geschwindigkeit, Radius und Zähigkeit durch die Formel darstellen

$$(1) \quad \frac{P}{l} = \lambda \cdot \frac{1}{2} \rho \frac{v^3}{d}.$$

Im laminaren Gebiet ist  $\lambda = \frac{64}{\Re}$ , im turbulenten Gebiet etwa bis zu Reynoldsschen Zahlen  $\Re \infty 2 \cdot 10^5$

$$\lambda = 0,3164 \Re^{-\frac{1}{4}}$$

zu setzen. Einsetzung dieses Wertes ergibt

$$(2) \quad \frac{P}{l} = 0,316 \cdot \frac{1}{2} \rho \frac{v^{\frac{7}{4}} \cdot \nu^{\frac{1}{4}}}{d^{\frac{5}{4}}}.$$

Der Druckabfall erweist sich also im turbulenten Gebiet (für  $\Re < 2 \cdot 10^5$ ) als der 7/4-Potenz der Geschwindigkeit und der 5/4-Potenz des Rohrdurchmessers umgekehrt proportional.

Es ist der Theorie bisher nicht gelungen, diese oder ähnliche Gesetzmäßigkeiten zu rechtfertigen, und das wird einigermaßen verständlich, wenn man die besonderen Verhältnisse der Turbulenz in Rücksicht zieht, bei deren Erforschung ganz andere und vor allem nicht geometrische Methoden in Anwendung kommen müssen. Man kann aber an Hand einfacher Dimensionsbetrachtungen<sup>1)</sup> aus der Blasiuschen Grundformel ein ideales Geschwindigkeitsgesetz herleiten, dem die wirkliche Geschwindigkeitsverteilung in dem besagten Bereich der Zahl  $\Re$  bei vollkommen glatten Wänden nahekommt.

Wir nehmen mit v. Kármán an, daß  $v$  sich in der Form

$$v = v_0 \varphi \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

darstellen läßt. Führt man dann die an der Wand übertragene Schubspannung  $\tau_0$  und den Abstand  $l = r_0 - r$  ein, so läßt sich für die turbulente Geschwindigkeit in Erweiterung der für den laminaren Fall gültigen Beziehung

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu r_0} (2r_0 \eta - \eta^2)$$

für kleine Werte von  $\eta$  eine Entwicklung von der Form ansetzen

$$v = f(\mu \varrho \tau_0 \eta) = f_1(\mu \varrho \tau_0) \eta^x + \dots$$

<sup>1)</sup> Vgl. Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung, Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 1, 1921, S. 237—241.

Beschränkt man sich auf das erste Glied der Reihe, setzt die Dimensionen links und rechts einander gleich und bedenkt, daß  $\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  und  $\nu$  die Dimensionen der Geschwindigkeit haben, so ergibt sich nach v. Kármán als einzig mögliche Darstellung

$$v = B \cdot \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{1+z}{2}} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^z.$$

Nun muß  $v$  der Durchflußmenge,  $\tau_0$  dagegen der  $\frac{7}{4}$ -Potenz dieser Menge proportional sein. Wir haben daher

$$\frac{1+z}{2} = \frac{4}{7}, \quad z = \frac{1}{7},$$

mithin als erstes Glied der Entwicklung für  $v$

$$(3) \quad v = B \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

Die Schubkraft an der Wand wird

$$(4) \quad \tau_0 = \left(\frac{1}{B^{\frac{7}{4}}}\right) \rho \nu^{\frac{4}{7}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{v^{\frac{7}{4}}}{\eta^{\frac{1}{4}}}\right),$$

wobei die Größe  $B$  eine für glatte Wände universelle Konstante bedeutet, die noch zu bestimmen ist.

Dem hiermit dargestellten, bereits von L. Prandtl angegebenen Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung kommen die außerordentlich genauen Versuche von F. E. Stanton<sup>1)</sup> sehr nahe (vgl. Abb. 24). Stan-

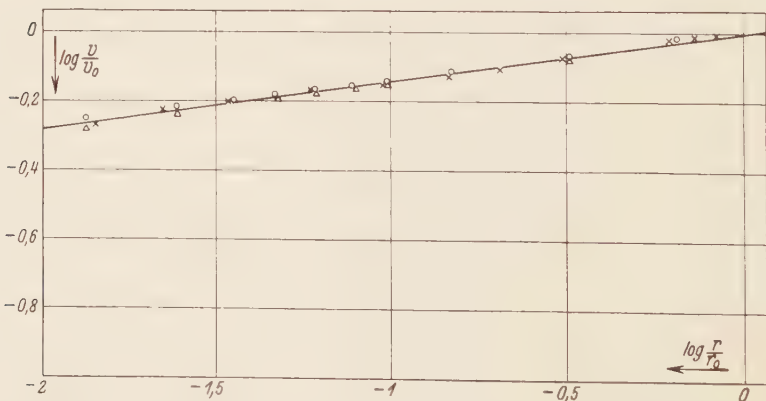


Abb. 24. Vergleich des Prandtl-Kármánschen Geschwindigkeitsgesetzes für ein Kreisrohr mit den Messungen von Stanton. (Nach v. Kármán.)

<sup>1)</sup> Proceedings of the Royal Society London, Bd. 25, 1911, S. 369.



ton benutzt zu seinen Messungen feine Pitot-Rohre von 0,3 mm Durchmesser, die in die Rohrwand eingelassen werden und Geschwindigkeiten in sehr kleiner Entfernung von der Wand zu bestimmen gestatten.

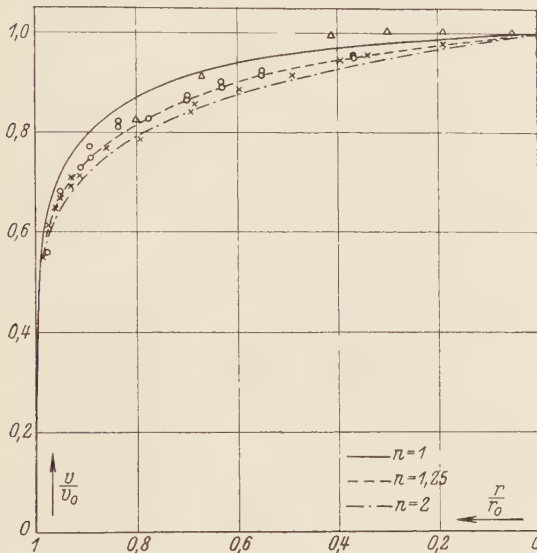


Abb. 25. Vergleich des erweiterten Potenzgesetzes für die Geschwindigkeitsverteilung am Kreisrohr mit einigen Meßresultaten. (Nach v. Kármán.)

Wenn wir nun, um die Konstante  $B$  zu bestimmen, das durch (3) angegebene Gesetz bis zur Mitte des Rohres fortsetzen und die größte Geschwindigkeit in der Mitte mit  $v_0$  bezeichnen, so erhalten wir

$$(5) \quad v = v_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{n}},$$

also für die Wandnähe mit der Abkürzung  $f = \frac{v_0}{r_0^{\frac{1}{n}}}$

$$v = f \cdot \eta^{\frac{1}{n}}.$$

Wenn man (3) benutzt und für  $\frac{dp}{dx}$  die Blasius'sche Formel anwendet, so kommt

$$B \left(\frac{f v_0}{8}\right)^{\frac{4}{n}} \cdot \nu^{-\frac{1}{n}} = v_0 r_0^{-\frac{1}{n}} = f.$$

Das Verhältnis der mittleren zur maximalen Geschwindigkeit beträgt nun nach dem Ansatz (5) 0,816; daher ergibt sich für  $B$

$$(6) \quad B = 2^{\frac{1}{n}} \left(\frac{8}{0,316}\right)^{\frac{4}{n}} \cdot 0,816 = 8,57.$$

Einen allgemeineren Wert erhält man, wenn man statt der Formel (6) die den Versuchsergebnissen (vgl. Abb. 25) besser angepaßte Formel

$$(7) \quad v = v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

mit  $n$  zwischen 1,25 und 2,00 zugrunde legt; alsdann wird  $B = 8,7$ , und man hat daher

$$v = 8,7 \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\eta}{\nu} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad r_0 = 0,0225 \rho \lim_{\eta=0} \left[ v^2 \left( \frac{\nu}{v r} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

oder mit Benutzung von (7)

$$(8) \quad r_0 = 0,0225 \rho \nu^{\frac{1}{n}} f^{\frac{n}{n-1}}$$

Auf Grund neuerer Versuche haben M. Jacob und S. Erk<sup>1)</sup> für das Gebiet der Reynoldsschen Zahlen  $\Re > 8 \cdot 10^4$  bis etwa  $\Re = 4 \cdot 10^5$  das Blasius'sche Gesetz durch die empirische Formel

$$(9a) \quad \lambda = 0,00714 + 0,6104 \cdot \Re^{-3,5}$$

ersetzt, während L. Schiller<sup>2)</sup> seine eigenen und verschiedene andere Versuche durch die den Bereich  $\Re = 2 \cdot 10^4$  bis  $2 \cdot 10^6$  umfassende Beziehung

$$(9b) \quad \lambda = 0,0054 + 0,396 \cdot \Re^{-0,3}$$

darstellt. Daraus ergeben sich dann auch für die Geschwindigkeitsverteilung höhere Potenzgesetze, die wir hier nicht besonders namhaft machen wollen.

2. Bei anderen Querschnittsformen muß man sich über die Einführung einer allgemeinen, für jede Profilform angebbaren Längenabmessung verständigen. Es erscheint zweckmäßig, den in der Hydraulik verwendeten Begriff des Profilradius bzw. hydraulischen Radius  $R$  heranzuziehen, der als Quotient der Querschnittsfläche und des benetzten Umfanges zu definieren ist:

$$R = \frac{F}{s}$$

Dieser Länge entsprechend führen wir die Reynoldssche Zahl

$$\Re_R = \frac{v \cdot R}{\nu}$$

ein, die beim Kreisquerschnitt dem vierten Teil der oben benutzten Zahl  $\frac{v d}{\nu} = \Re_d$  gleich ist. Es zeigt sich dann, daß der kritische Wert dieser Zahl  $\Re_R$  in erster Annäherung von der Querschnittsform unabhängig ist. Den Druckabfall pflegt man in die Form zu setzen

$$(10) \quad l = \psi \cdot \frac{\rho v^2}{2 R}$$

<sup>1)</sup> M. Jacob u. S. Erk, V. D. I. Forschungsarbeiten, H. 267, Berlin 1924.

<sup>2)</sup> L. Schiller, Ingen. Archiv 1, 392 (1930).

Durch Vergleich mit den früheren Formeln ergibt sich, daß für den Kreisquerschnitt  $R = \frac{d}{4}$  und der Koeffizient  $\psi = \frac{\lambda}{4}$  zu wählen ist. Für die Schubspannung längs der Wand haben wir die Gleichung

$$F(p_1 - p_2) = \tau_0 s dx,$$

also

$$(11) \quad \tau_0 = \frac{F}{s} \frac{p_1 - p_2}{dx} = R \cdot \frac{P}{l} = \psi \frac{\rho v^2}{2}.$$

Setzt man ferner entsprechend der Gleichung (8)

$$\tau = \frac{\tau_0}{\zeta} \cdot \rho v^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}},$$

wo  $\zeta$  eine dimensionslose Zahl bedeutet, so ergibt der Vergleich mit (11)

$$(12) \quad \psi = \frac{2\zeta}{\Re_R^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{f R^{\frac{1}{2}}}{v} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für das Kreisrohr haben wir, wenn wir  $\Re_R = \frac{\Re_d}{4}$  als Reynoldssche Zahl einführen und das Blasius'sche Gesetz verwenden,

$$(13) \quad \psi = \frac{\lambda}{4} = \frac{0,316}{4} \Re_d^{-\frac{1}{4}} = 0,0559 \Re_R^{-\frac{1}{4}}.$$

Die experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung sowie der Größen  $f$ ,  $\psi$  und  $\zeta$  für verschiedene Querschnittsformen ist u. a. von Sasvari<sup>1)</sup> und Nikuradse<sup>2)</sup> durchgeführt worden. Die Werte

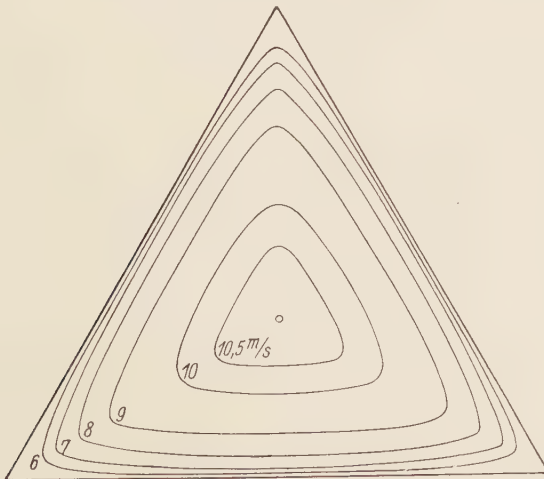


Abb. 26. Isotachen in einem Kanal von dreieckigem Querschnitt.  
(Nach Nikuradse.)

1) Z. f. d. ges. Turbinenwesen, Bd. 14, 1917, S. 21.

2) V. D. I. Forschungsarbeiten, H. 281.

des Koeffizienten  $\zeta$ , die sich aus dem gemessenen Druckgefälle und der Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand ergeben, unterscheiden sich nur wenig von dem für die Kreisform gefundenen Wert. Nikuradse fand z. B. für den rechteckigen und dreieckigen Querschnitt

$$\zeta_1 = 0,0249; \zeta_2 = 0,0241.$$

Im Bereich sehr großer Reynoldsscher Zahlen sind die Formel (11) und das Potenzgesetz entsprechend den früheren Aufstellungen zu modifizieren.

Das gleichfalls von Nikuradse festgestellte Isotachensystem, das in der Abb. 27 für ein gleichseitiges Dreieck dargestellt ist, zeigt gegenüber

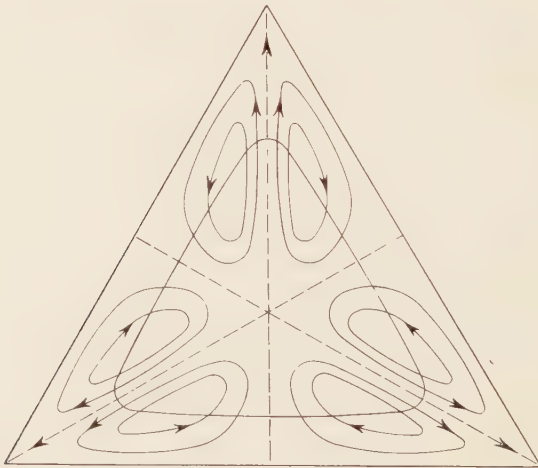


Abb. 27. Sekundärströmungen in einem dreieckigen Kanal.

dem laminaren Falle eine ziemlich deutliche Abweichung. Während sich hier die Kurven nach innen zu immer mehr abrunden und im Bereich der Ecken nur eine ziemlich geringe Bewegung herrscht, haben die Isotachen des turbulenten Falles eine eingebuchtete Gestalt und lassen auf eine Sekundärbewegung in der Ebene schließen, über die Prandtl<sup>1)</sup> bestimmte Angaben gemacht hat.

Ein besonderer Versuch hat gezeigt, daß die Flüssigkeit längs der Winkelhalbierenden in die Ecke hinein und zu beiden Seiten aus der Ecke herausströmt, also im ganzen eine Doppelwirbelbewegung ausführt. Durch diese Sekundärbewegung wird immer neuer Impuls in die Ecken hineingetragen, woraus sich die ungewöhnlich großen Geschwindigkeiten

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz. Verhandl. des II. Intern. Kongr. für techn. Mechanik, Zürich 1927, S. 70.

erklären. Ähnliche Bewegungen bilden sich an der freien Oberfläche von Gerinnen aus, die daher nicht als Querschnitt durch eine ebene Strömung angesehen werden kann. Wir werden in einer zusammenfassenden Darstellung der Turbulenztheorie auf diese und ähnliche Verhältnisse zurückkommen.

### § 22. Gas- und insbesondere Luftströmung in nicht-kapillaren Röhren.

Die Strömung von Luft folgt in nicht-kapillaren Kreisröhren im laminaren Gebiet einigermmaßen dem Poiseuilleschen Gesetz, wenn wir von den kleineren Abweichungen absehen. Auch das Verhalten im turbulenten Gebiet läßt sich jedenfalls in den mittleren Werten der Fördermenge und der Geschwindigkeitsverteilung verhältnismäßig einfach wiedergeben. Stellt man z. B. die Durchflußmengen  $Q$  in Abhängigkeit vom Druck für verschiedene Röhre dar (Abb. 28), so erhält man im laminaren Gebiet gerade Linien, die im Anfangspunkt beginnen und bis zum kritischen Punkt reichen. Steigert man die Geschwindigkeit über den kritischen Wert hinaus, so setzen sich die Förderkurven, mit dem kritischen Knick beginnend, mit schwächerer Neigung geradlinig weiter fort, und zwar so, daß sich die rückwärtigen Verlängerungen angenähert auf dem zu einem Wert  $Q_0$  gehörigen Punkt der  $Q$ -Achse schneiden<sup>1)</sup>.

Im turbulenten Gebiet ist also jedenfalls eine höhere Drucksteigerung erforderlich, um dieselbe Zunahme der Menge  $Q$  zu erreichen. Der Knick kann bei ruhigem Strom auch später, d. h. bei einer Geschwindigkeit eintreten, die größer ist als der kritische Wert

$$v_m' = \frac{1040 \cdot \mu}{r Q_0}.$$

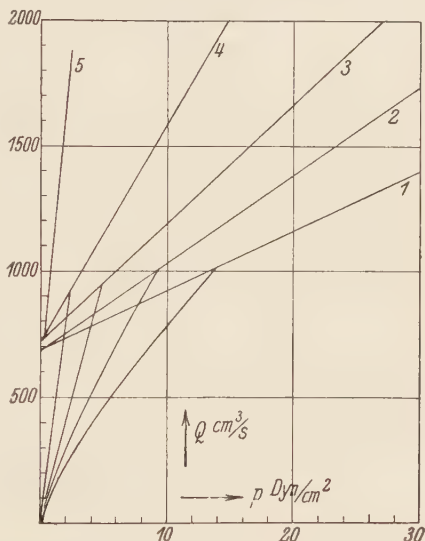


Abb. 28. Durchflußmenge der Luft in Abhängigkeit vom Druck für verschiedene Röhre 1 bis 5 mit den Radien 1,79; 1,49; 1,29; 0,76; 0,38 cm. (Nach K. W. F. Kohlrusch.)

<sup>1)</sup> Vgl. K. W. F. Kohlrusch, Über das Verhalten strömender Luft in nicht kapillaren Röhren. Ann. der Physik, Bd. 44, 1914, S. 297—320.



Jede im Luftstrom hervorgerufene Störung, z. B. durch Einführen eines dünnen Stäbchens, bewirkt dann aber ein Umschlagen in den turbulenten Zustand, während im turbulenten Gebiet die Störung ohne Wirkung bleibt.

Trägt man ferner die Geschwindigkeit für verschiedene Werte  $r$  desselben Rohres in Abhängigkeit vom Druck auf (vgl. Abb. 29), so wird auch in diesen Kurven der kritische Druck sich bemerkbar machen, und

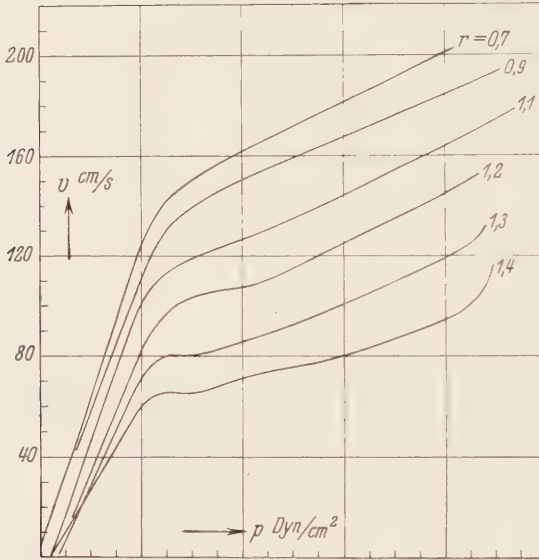


Abb. 29. Luftgeschwindigkeit in einem Kreisrohr vom Radius 1,79 cm in Abhängigkeit vom Druck. (Nach K. W. F. Kohlrusch.)

es zeigt sich ferner, daß die Geschwindigkeitslinien im turbulenten Gebiet, d. h. nach dem Knick, sich parallel fortsetzen, so daß wir nach Kohlrusch eine Gleichung von der Art

$$(2) \quad \frac{v - v_0}{p} = \text{const} = k_2 \frac{r_0^2}{\mu l}$$

ansetzen können, wo  $k_2$  eine Konstante bedeutet. Da im laminaren Gebiet die Geschwindigkeitsverteilung der Formel entspricht

$$(3) \quad v = \frac{2v_m}{r_0^2} (r_0^2 - r^2),$$

so können wir den Wert  $v_0$  erhalten, wenn wir in (3) die kritischen Werte  $v'$  und  $v'_m$  einsetzen. Dann ergibt sich, da der kritische Punkt auch (2) genügt,

$$v_0 = v' - \frac{k_2 r_0^2}{\mu l} p'$$

oder da der kritische Druck nach Poiseuille

$$p' = \frac{4\mu l v'}{r_0^2 - r^2}$$

ist,

$$v_0 = v' \left( 1 - \frac{4k_2 r_0^2}{r_0^2 - r^2} \right).$$

Es ergibt sich daher nach (2) für die Geschwindigkeit im turbulenten Gebiet der Ausdruck

$$v = v_0 + k_2 \frac{p r_0^2}{\mu l} = v' \left( 1 - \frac{4k_2 r_0^2}{r_0^2 - r^2} \right) + k_2 \frac{p r_0^2}{\mu l}.$$

Benutzt man (3), so kommt

$$v = 2v_m' \left( \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} - 4k_2 \right) + k_2 \frac{p r_0^2}{\mu l}.$$

Wenn man schließlich für die mittlere kritische Geschwindigkeit den Wert (1) einführt, so entsteht die Kohlrauschsche Formel

$$(4) \quad v = \frac{2\mu 1040}{r_0 \varrho} \left( \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} - 4k_2 \right) + k_2 \frac{p r_0^2}{\mu l}.$$

Daraus leitet sich dann der Ausdruck für die Menge  $Q$  ab

$$(5) \quad Q = \frac{\mu \pi r_0}{\varrho} \cdot 1040 (1 - 8k_2) + k_2 \frac{\pi r_0^4 p}{\mu l}.$$

Dadurch bestätigt sich die oben hervorgehobene Tatsache, daß sich alle  $Q$ -Kurven in einem Punkt  $Q=Q_0$ ,  $p=0$  schneiden. Der Versuch hat nun ergeben, daß

$$\frac{Q_0}{r_0} = 392 \text{ cm}^2/\text{s}$$

beträgt. Es ergibt sich daher mit

$$\mu = 185 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad \varrho = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$$

(745 mm Barometer und  $\vartheta=16^\circ \text{ C}$ )

$$1040 (1 - 8k_2) = 780 - k_2$$

$$k_2 = \frac{1}{32}.$$

Dabei wurde versuchsmäßig nur die Beziehung zum Druckgefälle und Radius bestimmt. Die angenetzte Abhängigkeit von Dichte und Reibungskonstante müßte erst durch Änderung der Temperatur bestätigt werden. Weitere Einzelheiten, insbesondere versuchstechnischer Art, mögen in der Kohlrauschschen Originalarbeit nachgelesen werden.

## FÜNFTES KAPITEL.

## Ebene Strömung mit geometrischem Potentialcharakter.

## § 23. Die allgemeinen Differentialgleichungen des Problems.

Wir haben zwei Fälle von Bewegungsformen der zähen Flüssigkeiten kennengelernt, die mit den Mitteln der Potentialtheorie behandelt werden können: die Strömung in dünnen Schichten und die von der axialen Verschiebung zylindrischer Flächen erzeugte Strömung. Man kann sich nun weiter mit Hamel<sup>1)</sup> die prinzipielle Frage stellen, ob es exakte Lösungen der Stokes'schen Gleichungen gibt, die, obwohl sie selbst keine Potentialbewegung darstellen, doch in der geometrischen Beschaffenheit der Stromlinien mit einer solchen übereinstimmen, während die Geschwindigkeitsverteilung, also die Aufeinanderfolge der Stromlinien, einem anderen Gesetze gehorcht. Hamel geht, um diese Frage zu entscheiden, von der bereits bekannten Differentialgleichung für die Stromfunktion  $\Psi$  einer stationären ebenen Bewegung einer zähen Flüssigkeit aus, nämlich

$$(1) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = \nu \Delta \Delta \Psi$$

und fragt nach Lösungen  $\Psi$ , die sich als Funktionen von  $\varphi$  darstellen lassen, wobei

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Psi \neq 0$$

sein soll. Setzen wir

$$\varphi + i\psi = f(x + iy) = f(z); \quad \frac{df}{dz} = v_1 - i v_2,$$

so können wir die Gleichung (1) zunächst auf die Koordinaten  $\varphi$  und  $\psi$  transformieren. Bezeichnen wir  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2}$  mit  $\Delta' \Psi$ , so ergibt sich zunächst, wenn man

$$\frac{df}{dz} \Big|^2 = v_1^2 + v_2^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = Q$$

setzt,

$$(2) \quad \Delta' \Psi = Q \cdot \Delta' \Psi.$$

<sup>1)</sup> G. Hamel, Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 25 (1917), S. 34—60.

Die linke Seite der Gleichung (1) wird daher

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} \\ &= \left( \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ & - \left( \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= Q \left[ \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} - \frac{\partial(Q \mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right] \\ &= Q^2 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} - \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{A}' \Psi \left( \frac{\partial \lg Q}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} - \frac{\partial \lg Q}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg Q}{\partial \varphi} &= 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \lg \left| \frac{df}{dz} \right| = 2R \frac{d}{df} \lg \frac{df}{dz} = 2R \left( \frac{d^2 f}{dz^2} \right), \\ \frac{\partial \lg Q}{\partial \psi} &= 2 \frac{\partial}{\partial \psi} \lg \left| \frac{df}{dz} \right| = -2J \left( \frac{d^2 f}{dz^2} \right), \end{aligned}$$

wenn mit  $R$  bzw.  $J$  der reelle bzw. der imaginäre Teil der Klammerfunktion bezeichnet wird. Setzen wir

$$\frac{2}{Q} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2} = a + ib,$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial(\mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} - \frac{\partial(\mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} = Q^2 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} - \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{A}' \Psi \left( a \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} + b \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Für die rechte Seite der Gleichung (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{A}' \Psi &= Q^2 \mathcal{A}' \mathcal{A}' \Psi + Q \mathcal{A}' Q \mathcal{A}' \Psi + 2Q \left( \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \psi} \frac{\partial Q}{\partial \psi} \right) \\ &= Q^2 \left[ \mathcal{A}' \mathcal{A}' \Psi + \mathcal{A}' \Psi \frac{\mathcal{A}' Q}{Q} + 2 \left( \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} a - \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \psi} b \right) \right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\mathcal{A}' \lg Q = 0, \quad \frac{\mathcal{A}' Q}{Q} = \left( \frac{\partial \lg Q}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lg Q}{\partial \psi} \right)^2 = a^2 + b^2.$$

Damit geht die Gleichung (1) über in

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} - \frac{\partial(\mathcal{A}' \mathcal{Y})}{\partial \psi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} + \mathcal{A}' \Psi \left( a \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \psi} + b \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi} \right) \\ &= \nu \left[ \mathcal{A}' \mathcal{A}' \Psi + \mathcal{A}' \Psi (a^2 + b^2) + 2 \left( \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \varphi} a - \frac{\partial \mathcal{A}' \mathcal{Y}}{\partial \psi} b \right) \right]. \end{aligned}$$

Wenn wir nun der anfangs gegebenen Bedingung entsprechend

$$\Psi = F(\varphi)$$

setzen, so gewinnen wir nach (2) für  $F$  die Differentialgleichung

$$(3) \quad F'' F' b = \nu \{ F^{IV} + F'' (a^2 + b^2) + 2a F''' \}.$$

Hamel hat nun den Beweis dafür erbracht, daß die komplexe Größe  $a+ib$ , die allgemein eine analytische Funktion von  $q+i\varphi$  ist, konstant sein muß. Dann ergibt sich aber aus

$$a+ib = 2 \frac{d^2 f}{|df|^2} = c; \quad f = -\frac{2}{a+ib} \lg(z-z_0) + f_0$$

oder mit

$$(4) \quad z - z_0 = r e^{i\vartheta} \\ \varphi = -\frac{2}{a^2+b^2} (a \lg r + b \vartheta) + \varphi_0.$$

Es folgt daraus, daß die Stromlinien  $q = \text{const}$  und  $\Psi = F(q)$  identisch sind mit der Schar der logarithmischen Spiralen; die Strömungen in logarithmischen Spiralen sind die einzigen, deren Strombild einer Potentialströmung entspricht. Die Geschwindigkeitsverteilung, die im allgemeinen von derjenigen der Potentialströmung verschieden ist, hängt von der Funktion  $F$  ab, und zwar haben wir für die radiale und tangentielle Komponente

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_r = \frac{\partial \Psi}{r \partial \vartheta} = F' \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = -\frac{2b}{a^2+b^2} \frac{1}{r} F', \\ v_\vartheta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -F' \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2a}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{r} F', \end{array} \right.$$

und für die Absolutgeschwindigkeit ergibt sich der Ausdruck

$$(5a) \quad v = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{1}{r} F'.$$

Die Größe der Geschwindigkeit im Abstände 1 von dem Quell- bzw. Senkenpunkt  $r=0$  ist demnach proportional der Ableitung von  $F$ . Die Bestimmung dieser Funktion  $u = F'$  soll im folgenden Paragraphen für einige bemerkenswerte Spezialfälle durchgeführt werden.

## § 24. Stationäre Quell- und Kreisströmung.

1. Wenn wir  $u = F'(\varphi)$  setzen, so haben wir für  $u$  nach einmaliger Integration der Gleichung (3) des § 23 die Differentialgleichung

$$(1) \quad u'' + 2a u' + (a^2 + b^2)u - \frac{b}{2r} u^2 + C = 0.$$

Wenn z. B.  $b=0$  wird, so sind die Stromlinien  $\varphi = \text{const} = -\frac{2}{a} \cdot \lg r$  Kreise um den Anfangspunkt. Dann ergibt sich als Lösung von (1)

$$(2) \quad u = -\frac{C}{a^2} + e^{-a\varphi} (A + B\varphi),$$



daher

$$F = -\frac{C}{a^2} \varphi - \frac{Aa+B}{a^2} e^{-a\varphi} - \frac{B}{a} \varphi e^{-a\varphi}$$

und wegen

$$(3) \quad \varphi = -\frac{2}{a} \lg r$$

$$(4) \quad \Psi = \left( \frac{2C}{a^2} + \frac{2B}{a^2} r^2 \right) \lg r - \frac{Aa+B}{a^2} r^2, \quad u = -\frac{C}{a^2} + r^2 \left( A - \frac{2B}{a} \lg r \right).$$

Da der Druck bei einer Kreisströmung zu seinem ursprünglichen Wert zurückkehren muß, so ist  $B=0$  zu setzen. Wir haben dann also

$$(5) \quad u = r^2 A - \frac{C}{a^2}, \quad v = \frac{2u}{ar}, \quad \Psi = \frac{2C}{a^3} \lg r - \frac{A}{a} r^2.$$

Die Konstanten können etwa dadurch bestimmt werden, daß man die Geschwindigkeit in zwei Abständen  $r=r_1$  und  $r=r_2$  festlegt. Wir werden später bei der Betrachtung der Rotation zweier Zylinder in der Flüssigkeit auf diesen Fall zurückkommen. Wenn beide Radien  $r_1$  und  $r_2$  unendlich groß werden, so entsteht der bereits in § 9 behandelte Fall einer Strömung zwischen zwei parallelen Ebenen, dem eine lineare Geschwindigkeitsverteilung entspricht.

2. Wenn andererseits  $a=0$  wird, so ist die Strömung rein radial, also entweder eine vom Punkt  $z=0$  ausgehende Quellströmung oder eine auf diesen Punkt gerichtete Senkenströmung. Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich in diesem Falle aus der Lösung der Differentialgleichung

$$(6) \quad u'' + b^2 u - \frac{b}{2\nu} u^2 + C = 0,$$

die auf elliptische Funktionen führt. Setzen wir nämlich  $u'' = \frac{1}{2} \frac{d u'^2}{du}$ , so ergibt sich nach einmaliger Integration

$$(7) \quad \begin{aligned} u' &= \sqrt{\frac{b}{3\nu} \left( u^3 - 3\nu b u^2 - \frac{6C\nu}{b} u - C' \right)} \\ u' &= \sqrt{-\frac{b}{3\nu} \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)}}. \end{aligned}$$

Da man noch über eine Beziehung zwischen  $a$  und  $b$  verfügen kann, setzen wir nach Hamel  $b=-2$ , mithin

$$\varphi = -\frac{2b}{b^2} \mathcal{F} = \mathcal{F};$$

dann erhalten wir

$$(7a) \quad u' = \sqrt{\frac{2}{3\nu} \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)}}$$

mit der Bedingungsgleichung

$$(8) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 3\nu b = -6\nu.$$

Um die Weierstrasssche Normalform zu erhalten, setzt man

$$u = \bar{u} + b\nu = \bar{u} - 2\nu, \quad \varphi = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = i\psi\sqrt[6]{6\nu}, \quad \psi = -\frac{i(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)}{\sqrt[6]{6\nu}};$$

dann wird

$$\frac{d\bar{u}}{d\psi} = i\sqrt{4(\bar{u} - \bar{e}_1)(\bar{u} - \bar{e}_2)(\bar{u} - \bar{e}_3)},$$

wobei die  $\bar{e}$  der Gleichung

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$$

genügen. Mit Einführung der Weierstrassschen  $\wp$ -Funktion kann man daher schreiben

$$(9) \quad u = -2\nu + \wp\left(\frac{i(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)}{\sqrt[6]{6\nu}}; g_2, g_3\right),$$

wobei  $\mathcal{P}_0, g_2, g_3$  Integrationskonstanten sind. Wenn wir  $u = F'$  setzen, so wird die Stromfunktion

$$(10) \quad \begin{aligned} \Psi = F(\varphi) &= -2\nu\varphi + \int \wp\left(\frac{i(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)}{\sqrt[6]{6\nu}}; g_2, g_3\right) d\mathcal{P} \\ &= -2\nu\mathcal{P} + i\sqrt[6]{6\nu}\zeta\left[\frac{i(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)}{\sqrt[6]{6\nu}}; g_2, g_3\right], \end{aligned}$$

wobei  $\zeta(z) = -\int p(z)dz$  die zu  $\wp$  gehörige Weierstrasssche  $\zeta$ -Funktion darstellt. Die Geschwindigkeit im Abstand  $r$  wird:

$$(11) \quad v = -\frac{2\nu}{r} + \frac{1}{r}\wp\left(\frac{i(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)}{\sqrt[6]{6\nu}}; g_2, g_3\right).$$

Statt der Funktionen mit imaginärem Argument kann man auch die auf ein reelles Argument übertragenen komplementären Funktionen  $\bar{\wp}, \bar{\zeta}$  einführen, die man erhält, wenn man das Vorzeichen von  $g_3$  ändert oder die Wurzeln  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  durch  $-\varepsilon_3, -\varepsilon_2, -\varepsilon_1$  ersetzt. Man hat dann die Beziehungen

$$\wp(ix) = -\wp(x); \quad \zeta(ix) = -i\bar{\zeta}(x),$$

und es wird z. B.

$$(9a) \quad u = -2\nu - \bar{\wp}\left(\frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{\sqrt[6]{6\nu}}\right).$$

Aus der Bedingungsgleichung für die  $e$  ergibt sich, daß mindestens ein  $e$  einen negativen reellen Bestandteil hat. Wenn wir eine Größenordnung der Realteile in der Weise vornehmen, daß

$$R(e_1) \cong R(e_2) \cong R(e_3),$$

so wird

$$R(e_3) \leq -2\nu,$$

wobei das Gleichheitszeichen sich auf den Fall bezieht, daß alle drei  $e$  denselben reellen Bestandteil haben.

Im folgenden werden wir uns insbesondere mit dem Falle der reinen Radialströmung beschäftigen.

### § 25. Die freie Quellströmung in der zähen Flüssigkeit.

Setzen wir eine freie Radialströmung ohne feste Wände voraus, d. h. eine ebene Strömung, die von einer im Anfangspunkt gelegenen Punktquelle oder Punktsenke erzeugt wird, so muß  $u$  eine periodische Funktion von  $\varphi$  sein mit der Periode  $2\pi$  oder  $\frac{2\pi}{n}$ , wo  $n$  eine ganze Zahl ist. Wenn  $u$  zwischen zwei endlichen Extremwerten liegt und  $u'$  reell sein soll, so können wir setzen

$$e_2 \leq u \leq e_1.$$

Für die Halbperiode haben wir dann

$$(1) \quad \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_2}^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1-u)(e_2-u)(e_3-u)}} = \frac{\pi}{n} \leq \pi.$$

Mit der Substitution

$$u = e_2 + (e_1 - e_2) \sin^2 \psi; \quad \kappa^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}$$

erhalten wir daraus

$$(1a) \quad \frac{2}{\sqrt{e_2 - e_3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{\frac{2}{3\nu}} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

Um die Geschwindigkeit abzuschätzen, führen wir die mittlere Geschwindigkeit  $u_m$  und die Geschwindigkeitschwankung  $\delta$  ein, setzen also

$$u_m = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \quad \delta = e_1 - e_2.$$

Dann wird wegen der Beziehung zwischen den  $e$

$$(2) \quad e_2 - e_3 = 6\nu + 3u_m - \frac{1}{2}\delta > 0.$$

Je kleiner also  $e_2$  wird bei festem Maximalwert  $e_1$ , desto kleiner fällt der Unterschied von  $e_2$  und  $e_3$  aus. Dieser Unterschied vermindert sich ferner mit abnehmendem  $e_1$ . Weiter haben wir

$$(1b) \quad \kappa^2 = \frac{\delta}{6\nu + 3u_m - \frac{1}{2}\delta}; \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{6\nu + 3u_m - \frac{1}{2}\delta}{6\nu}}.$$

Für das elliptische Integral können wir ferner die einfach zu gewinnende Ungleichung aufstellen

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + x^2 \sin^2 \psi}} > 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} x^2}}$$

Mit Einführung einer positiven Größe  $\varepsilon \leq 1$  können wir also setzen

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + x^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x^2}}$$

und erhalten damit aus (1a)

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{6\nu + 3u_m - \frac{1}{2}\delta(1-\varepsilon)}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{6\nu}}; \quad 6\nu + 3u_m - \frac{1}{2}\eta^2\delta = 6\nu \frac{n^2}{4},$$

wo  $\eta$  eine Zahl  $< 1$  bedeutet. Da ferner das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x d\psi}{\sqrt{1 + x^2 \sin^2 \psi}} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x d\psi}{\sqrt{1 + x^2 \psi^2}} = \text{Ar Sin } x \frac{\pi}{2}$$

mit wachsendem  $x$  beliebig groß wird, so wird

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \eta = 1.$$

Aus (3) ergibt sich aber die Ungleichung

$$u_m > -2\nu \left(1 - \frac{n^2}{4}\right).$$

Setzt man  $n=1$  als Kleinstwert von  $n$ , so wird der Mittelwert von  $u$

$$u_m > -\frac{3}{2}\nu.$$

Man sieht also, daß die Ausströmung und die Einströmung sich ganz verschieden verhalten. Während die mittlere Ausströmungsgeschwindigkeit unbeschränkt wachsen kann, wird die Einströmungsgeschwindigkeit erheblich und um so mehr eingeschränkt sein, je kleiner die Zähigkeit der Flüssigkeit ist. Es ergibt sich ferner aus der Ungleichung (1c), daß bei gegebenem  $n$  die Schwankung  $\delta$  mit  $u_m$ , bei gegebenem  $\delta$  die Zahl  $n$  mit  $u$  unbegrenzt wachsen muß.

## § 26. Radialströmung zwischen ebenen Wänden.

Wenn wir zwei feste Wände, etwa für  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \vartheta_1$  haben, so muß die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  an diesen Wänden gleich Null sein. Nehmen wir zunächst Ausströmung an, also  $0 < u \leq e_1$ ,  $R(e_2) \leq 0$ , so wird

$$(1) \quad \mathcal{J} = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u^2 - (e_2 + e_3)u + e_2 e_3)}}.$$

Es ergibt sich dann auf Grund der Beziehung zwischen den  $e$ , daß  $u^2 - (e_2 + e_3)u + e_2 e_3$  bei gegebenem  $e_1$  alle Werte von  $u^2 - (e_2 + e_3)u$  bis  $\infty$  annehmen kann, daß also

$$(2) \quad \mathcal{J}_1 = 2 \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u^2 - u(e_2 + e_3) + e_2 e_3)}} < 2 \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)u(u + e_1 + 6\nu)}} \\ = 2\pi \sqrt{\frac{3\nu}{2e_1(1 + \varepsilon) + 12\nu}} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

gilt wegen

$$\int_0^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)u}} = \pi.$$

Man sieht also, daß beim Ausströmen die Weite der Wandöffnung durch den Größtwert  $e_1$  der Geschwindigkeit beschränkt ist, und daß bei kleiner Geschwindigkeit und großer Zähigkeit das Maximum der Öffnung nahe bei  $\pi$  liegt und mit wachsendem  $e_1$  unter alle Grenzen sinkt.

Bei einer Winkelöffnung  $< \pi$  ist ein Ausströmen nur bis zu einem gewissen Maximalwert von  $e_1$  möglich. Wenn die Ausflußmenge diesen Grenzwert überschreitet, so wird wahrscheinlich ein Ablösen des Strahles von den Wänden stattfinden.

Eine ähnliche Diskussion, die allerdings andere Resultate ergibt, läßt sich für den Fall der radialen Einströmung ( $e_2 \leq u \leq 0$ ; alle  $e$  reell,  $e_2, e_3 < 0, e_1 > 0$ ) durchführen. Man hat dann

$$(3) \quad \mathcal{J}_1 = \sqrt{6\nu} \int_{e_2}^0 \frac{du}{\sqrt{(u - e_2)(-u^2 + (e_1 + e_3)u - e_1 e_3)}},$$

und es zeigt sich, daß bei maximaler Einströmungsgeschwindigkeit größer als  $3\nu$ , jede Winkelöffnung  $\vartheta_1$  möglich ist und daß auch bei einer größten Einströmungsgeschwindigkeit  $< 3\nu$  die Winkelöffnung jede Größe bis  $\pi$  erreichen kann.

Die weitere Diskussion, namentlich auch der erzwungenen Bewegung in logarithmischen Spiralen, die einige mathematische Schwierigkeiten bietet, möge in der zitierten Arbeit von Hamel nachgelesen werden. Eine Erweiterung der Hamelschen Überlegungen, die von Oseen<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> C. W. Oseen, Exakte Lösungen der hydrodynam. Differentialgleichungen, I, II. Arkiv f. Matem., Astr. och Fysik, (A) 20, 1927, Nr. 14, Nr. 22.



stammt, besteht darin, zur spiraligen Grundströmung eine normal gerichtete Zusatzströmung hinzuzuordnen, die entweder nach außen oder nach innen gerichtet ist. Die dadurch entstehenden, recht mannigfaltigen und komplizierten Strömungsformen haben aber, wie es scheint, nur eine geringe praktische Bedeutung.

## SECHSTES KAPITEL.

### Instationäre Bewegung der zähen Flüssigkeit.

#### § 27. Eindimensionale instationäre Flüssigkeitsbewegung.

Wir haben in § 9 die laminare Flüssigkeitsbewegung betrachtet, die erzeugt wird von einer ebenen Wand, die in ihrer Ebene mit einer konstanten Geschwindigkeit in der  $x$ -Richtung verschoben wird. Wenn die Bewegung nicht mehr gleichmäßig erfolgt, so wird auch die Flüssigkeitsbewegung instationär ausfallen, und die Geschwindigkeit  $v_x = v$  genügt dann unter der Annahme, daß der Druck konstant, also  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  wird, der Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Die Gleichung für  $v$  geht also in die Gleichung der eindimensionalen Wärmeströmung über, wenn man  $v$  durch die Temperatur  $\vartheta$  und  $\nu$  durch  $\frac{k}{c\rho}$  ersetzt, wobei  $k$  den Koeffizienten der Wärmeleitfähigkeit,  $c$  die spezifische Wärme und  $\rho$  die Dichte des Materials (des Stabes) bedeuten. Die für diesen Fall von Fourier u. a. gefundenen Lösungsmethoden können daher ohne weiteres auf den vorliegenden Fall der zähen Strömung übertragen werden.

I. Wenn z. B. die Ebene  $z = h$  sich mit einer dem Ansatz

$$u = u_0 e^{-\vartheta t}$$

entsprechenden abnehmenden Geschwindigkeit bewegt, so setzen wir

$$v = e^{-\vartheta t} f(z)$$

und finden für  $f(z)$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\vartheta}{\nu} f(z),$$

woraus

$$f(z) = a \cos z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} + b \sin z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}},$$

also für  $v$  der Ausdruck

$$(2) \quad v = e^{-\vartheta t} \left( a \cos z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} + b \sin z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \right)$$

folgt. Wenn eine feste Ebene im Abstand  $z=h$  gegeben ist, so findet man also

$$a = u_0, \quad b = -u_0 \operatorname{ctg} h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}},$$

mithin

$$(3) \quad v = \frac{u_0 \sin(h-z) \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}{\sin h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}} e^{-\vartheta t}.$$

Man sieht also jedenfalls, daß die verzögerte Bewegung der Ebene  $z=0$  sich derart auf die Flüssigkeit überträgt, daß die Geschwindigkeit bis zur festen Wand  $z=h$  nach einer Sinuskurve abnimmt. Die Reibungsspannung wird

$$(4) \quad \tau_{xz} = -u_0 \sqrt{\mu \vartheta \varrho} \frac{\cos(h-z) \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}{\sin h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}} e^{-\vartheta t}.$$

Für die bewegte und feste Ebene erhalten wir daher

$$(5) \quad (\tau_{xz})_{z=0} = -u_0 \sqrt{\mu \vartheta \varrho} \operatorname{ctg} h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} e^{-\vartheta t}; \quad (\tau_{xz})_{z=h} = u_0 \sqrt{\mu \vartheta \varrho} \frac{e^{-\vartheta t}}{\sin h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}.$$

Der Reibungswiderstand an der bewegten Ebene verschwindet also für

$$h = (n + \frac{1}{2}) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Man sieht ferner, daß die Reibung an der beweglichen Ebene beschleunigend bzw. verzögernd wirkt, je nachdem

$$(n + \frac{1}{2}) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} < h < (n + 1) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} \quad \text{oder} \quad n \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} < h < (n + \frac{1}{2}) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}}$$

ist, daß dagegen die Reibung an der festen Ebene, die übrigens niemals verschwinden kann, positiv oder negativ wird, je nachdem  $h$  den Intervallen

$$2n \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} < h < (2n + 1) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} \quad \text{oder} \quad (2n + 1) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}} < h < 2(n + 1) \pi \sqrt{\frac{\nu}{\vartheta}}$$

angehört.

2. Wenn dagegen die Geschwindigkeit der Ebene  $z=0$  nach dem Exponentialansatz

$$u = u_0 e^{\vartheta t}$$

zunimmt, so haben wir die allgemeine Lösung

$$(6) \quad v = e^{\vartheta t} \left( a \mathfrak{C}0 \left[ z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} + b \mathfrak{S}in z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \right] \right).$$

Die Bestimmung der Konstanten auf Grund der Grenzbedingungen führt dann zu dem Ausdruck

$$(6a) \quad v = u_0 e^{\vartheta t} \frac{\mathfrak{S}in(h-z) \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}{\mathfrak{S}in h \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}.$$

Wenn die Flüssigkeit im positiv-unendlichen Abstand von der bewegten Ebene  $z=0$  in Ruhe ist, so wird

$$(6b) \quad v_x = u_0 e^{\vartheta t} \left( \mathfrak{C}0 \left[ z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} - \mathfrak{S}in z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \right] \right) = u_0 e^{\vartheta t - z \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}}.$$

Die weitere Diskussion bietet keine Schwierigkeit.

3. Periodische Bewegung. Wenn die Geschwindigkeit  $u$  der Ebene  $z=0$  dem einfachen periodischen Gesetz folgt

$$u = u_0 \sin \vartheta t,$$

so wähle man

$$v = f(z) \sin \vartheta t + g(z) \cos \vartheta t.$$

Dann führt die Einsetzung in die fundamentale Differentialgleichung zu der Beziehung

$$\vartheta f \cos \vartheta t - g \vartheta \sin \vartheta t = \nu \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \sin \vartheta t + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \cos \vartheta t \right].$$

Wenn man hierin die Koeffizienten von  $\sin \vartheta t$  und  $\cos \vartheta t$  einzeln Null setzt, so ergibt sich, daß die Funktionen  $f$  und  $g$  dieselbe Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{d^4 f}{dz^4} + \frac{\vartheta^2}{\nu^2} f = 0$$

erfüllen. Die Lösung setzt sich also linear aus den vier partikulären Lösungen

$$f_{1,2} = e^{\pm(1+i)\beta z}, \quad f_{3,4} = e^{\pm(1-i)\beta z} \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{\frac{\vartheta}{2\nu}}$$

zusammen. Wenn wir trigonometrische Funktionen einführen, können wir setzen

$$\begin{aligned} f &= a_1 e^{\beta z} \cos(\beta z + \psi) + b_1 e^{-\beta z} \cos(\beta z + \varphi), \\ g &= -\frac{\nu}{\vartheta} \frac{d^2 f}{dz^2} = a_1 e^{\beta z} \sin(\beta z + \psi) - b_1 e^{-\beta z} \sin(\beta z + \varphi) \end{aligned}$$

und erhalten dann

$$(8) \quad v = a_1 e^{\beta z} \sin(\vartheta t + \beta z + \psi) + b_1 e^{-\beta z} \sin(\vartheta t - \beta z - \varphi).$$

Damit die Geschwindigkeit  $v$  für  $z=0$  den Wert  $u_0 \sin \vartheta t$  annimmt, muß

$$a_1 = \frac{u_0 \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad b_1 = \frac{u_0 \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

gesetzt werden. Die endgültige Lösung wird daher

$$(8a) \quad v = \frac{u_0}{\sin(\varphi + \psi)} [\sin \varphi e^{\beta z} \sin(\vartheta t + \beta z + \psi) + \sin \psi e^{-\beta z} \sin(\vartheta t - \beta z - \varphi)].$$

a) Wenn die Flüssigkeit an einer festen Ebene  $z=h$  haftet, so ergeben sich für die noch unbestimmten Werte  $\varphi$  und  $\psi$  die Beziehungen

$$(9) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin 2\beta h}{e^{-2\beta h} - \cos 2\beta h}; \quad \varphi = -(\psi + 2\beta h).$$

Die weitere Diskussion, insbesondere die Bestimmung der Tangentialspannungen an den beiden Ebenen  $z=0$  und  $z=h$ , möge dem Leser überlassen bleiben.

b) Für den Fall, daß die Flüssigkeit im Unendlichen in Ruhe ist, wird  $\varphi=0$ , und wir erhalten dann

$$(10) \quad v = u_0 e^{-\beta z} \sin(\vartheta t - \beta z).$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, wie die Tangentialschwingungen der Lamelle  $z=0$  sich als eine transversale Welle in das Innere einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit fortsetzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich  $\frac{\vartheta}{\beta}$ . Wie der Exponentialfaktor zeigt, nimmt die Amplitude sehr schnell ab. Da die Wellenlänge durch  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$  dargestellt ist, so sieht man, daß sich die Amplitude nach einer Schwingung im Verhältnis  $e^{-2\pi} : 1 = \frac{1}{535}$  verringert hat. Wenn man für  $\beta$  den oben notierten Wert einsetzt, so ergibt sich für die Wellenlänge, die gleichzeitig ein Maß für die Tiefenwirkung der Zähigkeit angibt, der Ausdruck

$$(11) \quad \lambda = \left(4\pi\nu \cdot \frac{2\pi}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder bei Einführung der Schwingungsdauer  $T$  der Lamelle

$$(11a) \quad \lambda = \sqrt{4\pi\nu} \sqrt{T}.$$

Die Wellenlänge ist also der Wurzel aus der Schwingungsdauer proportional.

Für Luft erhält man  $\lambda_l = 1,28 \sqrt{T}$ , für Wasser  $\lambda_w = 0,47 \sqrt{T}$ . Man erkennt daraus jedenfalls, daß der Einfluß der Zähigkeit sich nur auf eine kurze Entfernung von der Oberfläche des schnelle Schwingungen ausführenden festen Körpers erstreckt.

Die erzwungenen Schwingungen kann man mit beliebig vielen Normal-schwingungen überlagern, die mit den Bedingungen des Problems verträglich sind. Wir wollen im folgenden Abschnitt ein zusammengesetztes System dieser Art aus der Forderung ableiten, daß für den Zeitpunkt  $t=0$  eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung vorhanden sein soll.

## § 28. Das Fouriersche Problem für die zähe Strömung.

Nach dem vorigen Paragraphen wird die Grundgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

durch das partikuläre Integral

$$v = (A \cos \lambda z + B \sin \lambda z) e^{-\nu \lambda^2 t}$$

erfüllt. Wir erhalten also auch eine Lösung in dem zusammengesetzten Ausdruck

$$(2) \quad v = \sum_{\lambda} (A_{\lambda} \cos \lambda z + B_{\lambda} \sin \lambda z) e^{-\nu \lambda^2 t}.$$

Für  $t=0$  ergibt sich

$$v = \sum_{\lambda} (A_{\lambda} \cos \lambda z + B_{\lambda} \sin \lambda z).$$

Wenn wir also für die Zeit  $t=0$  eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung vorschreiben, so haben wir die Koeffizienten  $A_{\lambda}$  und  $B_{\lambda}$  nach der Fourierschen Methode zu ermitteln.

Diese Methode besteht im folgenden: Ist die als stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzte Funktion  $f(z)$  im Bereiche  $0 \leq z \leq a$  definiert, so läßt sie sich, je nachdem man sie als ungerade oder gerade Funktion (mit der Periode  $2a$ ) fortsetzt, durch eine Sinus- oder Kosinusreihe darstellen, also im ersten Fall durch eine Reihe von der Form

$$f(z) = B_1 \sin \frac{\pi z}{a} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{a} + \dots,$$

wo die  $B_m$  durch die Integrale

$$B_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \frac{m\pi z}{a} dz$$

bestimmt sind. Ist die Funktion dagegen in dem Bereich  $-a < z < a$  definiert, so läßt sie sich unter derselben Voraussetzung in der Form darstellen

$$f(z) = A_0 + \sum A_m \cos \frac{m\pi z}{a} + \sum B_m \sin \frac{m\pi z}{a},$$



wo

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(\alpha) d\alpha; \quad A_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(\alpha) \cos \frac{m\pi\alpha}{a} d\alpha; \quad B_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(\alpha) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} d\alpha$$

zu setzen ist. Zusammenfassend erhalten wir dann

$$f(z) = A_0 + \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-a}^{+a} f(\alpha) \cos \frac{m\pi(z-\alpha)}{a} d\alpha.$$

Wenn  $a$  unendlich wird, also das Definitionsgebiet der Funktion nach der einen oder nach beiden Seiten der Ebene  $z=0$  ins Unendliche geht, so läßt sich die Summe der Integrale in der Entwicklung von  $f(z)$  in Doppelintegrale verwandeln. Der strenge Beweis für die Gültigkeit dieser Fourierschen Integrale, wie auch der Fourierschen Reihen möge in der einschlägigen Literatur<sup>1)</sup> nachgesehen werden. Man erhält dann

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } 0 < z < \infty \quad f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \sin \lambda z \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \\ \text{für } -\infty < z < \infty \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \lambda(z-\alpha) d\alpha, \end{array} \right.$$

unter der Voraussetzung, daß die Integrale  $\int_0^{\infty} f(\alpha) d\alpha$ , bzw.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha$  absolut konvergieren.

Dann genügen nach (2) für  $t > 0$  auch die beiden Doppelintegrale

$$(4) \quad v_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda z e^{-v\lambda^2 t} d\lambda \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \quad (0 < z < \infty)$$

und

$$(5) \quad v_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v\lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \lambda(z-\alpha) d\alpha \quad (-\infty < z < \infty)$$

der Differentialgleichung (1) und erfüllen außerdem die Grenzbedingung, für  $t=0$  in die vorgegeben gedachte Verteilungsfunktion  $f(z)$  überzugehen.

Durch Ausführung der Integration nach  $\lambda$  (für  $t > 0$ ) erhält man

$$(6) \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 v t} \cos \lambda(z-\alpha) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{vt}} e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4vt}}$$

<sup>1)</sup> R. Courant-D. Hilbert, Methoden der math. Physik, Berlin 1931, S. 58f., 65f.; H. Schmidt, Theorie der Wellengleichung, Leipzig 1931, S. 38–44.

und

$$(7) \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda z \sin \lambda \alpha d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos \lambda (z - \alpha) e^{-\lambda^2 t} d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos \lambda (z + \alpha) e^{-\lambda^2 t} d\lambda \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\nu t}} \left( e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{4\nu t}} \right).$$

Wie man leicht zeigen kann, sind die Ausdrücke

$$w_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(z \pm \alpha)^2}{4\nu t}}$$

partikuläre Integrale der Differentialgleichung (1). Wir hätten daher auch von einer Summe oder einem Integral der Funktionen  $w$  ausgehen können, um die allgemeinen Bedingungen zu befriedigen. Setzt man die Werte (6) und (7) in die Lösungen (4) und (5) ein, so ergeben sich folgende Werte für  $v_1$  und  $v_2$

$$(8) \quad v_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^{\infty} f(\alpha) \left[ e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{4\nu t}} \right] d\alpha,$$

$$(9) \quad v_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Im folgenden werden wir einige bemerkenswerte Anwendungen dieser Gleichungen geben.

## § 29. Anwendungen der Fourierschen Formeln.

1. Plötzliche Bewegung der Grenzebene  $z=0$  mit konstanter Geschwindigkeit. Wir betrachten eine von  $z=0$  bis  $z=\infty$  ausgedehnte Flüssigkeit, anfangs zur Zeit  $t=0$  in Ruhe, die durch eine plötzlich einsetzende tangentialen Verschiebung der begrenzenden Ebene  $z=0$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $u_0$  in Strömung versetzt wird. Die entsprechende thermische Aufgabe bezieht sich auf die Bestimmung der Wärmeströmung in einem Körper, der anfangs die Temperatur  $0^\circ$  hat und mit seiner ebenen Grenzfläche einen anderen Körper von der Temperatur  $\vartheta^\circ$  berührt. Setzen wir in dem im vorigen Paragraphen entwickelten Ausdruck für  $v_1$

$$f(\alpha) = u_0$$

und subtrahieren wir ihn von  $u_0$ , so ergibt sich die Lösung

$$v = u_0 \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \left( \int_0^{\infty} e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha \right) \right],$$

die in der Tat die vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt. Die beiden Integrale lassen sich nun in folgender Weise zusammenfassen. Setzt man im ersten Integral  $\frac{\alpha-z}{2\sqrt{\nu t}}=q$ , im zweiten  $\frac{\alpha+z}{2\sqrt{\nu t}}=q$ , so erhält man

$$(1) \quad v = u_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-q^2} dq + \int_{\infty}^{+\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq \right) \right] = u_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq \right].$$

Die Funktion

$$F_e \left( \frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq$$

spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als sogenanntes Fehlerintegral eine grundlegende Rolle und ist sehr genau tabuliert worden<sup>1)</sup>. Es gilt die beständig konvergente Reihenentwicklung

$$F_e(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \dots \right).$$

Für große  $x$  haben wir dagegen

$$F_e(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \dots \right).$$

Man sieht aus dieser Darstellung, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind, d. h. die Geschwindigkeit für  $t=0$  überall verschwindet und für eine noch so kleine, aber von 0 verschiedene Zeit  $t=\varepsilon$  auf der Fläche  $z=0$  den Wert  $v=u_0$  annimmt. In der beigegebenen Abb. 30 ist der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit  $v$  für die verschiedenen Abstände  $z$  von der beweglichen Ebene, und zwar für die Zähigkeitszahl  $\nu=0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , wie sie etwa für Wasser zutrifft, zur Darstellung gebracht. Man erkennt aus dem Diagramm deutlich, wie die momentan einsetzende Bewegung sich auf das Wasser überträgt.

Bei der Bewegung erfährt die Ebene einen Widerstand, der pro Flächeneinheit den Wert hat

$$\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = -u_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi t}},$$

also anfangs einen theoretisch unendlichen Wert besitzt und weiterhin

<sup>1)</sup> Vgl. etwa E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1914, S. 436, 437 f.

abnimmt mit der reziproken Wurzel aus der Zeit. Auf diese Formel werden wir gelegentlich der Bedeutung der Grenzschichttheorie zurückkommen.

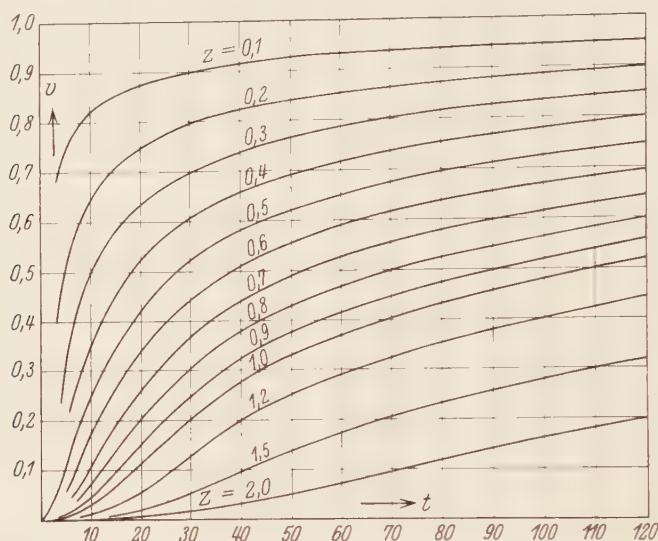


Abb. 30. Übertragung einer plötzlich einsetzenden gleichförmigen Bewegung der Grenzebene  $z=0$  auf eine bis  $z=\infty$  ausgedehnte zähe Flüssigkeit.

2. Ausbreitung einer ebenen Diskontinuität oder Wirbelschicht in einer Flüssigkeit. Ganz ähnlich verläuft die Behandlung der zeitlichen Veränderung einer mit der Ebene  $z=0$  zusammenfallenden Unstetigkeitsfläche. Wir haben dann eine von  $z=-\infty$  bis  $z=+\infty$  reichende Flüssigkeit anzunehmen, und für die Verteilungsfunktion  $f(z)=\pm u_0$  zu setzen, wobei etwa das obere Vorzeichen für die positive, das untere für die negative Seite der Ebene zu nehmen ist. Die Geschwindigkeitsfunktion wird dann unmittelbar

$$v = \frac{u_0}{2\sqrt{\nu t}} \int_0^z \left[ e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{4\nu t}} \right] d\alpha,$$

und wir erhalten nach der oben angegebenen Umformung

$$(2) \quad v = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq = u_0 F_e \left( \frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right).$$

Die Geschwindigkeit wird also unmittelbar durch das Fehlerintegral dargestellt, und es ergibt sich ein örtlicher und zeitlicher Verlauf, wie

er in der Abb. 31 veranschaulicht ist. Im besonderen berechnet sich die Zeit, die vergeht, damit  $v$  auf den halben Wert sinkt, aus  $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} = 4,769$  zu  $t = \frac{z^2}{91\nu}$ . Es entstehen daraus für Wasser und Luft die Durchschnittswerte

$$t_1 = 61,8z^2, \quad t_2 = 8,3z^2.$$

Die an einer Stelle  $z$  zur Zeit  $t$  herrschende Wirbelstärke hat ebenso wie im vorigen Falle den Wert

$$(3) \quad w = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}.$$

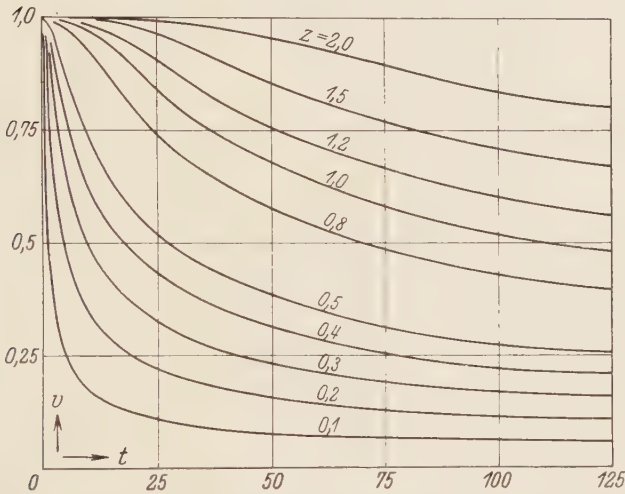


Abb. 31. Ausbreitung einer ebenen Wirbelschicht ( $z=0$ ) in der unendlich ausgedehnten zähen Flüssigkeit ( $\nu=0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ).

Durch diese Formeln wird die Ausbreitung der Wirbelschicht in der Flüssigkeit zur Darstellung gebracht. Daß die Anfangsbedingung wirklich erfüllt ist, ergibt sich aus der Bemerkung, daß für einen von 0 verschiedenen Wert von  $z$  der Ausdruck (3) für die Zeit  $t=0$  verschwindet, und daß das über die ganze Flüssigkeit erstreckte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w dz = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} dz$$

wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha q^2} dq = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

den endlichen Wert  $u_0$  annimmt. Der doppelte Wert  $2u_0$  ist nichts anderes als die auf die Einheitsfläche bezogene Zirkulation oder die Zirkulationsdichte.

Wenn wir die Wirbelstärke in einem bestimmten Abstand  $z$  betrachten, so ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{u_0}{4\sqrt{\pi\nu t^3}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} \left( \frac{z^2}{2\nu t} - 1 \right).$$

Man erhält also ein Maximum der Wirbelstärke für  $t = \frac{z^2}{2\nu}$  von der Größe

$$w = \frac{u_0}{12\pi e \cdot z}$$

das im umgekehrten Verhältnis zum Abstand  $z$  von der Wirbelschicht steht. Ähnliche Verhältnisse werden wir bei der Betrachtung eines einzelnen (Stab-) Wirbels antreffen, die uns zugleich in die Lage versetzen wird, Wirbelssysteme von allgemeinerer Art zusammensetzen.

### § 30. Instationäre ebene Spiralströmung.

Wir haben bereits im V. Kapitel exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen für die ebene Bewegung kennengelernt, die dadurch ausgezeichnet waren, daß die zugehörigen Stromlinien mit den Stromlinien eines Potentialquellwirbels übereinstimmen, während die Geschwindigkeitsverteilung einem anderen Gesetz folgt. Wir wollen jetzt eine ähnliche Untersuchung für den instationären Fall durchführen und im besonderen nach freien Strömungen suchen, die zu einem System von spiralförmigen Bahnen gehören, ohne selbst in ihrem gesamten Verlauf Potentialbewegungen zu sein. Dabei werden wir uns unter anderem auch mit der speziellen Frage zu beschäftigen haben, wie sich die in einem Punkt erzeugte Wirbelbewegung in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ausbreitet und aufzehrt.

Um die Ansätze möglichst allgemein zu halten, gehen wir aus von der Differentialgleichung für die Stromfunktion und den Druck. Wenn wir Polarkoordinaten  $r, \varphi$  einführen, so haben wir

$$(1) \quad \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \nu \Delta \Delta \Psi,$$

wo die Operation  $\Delta$  die Bedeutung hat

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}.$$

Wir können diese Gleichungen durch einen in  $\varphi$  linearen Ansatz zu lösen suchen, also durch

$$(2) \quad \Psi = \Psi_0 + \frac{q}{2\pi} \cdot \varphi,$$



wenn wir mit  $\Psi_0$  eine noch zu bestimmende Funktion von  $r$  bezeichnen<sup>1)</sup>. Daraus ergeben sich dann die Geschwindigkeitskomponenten

$$(3) \quad v_r = \frac{q}{2\pi r}; \quad v_\varphi = -\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{q}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial r}\right).$$

Damit die Geschwindigkeit eindeutig sei, d. h. bei einer Umkreisung zu demselben Wert zurückkehrt, muß  $q$  konstant sein. Setzen wir  $\frac{q}{2\pi} = \alpha$ , so erhalten wir wegen  $\Delta \Psi = \Delta \Psi_0$  für  $\Psi_0$  die Differentialgleichung

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial r} = \nu \Delta \Delta \Psi_0 & \text{oder} \\ \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial t} + \frac{\alpha - \nu}{r} \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial r} = \nu \frac{\partial^2 \Delta \Psi_0}{\partial r^2}. \end{cases}$$

Da  $\Delta \Psi_0 = -2w$

gleich der negativen doppelten Wirbelstärke ist, so lautet die Differentialgleichung für  $w$

$$(5) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\alpha - \nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \nu \Delta w.$$

Da die Gleichungen linear sind, so hat das Superpositionsgesetz hier ausnahmsweise Gültigkeit. Die Druckgleichung lautet

$$d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \Delta \Psi \cdot d\Psi + \frac{\partial\left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi}{r \partial \varphi} dr - \frac{\partial\left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi}{\partial r} r d\varphi.$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen von (2)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \Delta \Psi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi = \alpha \Delta \Psi_0 - \nu r \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial t}.$$

Wenn wir die rechte Seite nach  $r$  differenzieren und (4) benutzen, so ergibt sich der Wert 0. Es ist also jedenfalls

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \text{konst.}$$

Damit auch der Druck bei einer Umdrehung um  $r=0$  eindeutig bleibt, muß die Konstante verschwinden, d. h. es wird

$$(7) \quad r \frac{\partial \Delta \Psi_0}{\partial r} - \frac{r}{\nu} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial t} - \frac{\alpha}{\nu} \Delta \Psi_0 = 0.$$

Führt man noch

$$r \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = V$$

ein, so ergibt sich für  $V$  die Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial V}{\partial t},$$

<sup>1)</sup> Vgl. G. Hamel, Spiralförmige Bewegung zäher Flüssigkeiten. Jahresbericht der deutschen Mathem.-Vereinig., Bd. 25 (1917), S. 50f.

die, von dem konstanten Faktor  $1 + \frac{z}{\nu}$  abgesehen, denselben Charakter zeigt wie die Gleichung für  $w$ . Die Geschwindigkeit genügt der Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

a) Wir erhalten nun eine erste Reihe von instationären Bewegungen, wenn wir mit  $1 + \frac{z}{2\nu} = \lambda$  den Ansatz machen

$$V = e^{-\vartheta t} r^\lambda \chi(r).$$

Dann geht die Gleichung (8) über in

$$(10) \quad \chi'' + \frac{1}{r} \chi' + \left(\frac{\vartheta}{\nu} - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) \chi = 0,$$

die sich mit der Substitution

$$\chi = J\left(\sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r\right) = J(s)$$

in die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen von der Ordnung  $\lambda$

$$J''(s) + \frac{1}{s} J' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{s^2}\right) J(s) = 0$$

verwandelt. Wir erhalten daher zwei partikuläre Lösungen für  $V$  in der Form

$$(11) \quad V_1 = e^{-\vartheta t} \cdot r^\lambda \cdot J_\lambda\left(\sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r\right); \quad V_2 = e^{-\vartheta t} r^\lambda J_{-\lambda}\left(\sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r\right),$$

die voneinander unabhängig sind, wenn  $\lambda$  keine ganze Zahl ist.

Haben wir aber z. B.  $\lambda = 1$ , so geht die Differentialgleichung für  $v_i$  über in

$$(12) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t},$$

die unmittelbar durch das Produkt

$$e^{-\vartheta t} \cdot B_1(kr)$$

einer Exponentialfunktion von  $t$  und einer Besselschen Funktion 1. Ordnung gelöst werden kann. Da hier  $B_1$  und  $B_{-1}$  nicht unabhängig voneinander sind, muß man als zweite Lösung eine Funktion zweiter Art hinzunehmen und kann dann als allgemeine Lösung setzen

$$(13) \quad v = \sum e^{-\nu k_i^2 t} [a_i J_1(k_i r) + b_i N_1(k_i r)],$$

deren mechanische Bedeutung später noch genauer untersucht werden wird.

b) Eine zweite Reihe von Lösungen wollen wir nach Analogie der früher betrachteten geradlinigen Bewegung ableiten, indem wir die Variable  $\frac{r^2}{4\nu t}$  in der Form

$$V = r^\alpha \cdot t^\beta \cdot F\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right) = r^\alpha \cdot t^\beta \cdot F(q)$$

benutzen. Mit diesem Ansatz entsteht aus (8) durch eine einfache Rechnung die weitere Gleichung

$$(14) \quad F'' + F' \left[ \frac{\alpha+1-\lambda}{q} + 1 \right] + F \left[ \frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha}{4q^2} - \frac{\lambda}{q} \right] = 0.$$

Sie ist in zwei bemerkenswerten Fällen durch eine Exponentialfunktion lösbar, wenn nämlich entweder

$$\alpha = 0, \quad \beta = \lambda - 1$$

oder

$$\alpha = 2\lambda, \quad \beta = -(\lambda + 1).$$

In diesen beiden Fällen haben wir nämlich

$$F'' + F' + \frac{1-\lambda}{q} (F' + F) = 0$$

$$F'' + F' + \frac{1+\lambda}{q} (F' + F) = 0,$$

woraus

$$F'' + F' = 0, \quad F' + F = 0, \quad \text{mithin } F'' = F,$$

also

$$F = e^{-q} = e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

folgt. Wir haben also die beiden partikulären Lösungen

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = ct^{\lambda-1} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad \text{und} \quad V_2 = cr^{2\lambda} t^{-(1+\lambda)} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \\ \quad = ct^{\frac{\lambda}{2\nu}} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}; \quad \quad \quad = cr^{2+\frac{\lambda}{\nu}} t^{-\left(2+\frac{\lambda}{2\nu}\right)} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}, \end{array} \right.$$

aus denen sich die entsprechenden Werte von  $v_\varphi = \frac{V}{r}$  und  $w = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$ , sowie der Ausdruck für die Stromfunktion leicht bilden lassen<sup>1)</sup>. Bemerkenswert sind hier vor allem zwei Sonderfälle, die wir etwas genauer betrachten wollen.

a) Wenn  $\lambda=1$  ist, so wird  $\kappa=0$ . In diesem Fall haben wir also eine reine Wirbelströmung, und die Ausdrücke (15) gehen über in

$$(16) \quad V_1 = ce^{-\frac{r^2}{4\nu t}}; \quad V_2 = cr^2 t^{-2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

<sup>1)</sup> Wie man diese zweite Reihe von Lösungen als Integrale von Lösungen der ersten Reihe darstellen kann, soll später gezeigt werden.

Sie genügen der Differentialgleichung

$$(17) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial V}{\partial t},$$

während die Differentialgleichung für die Wirbelstärke übergeht in

$$(18) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial w}{\partial t}$$

und die beiden partikulären Lösungen hat

$$(19) \quad w_1 = \frac{c}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}; \quad w_2 = \frac{c}{t^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right) e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

die wir im folgenden Paragraphen diskutieren werden.

$\beta$ ) Wenn  $\lambda=0$  ist, so wird  $\kappa=-2\nu$ . Die radiale Strömung ist also nach innen, auf den singulären Punkt  $r=0$  zu, gerichtet. Die beiden partikulären Integrale (15) fallen zusammen und stimmen überein mit dem  $w_1$  des vorigen Falles und mit der bekannten Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$(20) \quad V = \frac{c}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

durch welche die Ausbreitung der Temperatur bestimmt ist, die von einer linearen, stabförmigen Wärmequelle herrührt. Der entsprechende Ausdruck für  $w$  wird

$$(21) \quad w = \frac{c}{2\nu t^2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Die Differentialgleichungen für  $V$  und  $w$  lauten

$$(22) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Es wird zunächst unsere Aufgabe sein, den mechanischen Inhalt der für diese Spezialfälle gegebenen Formeln zu analysieren.

### § 31. Die Ausbreitung eines Wirbels in einer zähen Flüssigkeit.

Der im vorigen Paragraphen hervorgehobene Spezialfall  $\lambda=1$ ,  $\kappa=0$  führt im wesentlichen zu der Bewegung einer zähen Flüssigkeit, die hervorgerufen wird von einer zu einer bestimmten Zeit im Punkt  $r=0$  konzentrierten Wirbelerregung. Wegen der Bedeutung dieses Falles wollen wir zunächst die in § 30 (19) gegebene partikuläre Lösung

$$(1) \quad w_1 = \frac{1}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

noch auf einem anderen Weg herleiten, der gleichzeitig den Zusammenhang mit der früher betrachteten laminaren Bewegung herstellt. Die Differentialgleichung für  $w$

$$(2) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \nu \Delta w$$

stimmt mit der allgemeinen Differentialgleichung

$$(2a) \quad \frac{dw}{dt} = \nu \Delta w$$

überein, wenn darin die quadratischen Glieder  $v \cdot \Delta w$  vernachlässigt werden. Da diese Glieder

$$\frac{\partial w}{\partial r} v_r + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \cdot v_\varphi$$

aber ohnehin verschwinden, wenn  $v = 0$  (und  $z = 0$ ) und  $w$  von  $\varphi$  unabhängig ist, so ist der Ausdruck (1) ein exaktes Integral von (2a), wie zu erwarten war. Setzt man nun

$$w = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \omega,$$

so erhält man aus (2) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{t} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right].$$

Spaltet man diese Gleichung in die zwei weiteren

$$(3) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}; \quad \frac{1}{2} \frac{\omega}{t} = - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

so sieht man, daß das früher (§ 29) festgestellte elementare partikuläre Integral der ersten (linearen Wärmeleitungs-) Gleichung

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

gleichzeitig die zweite Gleichung (3) erfüllt. Wir erhalten daher wieder als Integral von (2)

$$(1a) \quad w = \frac{a}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Der Ausdruck läßt erkennen, daß zur Zeit  $t=0$  die Rotation für jeden von Null verschiedenen Wert von  $r$  verschwindet. Nun ergibt sich aber für die Zirkulation längs eines Kreises vom Radius  $r$  auf Grund des Stokesschen Satzes

$$4\pi \int_0^r w r dr = 8\pi \nu a \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right) = \Gamma \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right).$$

Dehnt man das Raumgebiet bis  $r = \infty$  aus, so wird die Zirkulation  $\Gamma = 8\pi\nu a$ . Die gesamte Rotation muß also jedenfalls zur Zeit  $t=0$  im Punkt  $r=0$  konzentriert sein und wir sehen daher, daß durch die Formel (1a) mit  $a = \frac{\Gamma}{8\pi\nu}$  die Flüssigkeitsbewegung dargestellt ist, die von einem anfangs (für  $t=0$ ) in  $r=0$  konzentrierten Stabwirbel von der Zirkulation  $\Gamma$  ausgeht.

Der Wert der Zirkulation zur Zeit  $t$  wird

$$\Gamma_t = \Gamma \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right),$$

wie sich auch durch den Ausdruck für die tangentielle Geschwindigkeit  $v_\varphi$  bestätigen läßt, für die wir nach § 8 erhalten

$$(4) \quad v_\varphi = \frac{2}{r} \int r \omega dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right).$$

Im ganzen ergibt sich für das Verhalten eines linearen Wirbels in einer zähen Flüssigkeit folgendes<sup>1)</sup>:

Der Wirbel, der anfangs in dem Punkt  $r=0$  konzentriert war, breitet sich mit der Zeit über die gesamte Flüssigkeit aus, wobei, wie die Gleichung (3) für  $r > \infty$  ergibt, das über die ganze Ebene genommene Wirbelmoment denselben Wert behält. Wenn  $t$ , von Null ausgehend, unbegrenzt wächst, so nimmt die zirkulatorische Geschwindigkeit in einem Punkt von  $\frac{\Gamma}{2\pi r}$  bis zu Null ab, und zwar um so schneller, je größer die Zähigkeit des Mediums ist. Die unendlich große Geschwindigkeit am Anfang fällt augenblicklich auf den Wert Null. Die Zeit, die vergeht, bis die Geschwindigkeit auf die Hälfte ihres Wertes gesunken ist, beträgt

$$t = \frac{r^2}{4\nu \cdot \ln 2} = \frac{r^2}{2,772 \nu}.$$

Sie berechnet sich z. B. für Wasser im Abstand  $r=1,55$  cm zu einer Minute.

Zu einer bestimmten Zeit hat die Geschwindigkeit längs eines bestimmten Kreises, der sich nach (4) aus der Gleichung

$$(5) \quad 1 + \frac{r^2}{2\nu t} = e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

berechnet, ein Maximum. Da dieser Abstand  $r$  proportional mit  $\sqrt{t}$  ist, so vergrößert sich also der Kreis größter Geschwindigkeit mit der Wurzel aus der Zeit. Die Welle größter Geschwindigkeit läuft demnach vom

<sup>1)</sup> Vgl. auch C. W. Oseen, Arkiv för mat., astr. och fysik, Bd. 7 (1911); Hydrodynamik, Leipzig 1927, S. 82.



Mittelpunkt nach außen mit konstanter Flächengeschwindigkeit, d. h. derart, daß die einzelnen Kreisflächen sich proportional mit der Zeit vergrößern. In der Abb. 32 ist der Verlauf der Geschwindigkeit  $v_q$  in Abhängigkeit von  $r$  für verschiedene Zeitpunkte dargestellt. Die Kurven steigen vom Nullpunkt bis zu einem Größtwert und nähern sich nach dem Abfall asymptotisch der zum Potentialwirbel gehörigen Hyperbel  $v = \frac{1}{r}$ . Da der Anstieg bis zu ihrem Maximum angenähert linear erfolgt, so verhält sich die innerhalb des Kreises größter Geschwindigkeit liegende Flüssigkeit wie ein sich drehender Kern, der sich in dem Maße vergrößert, wie seine Rotation schwächer wird.

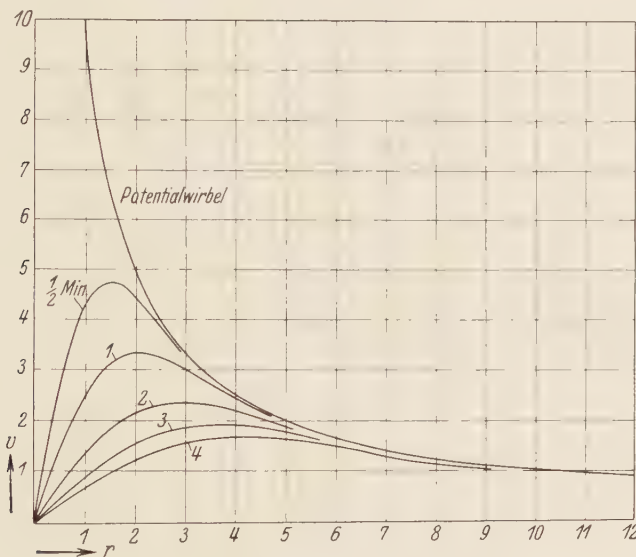


Abb. 32. Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung eines Wirbels in der zähen Flüssigkeit ( $\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ).

Die für einen Punkt  $r$  berechnete Rotation der Flüssigkeit dagegen wächst vom Wert Null bis zu einem Maximum, um sich dann asymptotisch wieder dem Wert Null zu nähern. Bis zur Erreichung des Maximums vergeht die Zeit

$$t = \frac{r^2}{4\nu},$$

woraus der Größtwert der Wirbelung zu

$$w_{\max} = \frac{8\pi r t \cdot e}{\Gamma}$$

sich ergibt. In der Abb. 33 ist die Rotation in Abhängigkeit von der Zeit für verschiedene Abstände vom Wirbelzentrum dargestellt. Man sieht,

daß im ersten Augenblick die Rotation langsam und dann besonders in geringen Abständen schneller bis zum Maximum ansteigt. Der Anstieg ist um so allmählicher, je weiter der Punkt vom Zentrum entfernt liegt.

Um das Strombild in einem bestimmten Augenblick zu zeichnen, bedarf es noch der Stromfunktion, die man durch Integration der Geschwindigkeit gewinnt. Es ist

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \lg r - \int \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} dr \right].$$

Um das hierin auftretende Integral zu berechnen, setze man  $\frac{r^2}{4\nu t} = q$ ; dann wird

$$\int \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{q} e^{-q} dq.$$

Bezeichnet man wie üblich<sup>1)</sup>

$$Ei(-q) = \int_0^q \frac{e^{-q}}{q} dq,$$

so erhält man also

$$(6) \quad \Psi = \frac{\Gamma}{2\nu t} \left[ \lg r - \frac{1}{2} Ei\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right].$$

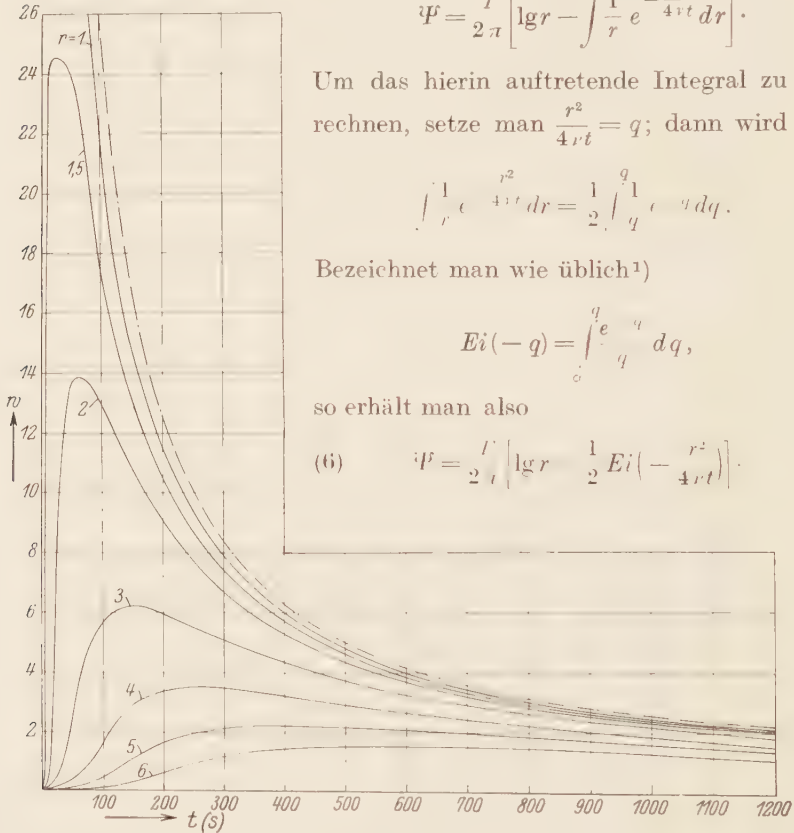


Abb. 33. Rotation in der Umgebung eines in der zähen Flüssigkeit sich ausbreitenden Wirbels.

Man findet auch durch  $\Psi$  die Geschwindigkeitsverhältnisse bestätigt. Für die Funktion  $Ei$  haben wir bei kleinem Argument  $q = \frac{r^2}{4\nu t}$  die Entwicklung

<sup>1)</sup> Vgl. N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, Leipzig 1906.

$$\begin{aligned} E_i(-q) &= 0,577216 = \lg q - q + \frac{q^2}{2 \cdot 2!} - \dots \\ &= 0,577216 + \lg r^2 - \lg 4\nu t - \frac{r^2}{4\nu t} + \dots \end{aligned}$$

Wenn  $t$  von Null verschieden ist, so wird demnach

$$\Psi_{r \rightarrow 0} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \lg 4\nu t - 0,2886 \right];$$

die für ein bestimmtes  $t$  nach den Tabellen<sup>1)</sup> der Funktion  $Ei(q)$  gezeichneten  $\Psi$ -Kurven beginnen in  $r=0$  mit horizontaler Tangente und steigen zunächst stärker, dann immer schwächer an. Der Wendepunkt



Abb. 34. Stromliniensystem aus der Umgebung eines Wirbels in der zähen Flüssigkeit.

entspricht dem Punkt größter Geschwindigkeit. Wenn man mit den zu gleichen  $\Psi$ -Differenzen gehörigen Radien  $r$  Kreise um den Mittelpunkt zeichnet, so gewinnt man ein Bild von der Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung des sich ausbreitenden Wirbels (Abb. 34).

Schließlich können wir noch die Umlaufzeit eines Flüssigkeitsteilchens auf seiner kreisförmigen Bahn berechnen. Während die Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt nur von  $r$  abhängig ist, ändert sich die Geschwindigkeit mit der Zeit nach einem durch die Funktion  $e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$  bestimmten Gesetz. Nehmen wir  $r=r_0$  als konstant an, so können wir für die Bahngeschwindigkeit

<sup>1)</sup> Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1909, S. 19.

keit  $r_0 \frac{dq}{dt}$  setzen, wenn  $q$  das die Lage bestimmende Azimut bedeutet. Wir haben also die Beziehung

$$r_0 \frac{dq}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \left( 1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t}} \right),$$

$$dq = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t}} \right) dt.$$

Da sich mit  $\frac{r_0^2}{4\nu t} = q$  durch partielle Integration

$$\int_0^t e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t}} dt = -\frac{r_0^2}{4\nu} \int_{\infty}^q \frac{dq}{q^2} e^{-q} = \frac{r_0^2}{4\nu} \left[ \left( \frac{1}{q} e^{-q} \right)_{\infty} + \int_{\infty}^q \frac{1}{q} e^{-q} dq \right]$$

ergibt, so erhalten wir

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \left[ t - \frac{r_0^2}{4\nu} \left( \frac{1}{q} e^{-q} - \text{Ei}(-q) \right) \right],$$

$$(7) \quad \varphi = \frac{\Gamma t}{2\pi r_0^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t}} \right) - \frac{\Gamma}{8\pi\nu} \text{Ei} \left( -\frac{r_0^2}{4\nu t} \right).$$

Die Umlaufzeit  $t_0$  ist daher durch die Gleichung

$$(7a) \quad 2\pi = \frac{\Gamma t_0}{2\pi r_0^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t_0}} \right) - \frac{\Gamma}{8\pi\nu} \text{Ei} \left( -\frac{r_0^2}{4\nu t_0} \right)$$

bestimmt, die nur durch graphische Methoden aufgelöst werden kann.

## § 32. Beispiele von Strudelströmungen.

1. Um ein einfaches Beispiel einer Strudelströmung zu konstruieren, wollen wir in § 30, (15)  $\lambda=0$  setzen. Dann wird

$$z = -2\nu, \quad V = \frac{a}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

und wir erhalten als Gesetz für die Wirbelverteilung und die Tangentialgeschwindigkeit

$$(1) \quad w = \frac{a}{2\nu t^2} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}, \quad v_{\varphi} = \frac{2a}{r t} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right).$$

Daraus geht hervor, daß das gesamte, anfangs in  $r=0$  konzentrierte unendlich große Wirbelmoment mit der Zeit sehr schnell abnimmt und für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet, während die Geschwindigkeit im Ursprung wieder momentan auf Null sinkt und für  $t \neq 0$  längs eines bestimmten Kreises ein Maximum besitzt.

Wenn auch das Anfangsstadium der Bewegung nicht zu realisieren ist, so können wir doch die Betrachtung von einem von  $t=0$  verschie-

denen Zeitpunkt  $t = t_0$  beginnen, und den für  $t > t_0$  geltenden Bewegungsprozeß mit einer zähen Strudelströmung vergleichen, die mit wachsender Zeit in eine auf den Senkpunkt  $r = 0$  gerichtete Radialströmung übergeht.



Abb. 35. Stromlinien einer einfachen Strudelströmung (Fall 1).  $\frac{4\nu t}{c^2} = 0,5$ .

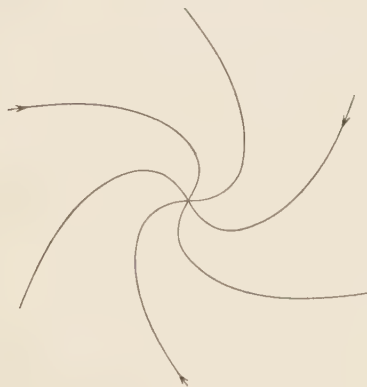


Abb. 36. Stromlinien einer einfachen Strudelströmung (Fall 1).  $\frac{4\nu t}{c^2} = 1$ .

Wir erhalten ferner für die Stromfunktion nach einer ähnlichen Rechnung wie im vorigen Paragraphen

$$(2) \begin{cases} \psi = -2\nu\varphi \\ -\frac{2a}{t} \left[ \lg r - \frac{1}{2} E_i \left( -\frac{r^2}{4\nu t} \right) \right] \end{cases}$$

oder

$$(2a) \begin{cases} \psi' = -\varphi \\ -\frac{c^2}{4\nu t} \left[ \lg r - \frac{1}{2} E_i \left( -\frac{r^2}{4\nu t} \right) \right] \end{cases}$$

Wenn man die  $\psi'$ -Kurven für verschiedene Werte von  $t$  bei gegebenem  $c^2$  und  $\nu$  konstruiert, erhält man Spiralen, die schließlich bei großem  $t$  in gerade Linien (radiale Strahlen) übergehen. Wir haben in den Abb. 35–37 für den Fall  $c^2 = 2$  je sechs Kurven der drei Stromlinienscharen  $4\nu t = 1, 2, 4$  konstruiert, die das Wesentliche der Diskussion erkennen lassen. Die Kurven stellen die Integalkurven der auf einen Zeitpunkt bezogenen aufeinanderfolgenden Geschwindigkeitsvektoren dar. Um die Bahnl



Abb. 37. Stromlinien einer einfachen Strudelströmung (Fall 1).  $\frac{4\nu t}{c^2} = 2$ .

der Flüssigkeitsteilchen zu bestimmen, geht man von den Geschwindigkeitskomponenten

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{2\nu}{r}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2}{2rt} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)$$

aus und findet dann durch einfache Integration der ersten Gleichung, wenn dem Wert  $t=t_0$  der Abstand  $r=r_0$  entspricht,

$$t = t_0 + \frac{r_0^2 - r^2}{4\nu}.$$

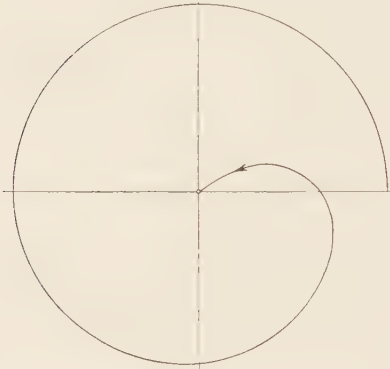


Abb. 38. Bahnkurve eines Teilchens in der Nähe des Senkpunktes bei einer Strudelströmung (Fall 1).

Setzt man dann diesen Wert in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{c^2}{r(4\nu t_0 + r_0^2 - r^2)} + \frac{c^2}{r(4\nu t_0 + r_0^2 - r^2)} e^{-\frac{r^2}{4\nu t_0 + r_0^2 - r^2}}$$

und daraus durch Integration für die Bahnkurve des durch die Anfangsbedingungen bestimmten Teilchens

$$(3) \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} \frac{c^2}{r_0^2 + 4\nu t_0} \left[ E_i \left( -\frac{r^2}{4\nu t_0 + r_0^2 - r^2} \right) \right. \\ \left. - \lg \left( \frac{r^2}{4\nu t_0 + r_0^2 - r^2} \right) \right]. \end{cases}$$

Dies stellt die Gleichung einer Spirale dar, die unter einem bestimmten Winkel in den Senkenpunkt einmündet (Abb. 38). Denn für  $r=0$  ergibt sich

$$(E_i)_{r \rightarrow 0} = \lg \left( \frac{r^2}{4\nu t_0 + r_0^2 - r^2} \right) + 0,577215,$$

so daß in (3) der Klammerausdruck für  $r=0$  den Wert 0,577215 erhält.

Die Zeit bis zur Erreichung des Senkenpunktes beträgt  $T = t_0 + \frac{r_0^2}{4\nu}$ .

Wenn  $t_0 = 0$  gesetzt wird, so wird der Anfangswert der Klammer für  $r=r_0$  wegen  $E_i(-\infty) = 0$  logarithmisch unendlich. Der Punkt bewegt sich dann anfangs mit unendlich großer Geschwindigkeit in unendlich vielen immer enger werdenden Windungen um den Anfangspunkt herum und braucht zur Erreichung dieses Punktes die Zeit

$$T = \frac{r_0^2}{2\nu}.$$

Die Abflußzeit ist natürlich um so größer, je kleiner die Zähigkeit der Flüssigkeit wird.



2. Ein Fall, der einer etwas geänderten Anfangsbedingung entspricht, ist durch

$$(4) \quad v_{\varphi} = \frac{a}{rt} e^{-\frac{r^2}{4vt}}$$

gegeben. Dann wird

$$rv_{\varphi} = \frac{a}{t} e^{-\frac{r^2}{4vt}},$$

und das im Gebiet innerhalb des Kreises mit dem Radius  $r$  enthaltene Impulsmoment berechnet sich zu

$$M_r = 2\pi \rho \int_0^r r^2 v_{\varphi} dr = 4\pi a \rho v \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}}\right).$$

Für  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir also

$$M = 4\pi a \mu, \quad a = \frac{M}{4\pi \mu},$$

mithin

$$(4a) \quad v_{\varphi} = \frac{M}{4\pi \mu r t} e^{-\frac{r^2}{4vt}}.$$

Wie man sieht, bringt die Gleichung die Ausbreitung eines anfangs in  $r=0$  konzentrierten Impulsmomentes zum Ausdruck. Die Stromfunktion wird

$$(5) \quad \Psi = -\frac{M}{8\pi \mu t} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) - 2\nu \varphi.$$

Die Bahnkurve eines Flüssigkeitsteilchens, deren Gleichung sich von (3) nur durch das Fehlen des logarithmischen Gliedes unterscheidet, ist in der Abb. 39 zur Darstellung gebracht.

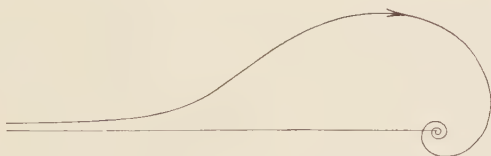


Abb. 39. Bahnkurve für eine Strudelströmung (Fall 2).

### § 33. Verallgemeinerungen.

Die in § 31–32 aufgestellten partikulären Integrale, insbesondere das Integral des Elementarwirbels, können nun dazu verwendet werden, um zusammengesetzte Integrale der Bewegungsgleichungen zu gewinnen. Dabei ist zu bemerken, daß das Superpositionsprinzip streng genommen nur bei Verschwinden der quadratischen Glieder, also insbesondere für die Fälle einer rein zirkularen und einer linearen, nur von einer Koordi-

nate abhängigen Bewegung anwendbar ist. In anderen Fällen erhält man durch Überlagerung unter gewissen Voraussetzungen (z. B. bei langsamer Strömung) Näherungslösungen der allgemeinen Gleichungen. Wenn z. B. ein Wirbelsystem aus einer kontinuierlichen Folge von Elementarwirbeln in den Punkten  $\xi, \eta$  mit der Zirkulationsdichte  $\gamma(\xi, \eta)$  aufgebaut ist, so ergibt sich

$$(1) \quad w = \frac{1}{8\pi\nu t} \int \gamma(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4\nu t}} d\xi d\eta.$$

Bemerkenswert sind nun folgende Grenzfälle:

### 1. Ebene Wirbelschichten.

a) Für eine von  $\xi = -\infty$  bis  $\xi = +\infty$  reichende ebene Wirbelschicht ( $y=0$ ) mit konstanter Dichte  $\gamma$  ergibt sich

$$\begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{8\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4\nu t}} d\xi \\ &= \frac{\gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi. \end{aligned}$$

Wegen der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi = \sqrt{4\nu t\pi}$$

folgt hieraus der bereits früher gefundene Ausdruck

$$(2) \quad w = \frac{\gamma}{4\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}},$$

wobei jetzt  $u_0$  durch  $\frac{\gamma}{2}$  und  $z$  durch  $y$  ersetzt ist.

b) Wenn dagegen die Wirbelschicht in  $\xi=0$  begrenzt ist und bis ins positiv Unendliche geht, so erhält man als Näherungslösung

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi \\ &= \frac{\gamma}{4\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \int_0^{\infty} e^{-q^2} dq = \frac{\gamma}{8\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \left[ 1 - F_e\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \end{aligned} \right.$$

wenn wieder das Fehlerintegral  $F_e(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-q^2} dq$  eingeführt wird.

c) Schließlich können wir auch die räumliche Ausbreitung einer beiderseits begrenzten Wirbelfläche finden. Legt man etwa die  $y$ -Achse durch

die Mitte der Spur dieser Fläche, deren Endpunkte dann durch  $\xi = \pm a$  dargestellt sein mögen, so findet man für die Wirbelstärke etwa für  $x > 0$

$$(4) \quad w = \frac{\gamma}{4\pi\sqrt{\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \left[ \int_0^{\frac{x+a}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq - \int_0^{\frac{x-a}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-q^2} dq \right]$$

oder

$$(4a) \quad \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{8\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} \left[ F_e\left(\frac{x+a}{2\sqrt{\nu t}}\right) \mp F_e\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right] \\ &= \frac{\gamma}{16\sqrt{\nu t}} F'_e\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \left[ F_e\left(\frac{x+a}{2\sqrt{\nu t}}\right) \mp F_e\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \end{aligned} \right.$$

wo das negative oder positive Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem  $x \leq a$  ist. In der Tat geht der Ausdruck (4) für  $t=0$  und  $x < q$ , da der Klammerausdruck den Wert  $\sqrt{\pi}$  annimmt, über in

$$w_{t \rightarrow 0} = \frac{\gamma}{4\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}.$$

Von diesem Ausdruck haben wir aber schon gezeigt, daß er für  $y > 0$  und  $t > 0$  den Grenzwert  $\frac{\gamma}{2}$  für die Zirkulation pro Flächeneinheit ergibt. Die Rotation der Flüssigkeit ist also zur Zeit  $t=0$  auf die Strecke  $-a \leq x \leq +a$ ,  $z=0$  beschränkt. Im übrigen ergeben sich für den Ausbreitungsvorgang ähnliche Verhältnisse wie beim Stabwirbel.

## 2. Kreiszyklindrische Wirbelschicht.

Für eine längs eines Kreises  $r=a$  gleichmäßig ausgebreitete Wirbelschicht haben wir

$$w = \frac{\gamma a}{8\pi\nu t} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(x-a\cos\varphi)^2 + (y-a\sin\varphi)^2}{4\nu t}} d\varphi.$$

Setzt man  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ , so wird

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{\gamma a}{8\pi\nu t} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\varphi - \vartheta)}{4\nu t}} d\varphi \\ &= \frac{\gamma a}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2 + a^2}{4\nu t}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{ra\cos\delta}{2\nu t}} d\delta. \end{aligned} \right.$$

Das Integral ist als Besselsche Funktion darstellbar. Wegen<sup>1)</sup>

$$J_0(iz) = I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \delta} d\delta$$

erhalten wir

$$(5a) \quad w = \frac{\gamma a}{4\nu t} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{ra}{2\nu t}\right).$$

In der Tat können wir für  $t \rightarrow 0$ , also für große Argumente, setzen

$$w_{t \rightarrow 0} = \frac{\gamma a}{4\nu t} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn  $t$  gegen Null geht. Daher ist am Anfang die Rotation  $w$  im ganzen Flüssigkeitsbereich gleich Null. Für das gesamte Wirbelmoment erhalten wir aber

$$4\pi \int_0^{\infty} wr dr = \frac{\pi\gamma a}{\nu t} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{ra}{2\nu t}\right) dr,$$

woraus sich wegen<sup>2)</sup>

$$\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{ra}{2\nu t}\right) dr = 2\nu t e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}$$

der Ausdruck

$$(6) \quad 4\pi \int_0^{\infty} wr dr = 2\pi a \gamma,$$

d. h. die anfängliche Zirkulation, ergibt. Es bestätigt sich also, daß die gesamte Rotation für  $t = 0$  längs des Kreisumfanges konzentriert ist.

Wir haben in den Abb. 40 u. 41 den Verlauf der Funktion  $w(rt)$  für konstant gehaltenes  $r$  und konstant gehaltenes  $t$  dargestellt. Dabei wurde

$$\frac{a^2}{4\nu t} = \frac{1}{\tau}, \quad \frac{r}{a} = \lambda$$

gesetzt. Man sieht, daß die Rotation von der Wirbelschicht  $r=a$  aus sich nach beiden Seiten ausbreitet. Während die Größe von  $w$  nach außen mit wachsendem  $r (> a)$  stets abnimmt, steigt sie im Innern des Kreises nach einer gewissen Zeit über den Wert an der Stelle  $r=a$  hinaus. Schließlich bildet sich eine Wirbelverteilung heraus, entsprechend einem fortgeschrittenen Stadium der Ausbreitung eines Punktwirbels mit

<sup>1)</sup> Vgl. A. Gray u. G. B. Mathews, A Treatise on Bessel Functions, London 1922, S. 46.

<sup>2)</sup> Ebenda, S. 69.

$a = 0, I_0\left(\frac{r a}{2 \nu t}\right) = 1$ , bei der die größte Wirbelstärke im Zentrum liegt. Für einen bestimmten Radius bzw. einen bestimmten Wert von  $\lambda$  erreicht  $w$  ein Maximum zu einer Zeit, die aus der Relation

$$(7) \quad \frac{I_0\left(\frac{2\lambda}{r}\right)}{I_1\left(\frac{2\lambda}{r}\right)} = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2 - r}$$

zu berechnen ist. Zu einer bestimmten Zeit  $\tau$  dagegen ergibt sich aus

$$(8) \quad \frac{I_1\left(\frac{2\lambda}{r}\right)}{I_0\left(\frac{2\lambda}{r}\right)} = \lambda$$

der Radius  $r$ , der der Stelle größter Wirbelstärke entspricht. Die Maxima (7) werden mit wachsendem  $\lambda$  bzw. wachsendem  $\tau$  immer kleiner. Die Maxima (8) gehören zu Stellen im Innern des Kreises  $r = a, \lambda = 1$ .

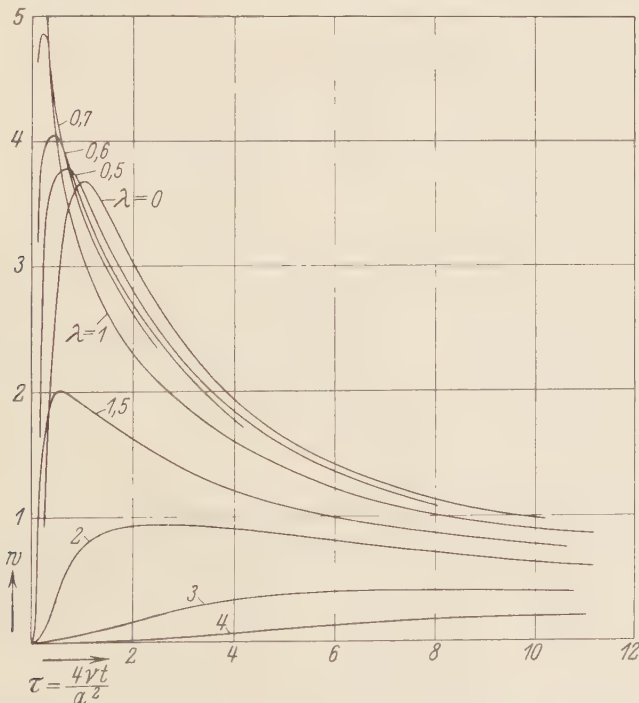


Abb. 40. Ausbreitung einer kreiszylindrischen Wirbelschicht ( $w(r, t)$  bei konstanten Werten von  $\frac{r}{a} = \lambda$ ).

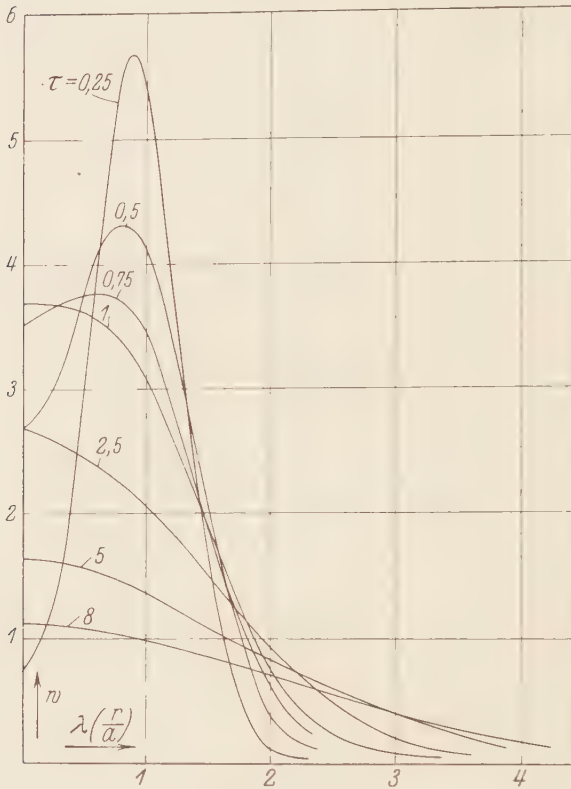


Abb. 41. Ausbreitung einer kreiszylindrischen Wirbelschicht  
 $(w(r, t)$  bei konstanten Werten von  $\tau = \frac{4vt}{a^2}$ ).

Die Geschwindigkeitsverteilung ist für  $t = \tau = 0$  identisch mit der Verteilung in der Umgebung einer idealen kreisförmigen Wirbelschicht. Im äußeren Gebiet ist

$$v_{t \rightarrow 0, r > a} = \frac{\gamma a}{r}.$$

Im Innern des Kreises  $r = a$  dagegen ist die Geschwindigkeit überall gleich Null<sup>1)</sup>. Um diese Anfangsverteilung auch analytisch zu zeigen, kann man die Geschwindigkeit zunächst aus der Wirbelverteilung ableiten. Man hat

$$(9) \quad v = \frac{2}{r} \int_0^r w r dr = \frac{\gamma a}{2 r t} \int_0^r e^{-\frac{r^2 + a^2}{4vt}} I_0\left(\frac{ra}{2vt}\right) dr,$$

<sup>1)</sup> Vgl. Wilh. Müller, Wirbelschichten und Zirkulation, Z. f. techn. Physik 10 (1924), S. 450—458.



woraus mit der aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannten Relation<sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2 vt} J_n(\lambda r) J_n(\lambda a) d\lambda = \frac{1}{2vt} e^{-\frac{r^2+a^2}{4vt}} I_n\left(\frac{ra}{2vt}\right),$$

die Beziehung

$$v = \frac{\gamma a}{r} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^r r \lambda e^{-\lambda^2 vt} J_0(\lambda r) J_0(\lambda a) dr$$

folgt. Nun ist aber bekanntlich

$$r \lambda J_0(\lambda r) = \frac{d}{dr} [r J_1(\lambda r)]; \quad \frac{1}{r} \int_0^r r \lambda J_0(\lambda r) dr = J_1(\lambda r),$$

und wir erhalten also die Darstellung

$$(10) \quad v = \gamma a \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 vt} J_1(\lambda r) J_0(\lambda a) d\lambda.$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für  $v$  liefert einen speziellen Fall einer zuerst von Sonine<sup>2)</sup> abgeleiteten Formel. Da ferner<sup>3)</sup>

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_0(\lambda a) d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{für } \frac{r}{a} > 1, \\ \frac{1}{2r} & \text{für } \frac{r}{a} = 1, \\ 0 & \text{für } \frac{r}{a} < 1 \end{cases}$$

ist, so genügt dieser Ausdruck in der Tat den gegebenen Anfangsbedingungen.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß wir die Geschwindigkeit aus einem sehr allgemeinen Satz ableiten können, der auf der Darstellung einer willkürlichen Funktion durch Besselsche Funktionen beruht und mit dem früher entwickelten Fourierschen Theorem eng verwandt ist. Aus der allgemeinen Form der Funktion  $v$

$$v = \sum e^{-\lambda_i^2 vt} C(\lambda_i) J_1(\lambda_i r)$$

läßt sich nämlich ebenso wie früher aus der Fourierschen Reihe eine Integraldarstellung gewinnen, die ohne weiteres einer vorgegebenen Anfangsverteilung anzupassen ist. Wenn  $r_1$  und  $r_2$  irgendwelche positive Werte für den Radius  $r$  bedeuten und  $\Phi(r)$  eine Funktion, die stetig

<sup>1)</sup> Gray und Mathews, a. a. O., S. 68.

<sup>2)</sup> N. Sonine, Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonct. continues en séries. Math. Ann. Bd. XVI (1880), S. 53.

<sup>3)</sup> Gray u. Mathews, l. c., S. 78.

oder stückweise stetig ist und endliche Unstetigkeiten besitzt für alle zwischen  $r_1$  und  $r_2$  liegenden Werte, so wird das Doppelintegral

$$\int_0^{\infty} d\lambda \int_{r_1}^{r_2} \lambda \varrho \Phi(\varrho) J_1(\lambda \varrho) J_1(\lambda r) d\varrho = \begin{cases} \frac{1}{2} [\Phi(r+0) + \Phi(r-0)] & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ 0 & \text{für } r_1 > r > r_2 \\ \frac{1}{2} \Phi(r+0) \text{ bzw. } \frac{1}{2} \Phi(r-0) & \text{für } r = r_1 \text{ bzw. } r_2. \end{cases}$$

Dann ist die unserer Differentialgleichung genügende Geschwindigkeitsverteilung, die für  $t=0$  der Funktion  $\Phi(\varrho)$  entspricht, für irgendeine Zeit dargestellt durch den Ausdruck

$$v = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda^2 vt} \lambda \varrho \Phi(\varrho) J_1(\lambda \varrho) J_1(\lambda r) d\varrho.$$

Da in unserem Fall für  $t=0$ ,  $r > a$ ,  $v = \frac{a\gamma}{r}$  und für  $r > 0$  und  $< a$   $v=0$  wird, so haben wir  $r_1 = a$ ,  $r_2 = \infty$ ,  $\Phi(r) = \frac{a\gamma}{r}$  zu setzen und erhalten dann den Ausdruck

$$v = a\gamma \int_0^{\infty} d\lambda \int_a^{\infty} e^{-\lambda^2 vt} J_1(\lambda \varrho) J_1(\lambda r) d\varrho.$$

Wenn wir die Integration nach  $\varrho$  ausführen, und berücksichtigen, daß  $J_0$  für unendlich große Argumente verschwindet, so reduziert sich das Integral auf die unter (10) gegebene Form. Wenn  $a=0$  wird, so erhalten wir wieder den Fall des Punktwirbels. Benutzt man den dafür gegebenen Wert für  $v$ , so ergibt sich die Beziehung

$$(11) \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 vt} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}} \right).$$

Auf die Auswertung des allgemeinen Geschwindigkeitsausdruckes, die mit einfachen Mitteln nicht erreicht werden kann, wollen wir an dieser Stelle verzichten.

## SIEBENTES KAPITEL.

### Zähle Strömung in der Umgebung geradlinig bewegter fester Körper bei kleinen Reynoldsschen Zahlen.

#### § 34. Langsame stationäre Strömung um Kreiszyylinder.

1. Das Problem der zählen Flüssigkeitsbewegung, die von einem eingetauchten geradlinig bewegten Körper verursacht wird, ist besonders im Hinblick auf die Widerstandsbestimmung von praktischer Bedeutung. Da aber die Differentialgleichungen der Bewegung nicht linear sind, also das Prinzip der Superposition hier streng genommen nicht mehr gültig

ist, so wird es im allgemeinen außerordentlich schwierig sein, die Grenzbedingungen zu erfüllen, die einer vorgegebenen Körperkontur entsprechen. Um jedenfalls eine erste Annäherung an die wirklichen Verhältnisse zu erreichen, erscheint es zweckmäßig, zunächst nur kleine Geschwindigkeit oder große Zähigkeit, d. h. also Kleinheit der Reynoldsschen Zahl, vorauszusetzen und dementsprechend die quadratischen Glieder der Gleichung, also die Beschleunigungs- oder Trägheitsglieder, ganz zu vernachlässigen. Man erhält dann das Gleichungssystem

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Wir wollen hier diese Gleichungen nicht direkt integrieren, sondern von der Wirbelgleichung bzw. der Gleichung für die Stromfunktion ausgehen und eine Methode entwickeln, die auch für das zugeordnete elastische Problem von Bedeutung ist. Wenn wir annehmen, daß die Strömung stationär und eben ist, d. h. in allen Ebenen parallel der  $xy$ -Ebene den gleichen Verlauf hat, so erhalten wir, wie oben gezeigt ist, für den Wirbeltransport und die Stromfunktion die Gleichungen

$$(2) \quad \mathbf{v} \nabla w = \nu \Delta w; \quad \nu \Delta \Delta \Psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y},$$

die bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder übergehen in

$$(2a) \quad \Delta w = 0, \quad \Delta \Delta \Psi = 0.$$

Es ergibt sich also, daß im Falle der langsamen Strömung die Kurven gleicher Rotation Potentiallinien sind.

Zur Integration der Gleichung für  $\Psi$ , auch im allgemeinen Fall, können wir nun komplexe Hilfsvariable einführen<sup>1)</sup>, indem wir setzen

$$x + iy = z, \quad x - iy = \bar{z}; \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Dann transformieren sich die Operationen in  $x$  und  $y$  in folgender Weise:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

<sup>1)</sup> Vgl. E. Goursat, Sur l'équation  $\Delta \Delta u = 0$ , Bulletin de la Soc. math. de Fr., XXVI, 1898, S. 236—237; ferner für das vorliegende hydrodynamische Problem R. A. Frazer, On the motion of circular cylinders in a viscous fluid. Philos. Transactions of the Royal Soc. London, (A), Vol. 225 (1926), S. 93 ff.

Die Gleichungen (2) können daher ersetzt werden durch

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta \Psi = 4 \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z \partial \bar{z}} \\ 2\nu \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -\frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = i \left[ \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z \partial \bar{z}^2} - \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right] \end{cases}$$

Ferner erhalten wir für den Geschwindigkeitsvektor

$$(4) \quad \begin{cases} v_x + i v_y = -2i \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{z}}; \quad v_x - i v_y = 2i \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \\ v_x = i \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial z} - \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{z}} \right); \quad v_y = - \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \bar{z}} \right). \end{cases}$$

Bei langsamer stationärer Bewegung haben wir die einfache Differentialgleichung

$$(5) \quad \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0,$$

die mit dem System (1) gleichbedeutend ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$(6) \quad \Psi = \frac{1}{8} i [z F_2(\bar{z}) - \bar{z} F_1(z)] + F_3(z) + F_4(\bar{z}),$$

wo die  $F$  beliebige analytische Funktionen bezeichnen.

Für diesen Fall ergeben sich ferner aus (1) mit Hilfe der Transformationsformeln für die Rotation, den mittleren Druck, den Druckgradienten und die Komponenten des Spannungstensors die einfachen Ausdrücke

$$(7) \quad w = \frac{1}{2} i [F_2'(\bar{z}) - F_1'(z)],$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 4\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 4\mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (v_x - i v_y) = 4i\mu \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z^2 \partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (v_x + i v_y) = -4i\mu \frac{\partial^3 \Psi'}{\partial z \partial \bar{z}^2} \end{cases}$$

oder

$$(9) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2} \mu F_1''(z); \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \mu F_2''(\bar{z}),$$

$$p = \frac{1}{2} \mu [F_1'(z) + F_2'(\bar{z})].$$

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = -2p; \quad \sigma_x - \sigma_y = 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 4i\mu \left( \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \bar{z}^2} \right), \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2\mu \left( \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{cases}$$

2. Näherungslösung für die Strömung um einen unendlich langen Kreiszyylinder. Die Strömung um einen Kreiszyylinder ist nicht direkt aus den gegebenen Formeln zu erhalten. Wohl aber läßt sich das

Stromfeld zwischen zwei konzentrischen Kreiszyindern konstruieren, von denen sich der äußere mit der Geschwindigkeit  $u_0$  parallel zur  $x$ -Achse bewegt, während der innere in Ruhe ist. Die Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Zylinder ist dann daraus mit beliebiger Annäherung zu gewinnen. Wenn wir den Radius des inneren Zylinders gleich der Einheit annehmen und bedenken, daß  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ , so sind die Funktionen  $F$  in Gleichung (6) so zu wählen, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0 & \quad \text{für } z\bar{z} = 1, \\ v_x = u_0, v_y = 0 & \quad ,, \quad z\bar{z} = R^2. \end{aligned}$$

Da die Strömung symmetrisch zur  $x$ -Achse verläuft, so muß  $\Psi$  mit  $y$  das Vorzeichen ändern, d. h. es gilt

$$(11) \quad 2i\Psi = zF(\bar{z}) - \bar{z}F(z) + f(z) - f(\bar{z}),$$

$$(12) \quad \begin{cases} v_x + iv_y = -2i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = -zF'(\bar{z}) + F(z) + f'(\bar{z}), \\ v_x - iv_y = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\bar{z}F'(z) + F(\bar{z}) + f'(z). \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen werden erfüllt, wenn die Funktionalgleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} 0 = -\frac{1}{t} F'(t) + F\left(\frac{1}{t}\right) + f'(t) \\ u_0 = -\frac{R^2}{t} F'(t) + F\left(\frac{R^2}{t}\right) + f'(t) \end{cases}$$

für alle Werte des Parameters  $t$  gültig sind. Eliminiert man  $f'(t)$ , so erhält man

$$(14) \quad u_0 = -(R^2 - 1) \frac{F'(t)}{t} + F\left(\frac{R^2}{t}\right) - F\left(\frac{1}{t}\right).$$

Setzt man

$$F(t) = \alpha t^2 + \beta \lg t,$$

so ergeben sich aus (14) durch Koeffizientenvergleich zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$ , aus denen sich

$$\alpha = \frac{\beta}{R^2 + 1} = \frac{u_0}{2(R^2 + 1) \lg R - 2(R^2 + 1)}$$

berechnet. Ferner ergibt sich aus (15)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\alpha + \frac{\alpha R^2}{t^2} + \alpha(R^2 + 1) \lg t, \\ f(t) &= 2\alpha t - \frac{\alpha R^2}{t} + \alpha(R^2 + 1)t(\lg t - 1). \end{aligned}$$

Daher entsteht für die Stromfunktion der Ausdruck

$$(15) \quad 2i\Psi = \alpha(z - \bar{z}) \left[ (R^2 + 1) \lg z\bar{z} - z\bar{z} + \frac{R^2}{z\bar{z}} - (R^2 - 1) \right],$$

der bei Einführung von Polarkoordinaten übergeht in

$$(15a) \quad \Psi = u_0 \sin \varphi \frac{2(R^2 + 1)r \lg r - r^3 - \frac{R^2}{r} - r(R^2 - 1)}{2[(R^2 + 1)\lg R - (R^2 - 1)]}$$

Wenn der innere Kreis den Radius  $a$  hat, so wird

$$(15b) \quad \Psi = u_0 \sin \varphi \frac{2(R^2 + a^2)r \lg \frac{r}{a} - r^3 + \frac{R^2 a^2}{r} - r(R^2 - a^2)}{2[(R^2 + a^2)\lg \frac{R}{a} - (R^2 - a^2)]}$$

Man sieht in der Tat, daß für  $r = a$  die Geschwindigkeiten  $v_x = v_y = 0$  werden, während sich  $\Psi$  für  $r = R$  auf  $\Psi = u_0 R \sin \varphi$  reduziert, also  $v_x = u_0$ ,  $v_y = 0$  wird. Nehmen wir z. B.  $\frac{R}{a} = 10$ ,  $a = 1$ , so ist die Schar der Stromlinien in der Gleichung enthalten

$$y = \frac{C}{202 \lg r + \frac{100}{r^2} - r^2 - 99},$$

nach der die Abb. 42 hergestellt ist. Wenn  $R$  sehr groß ist, so kann man  $\Psi$  angenähert in der Form ansetzen

$$\Psi = u_0 \sin \varphi \cdot r \frac{\lg \frac{r}{a}}{\lg \frac{R}{a}} = C u_0 \sin \varphi \cdot r \cdot \lg r,$$

in der sich schließlich der Zylinderradius ganz heraushebt. Diese Grenzform ist also als Lösung für den Fall der unbegrenzten Flüssigkeit nicht geeignet.

Schreibt man den Ausdruck für  $\Psi$  in der Form

$$\Psi = u_0 \sin \varphi \cdot \chi(r),$$

so ist die Wirbelstärke

$$(16) \quad |w| = \frac{1}{2} \sin \varphi \left[ \chi'' + \frac{1}{2} \chi' - \frac{\chi}{r^2} \right].$$

Einsetzung ergibt die Proportionalität

$$|w| \propto -y \frac{(R^2 + a^2)}{r^2} + 2y.$$

Der Ausdruck rechts ist aber der Imaginärteil des komplexen Potentials

$$w \sim \Im \left[ z + \frac{R^2 + a^2}{2z} \right].$$

Die Linien gleicher Rotation fallen also zusammen mit den Stromlinien einer Potentialströmung, die sich zusammensetzt aus einer Parallelströ-



mung und einer Doppelquelle im Ursprung, und die den Kreis mit dem Radius  $\varrho = \sqrt{\frac{R^2 + a^2}{2}}$  als singuläre Stromlinie enthält.

Wenn man die Randbedingungen für beide Kreise vertauscht ( $v = u_0$  am inneren Kreis  $r = a$ ,  $v = 0$  am äußeren Kreis  $r = R$ ), so erhält man die

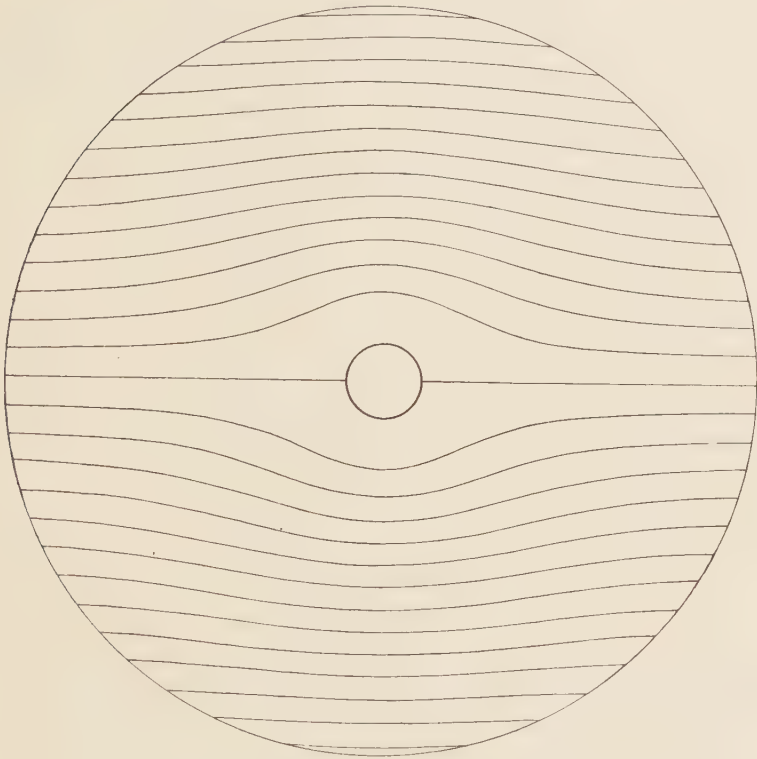


Abb. 42. Langsame zähe Strömung um einen Kreiszyylinder.  
(Näherungslösung nach Frazer.)

absolute Strömung in der Umgebung eines mit der kleinen Geschwindigkeit  $u_0$  bewegten Kreiszyinders für den Fall, daß die Flüssigkeit nach außen von einem größeren konzentrischen Zylinder begrenzt wird. Die Stromfunktion nimmt dann die Form an

$$(17) \quad \Psi = r u_0 \sin \varphi \frac{(r^2 + a^2) \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - 2(R^2 - a^2) \lg \frac{R}{r}}{2(R^2 + a^2) \left[ \lg \frac{R}{a} - 1 \right]}.$$

Zur Konstruktion der Stromlinien kann man die durch

$$(17a) \quad \Psi_{\text{red}} = y \left[ (r^2 + a^2) \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - 2(R^2 + a^2) \lg \frac{R}{r} \right]$$

gegebene reduzierte Stromfunktion benutzen. Setzt man etwa der Abb. 43 entsprechend  $\frac{R}{a} = 6$ ,  $a = 1$ , so erhält man

$$\Psi_{\text{red}} = y \left[ (r^2 + 1) \left( \frac{36}{r^2} - 1 \right) - 74 \lg \frac{6}{r} \right].$$

Die Stromlinien sind, ihre Fortsetzung ins Innere des Kreises mitgerechnet, geschlossene Kurven, die in den Schnittpunkten mit dem

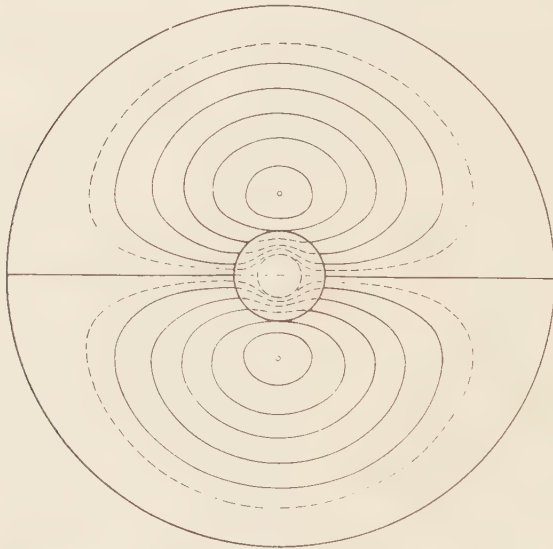


Abb. 43. Absolutströmung um einen Kreiszyylinder, der sich langsam in einer, von einem konzentrischen Zylinder begrenzten zähen Flüssigkeit bewegt.

Kreis horizontale Tangenten haben und zwei ausgezeichnete Nullpunkte (Wirbelzentren) der Strömung umkreisen, deren Abstände  $y = \pm r$  der Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

genügen. Die Nullkurve  $\Psi = 0$  zerfällt in die Achse  $y = 0$ , den Kreis  $r = R$  und einen konzentrischen, innerhalb des Kreises  $r = a$  gelegenen Kreis, der für das gezeichnete Beispiel den Radius  $r \approx 0,5a$  hat.

Da wir bei der später zu besprechenden Bewegung einer Kugel ganz ähnliche Verhältnisse antreffen werden, die sich aber leichter durch den Versuch nachprüfen lassen, so wollen wir die weitere Diskussion auf diese Gelegenheit verschieben.

### § 35. Die Lamb-Oseensche Lösung für einen Kreiszyylinder.

1. Der allgemeine Ansatz. Die im vorigen Abschnitt besprochene Lösung für die langsame Bewegung eines Zylinders in der Flüssigkeit kann nach Oseen in folgender Weise vervollständigt werden. Man geht von der relativen, auf den als fest betrachteten Körper bezogenen Strömung über zur absoluten oder Störungsströmung, d. h. zu dem augenblicklichen, auf den festen Raum bezogenen Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung eines geradlinig bewegten Körpers, und vernachlässigt in der entsprechend transformierten Gleichung die eigentlich quadratischen Glieder (das Produkt aus Rotation und Geschwindigkeit oder die rotatorischen Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften), während man die „halbquadratischen“ Glieder, die die Translationsgeschwindigkeit als Faktor enthalten, beibehält. Ersetzt man also in

$$(1) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$v_x$  durch  $v_x - u_0$  und benutzt die von früher bekannte Umformung, so entsteht

$$(2) \quad -u_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

und daraus durch Vernachlässigung von  $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$  die Oseensche Gleichung

$$(3) \quad u_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \nu \Delta \mathbf{v} = 0.$$

Wenn man auch noch das Geschwindigkeitsquadrat unterdrückt, so entsteht die „erweiterte Stokessche Gleichung“

$$(4) \quad u_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} = 0,$$

die insbesondere für kleine Reynoldssche Zahlen in Betracht kommt und die wir unseren weiteren Rechnungen zunächst zugrunde legen wollen<sup>1)</sup>. Schreibt man die Gleichung (4) in der Form

$$(4a) \quad \left( \Delta + \frac{u_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho \nu} \nabla p$$

und bildet die Divergenz der beiden Seiten, so kommt wegen  $\text{div } \mathbf{v} = 0$

$$\Delta p = 0.$$

Wenn demnach  $\Phi$  eine Potentialfunktion ist, also der Gleichung  $\Delta \Phi = 0$  genügt, so lautet ein partikuläres Integral der Gleichung (4a)

$$(5) \quad \mathbf{v} = \rho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad p = \rho \nu \Phi.$$

<sup>1)</sup> C. W. Oseen, Arkiv for mat., astr. och fysik, Bd. 6, H. 29, 1910; Vorträge aus dem Gebiet der Hydrod. u. Aerod., Innsbruck 1922 (hershg. v. Kármán und L. Civita), S. 123—135, Berlin 1924; Hydrodynamik, Leipzig 1927, S. 30 ff.

Die Gesamtlösung von (4) setzt sich dann aus einer Potentialströmung und einer wirbelbehafteten Strömung zusammen, also

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \mathbf{v}_1,$$

und man erhält durch Einsetzen in (4a) für  $\mathbf{v}_1$  die Gleichungen

$$(6) \quad \left( \Delta + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0,$$

wenn man  $\frac{v_0}{r} = 2k$  einführt.

Für die  $x$ - und  $y$ -Richtung ergeben sich daher mit Benutzung der Relation

$$\Delta \mathbf{v}_1 = -\text{rot rot } \mathbf{v}_1 = -2 \text{ rot } \omega$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta v_{1x} &\equiv \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y^2} = -2k \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \Delta v_{1y} &\equiv \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y^2} = -2k \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned}$$

Führt man weiter

$$2\omega = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

ein, so kann man nach der letzten Gleichung setzen

$$(7) \quad v_{1y} = \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

und man findet dann durch Integration von

$$2\omega = -\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y}$$

für  $v_{1x}$  den Ausdruck

$$(8) \quad v_{1x} = \chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Nach Einsetzen von (7) und (8) in die beiden Gleichungen (6) und Addition gewinnen wir für  $\chi$  die Differentialgleichung

$$(9) \quad \left( \Delta + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = 0.$$

Die Lösung von (5) läßt sich mittels ebener Kugelfunktionen durch den Ansatz

$$\Phi = A_0 \lg r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \lg r + \dots$$

darstellen, wobei wir uns auf die beiden ersten Glieder beschränken wollen.

Um die Funktion  $\chi$  zu bestimmen, zerlegen wir sie in zwei Faktoren, von denen der eine nur von  $x$ , der andere nur von  $r$  abhängig ist, setzen also

$$\chi = X(x) \cdot R(r).$$

Mit Benutzung von Polarkoordinaten wird

$$(9a) \quad \left( J + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + 2k \frac{\partial \chi}{\partial r} \cos \varphi = 0,$$

woraus sich mit  $\chi = e^{-krx} = e^{-kr \cos \varphi}$  für  $R$  die Gleichung der Besselschen Funktion nullter Ordnung

$$(10) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - k^2 R = 0$$

ergibt. Als einzige Lösung dieser Gleichung, die, wie verlangt, im Unendlichen verschwindet, kommt die sogenannte Hankelsche Zylinderfunktion mit rein imaginärem Argument in Betracht<sup>1)</sup>. Wenn wir die gewöhnliche Besselsche Funktion  $n$ ter Ordnung mit  $J_n$  bezeichnen, so haben wir (nach englischer Schreibweise) folgende abgeleitete Funktionen:

$$(11) \quad \begin{cases} I_n(kr) = i^{-n} J_n(ikr), \\ K_n(kr) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} [I_{-n}(kr) - I_n(kr)] = \int_0^\infty e^{-kr \cosh \omega} \cdot \cosh n \omega \, d\omega. \end{cases}$$

Statt  $K_0(kr)$  findet sich in der deutschen Literatur die Funktion  $H_0^{(1)}(ikr)$ , die zu  $K_0$  in der einfachen Beziehung steht

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ikr) = K_0(kr).$$

Für  $I_0(kr)$  und  $K_0(kr)$  gelten die Entwicklungen

$$(12) \quad \begin{cases} I_0(kr) = 1 + \frac{1}{2^2}(kr)^2 + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots, \\ K_0(kr) = -I_0(kr) \lg \frac{1}{2} \gamma kr + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots, \end{cases}$$

wo  $\gamma$  die Mascheronische Konstante ( $\gamma = 1,7811$ ,  $\lg \gamma = 0,57722$ ) bedeutet. Bei kleinem  $kr$  haben wir die Näherungsdarstellung

$$K_0(kr) \underset{kr \rightarrow 0}{\infty} - \lg \frac{1}{2} kr \gamma.$$

Mit Einführung der (Hankelschen) Funktion  $K_0$  erhalten wir demnach als partikuläre Lösung von (9) die Funktion

$$(13) \quad \chi = C e^{-kr \cos \varphi} \cdot K_0(kr),$$

und damit ergeben sich nach (7) und (8) als strenge Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen die Geschwindigkeitsausdrücke

$$(14) \quad \begin{cases} v_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_0 \lg r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \lg r + \frac{C}{2k} e^{-kr \cos \varphi} \cdot K_0(kr) \right] + C e^{-kr \cos \varphi} \cdot K_0(kr), \\ v_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_0 \lg r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \lg r + \frac{C}{2k} e^{-kr \cos \varphi} \cdot K_0(kr) \right], \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Gray and Mathews, A Treatise on the Bessel Functions, London 1922, S. 20f.; ferner Riemann-Weber-v. Mises, Differentialgleichungen der math. Physik, Braunschweig 1927, II. Bd., S. 820 ff.

die im Unendlichen das geforderte Verhalten zeigen, mithin nur noch den Bedingungen am Kreisumfang  $r=a$  anzupassen sind.

Im Anschluß an Oseen kann man die Integrale auch folgendermaßen auffassen. Führt man als lineare Kombination von  $\Phi$  und  $\chi$  die Funktion

$$\Omega = \alpha \Phi + \beta \chi$$

ein, so gilt für  $\Omega$  die Gleichung

$$\left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \Omega = 2k\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_0 \lg r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \lg r + \dots \right].$$

Wir erhalten also auf der rechten Seite wieder eine Potentialfunktion  $\Phi$ , so daß  $\Omega$  der Gleichung

$$(15) \quad \mathcal{A} \left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \Omega = 0$$

genügt, die Oseen seinen Betrachtungen zugrunde legt. Nimmt man als erstes Integral

$$(16) \quad \left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \Omega = 2 \frac{\partial}{\partial x} \lg r$$

an, so setzt sich die Gesamtlösung linear zusammen aus der „erzwungenen“ Verteilung der Partikularlösung von (16) und der Lösung der homogenen Gleichung (9). Da (16) die partikuläre Lösung  $\Omega_1 = \frac{1}{k} \lg r$  hat, so läßt sich die gesamte Lösung in der Form schreiben

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = c_1 \lg r + c_2 \chi.$$

2. Näherungslösung für den Kreiszyylinder<sup>1)</sup>. Wenn man die aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannte Beziehung

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$$

benutzt, so lassen sich die Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten in der Form darstellen

$$(17) \quad \begin{cases} v_x = A_0 \frac{\partial}{\partial x} \lg r + A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lg r - \frac{1}{2} C e^{-kx} \cdot K_0(kr) - \frac{1}{2} C \frac{x}{r} e^{-kx} K_1(kr) \\ v_y = A_0 \frac{\partial}{\partial y} \lg r + A_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \lg r - \frac{1}{2} C \frac{y}{r} e^{-kx} \cdot K_1(kr). \end{cases}$$

Für die Funktion  $K_1(kr)$  gilt die Entwicklung

$$K_1(kr) = \frac{1}{kr} + \frac{1}{2} kr \left[ \lg \frac{1}{2} \gamma kr - \frac{1}{2} + \lg \left( \frac{1}{2} \gamma kr - 1 - \frac{1}{4} \right) \frac{(\frac{1}{2} kr)^2}{1! 2!} + \left( \lg \frac{1}{2} \gamma kr - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \frac{(\frac{1}{2} kr)^4}{2! 3!} + \dots \right].$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. Lamb, Phil. Mag. 21 (1911), S. 112—121; C. W. Oseen, Hydrodynamik, S. 177f.



Wenn  $ka = \frac{au_0}{2\nu} = \frac{1}{4} \frac{2au_0}{\nu} = \frac{1}{4} \Re$  klein ist, so können wir in der Nähe des Kreiszyinders angenähert setzen

$$K_0(kr) \approx -\lg \frac{1}{2} \gamma kr, \quad K_1(kr) \approx \frac{1}{kr};$$

alsdann erhalten wir

$$(17a) \begin{cases} v_x = A_0 \frac{\cos \varphi}{r} - A_1 \frac{\cos 2\varphi}{r^2} - \frac{1}{2} C \lg \frac{1}{2} \gamma kr - \frac{C}{2kr} \cos \varphi (1 - kr \cos \varphi), \\ v_y = A_0 \frac{\sin \varphi}{r} - A_1 \frac{\sin 2\varphi}{r^2} - \frac{C \sin \varphi (1 - kr \cos \varphi)}{2kr}. \end{cases}$$

Am Kreise  $r=a$  wird daher  $v_y=0$  für

$$A_0 = \frac{C}{2k}; \quad A_1 = \frac{Ca^2}{4}$$

und  $v_y=u_0$  für

$$C = \frac{2u_0}{\frac{1}{2} - \lg \frac{1}{2} \gamma ka}.$$

Damit gehen die Geschwindigkeitswerte in der Nähe des Zylinders über in

$$(17b) \begin{cases} v_x = \frac{C}{4} \left[ 1 - 2 \lg \frac{1}{2} \gamma kr + \frac{r^2 - a^2}{r^2} \cos 2\varphi \right], \\ v_y = \frac{C}{4} \frac{(r^2 - a^2)}{r^2} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Für den Druck erhalten wir nach (6)

$$(18) \begin{cases} p = \frac{1}{2} C \rho u_0 \left[ \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \lg r - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lg r \right] \\ = \frac{1}{4} C \rho u_0 \left[ \frac{2 \cos \varphi}{k r} + a^2 \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \right]. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Widerstandes haben wir die axiale Komponente des zum Winkel  $\varphi$  gehörigen Spannungsvektors

$$\tau_{\varphi x} = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi = \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \cos \varphi + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sin \varphi$$

über den Kreisumfang zu integrieren, mithin

$$W = a \int_0^{2\pi} \tau_{\varphi x} d\varphi$$

zu setzen. Das den Druck enthaltende Integral gibt

$$-a \int_0^{2\pi} p \cos^2 \varphi d\varphi = -C\mu \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = -C\mu\pi;$$

ferner wird

$$2\mu a \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_{r=a} \cos \varphi d\varphi = -2\mu C \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} C\mu\pi$$

sowie

$$\mu \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sin \varphi \, d\varphi = \mu C \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi = -\frac{1}{2} C \mu \pi,$$

so daß wir mit Benutzung des oben gefundenen Wertes der Konstanten  $C$  als erste Näherung für den Widerstand bei kleinen Reynoldsschen Zahlen den Ausdruck

$$(19) \quad W = -2\pi\mu C = -\frac{4\pi\mu u_0}{\frac{1}{2} - \lg \frac{1}{2} \gamma k a}$$

erhalten. Führt man die Reynoldssche Zahl in der Form  $\Re = \frac{2au_0}{r}$  ein, so ergibt sich

$$(19a) \quad W = -\frac{8\pi\rho \frac{a}{\Re} u_0^2}{\frac{1}{2} - \lg \frac{1,7811 \cdot \Re}{8}},$$

mithin als Widerstandsbeiwert

$$(19b) \quad c_w = \frac{W}{2a \cdot \frac{\rho}{2} u_0^2} = \frac{8\pi}{\Re(2,002 - \lg \Re)}.$$

In der Abb. 44 sind die teilweise durch Extrapolation ergänzten Versuchswerte (von Wieselsberger u. a.) für kleine Reynoldssche Zahlen neben den theoretischen Werten in logarithmischem Maßstab aufgetragen, und zwar sowohl die aus der Lambschen ersten Näherung

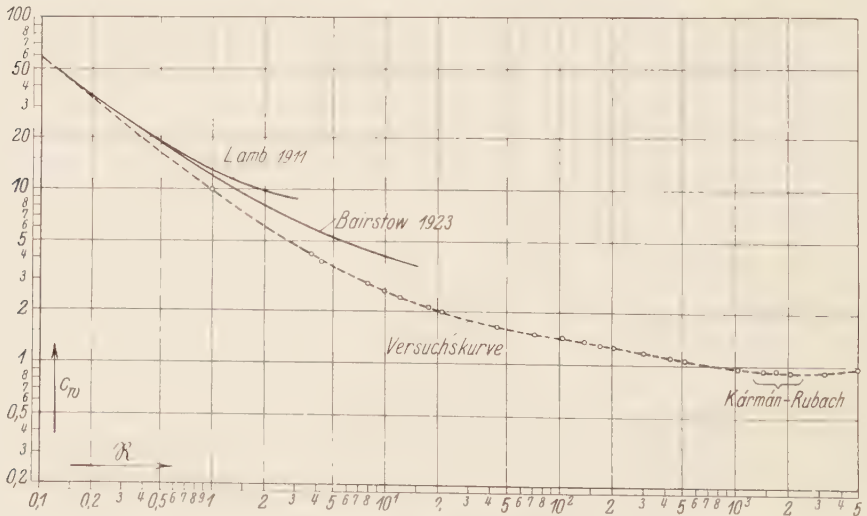


Abb. 44. Widerstandsbeiwerte für einen gleichmäßig bewegten Kreiszyylinder bei kleinen und mittleren Reynoldsschen Zahlen. (Nach F. Eisner.)

als auch die aus der im folgenden Paragraphen zu besprechenden Bairstowschen zweiten Näherung gewonnenen Beiwerte. Obwohl die Normaldruckverteilung (das Verhältnis  $c_p$  des Druckes  $p$  zum Staudruck  $\frac{1}{2}\rho u_0^2$ ) offenbar unrichtig ist, so schließen sich doch die Beiwerte etwa bis zum Werte  $\Re = 1$  ganz gut der Wirklichkeit an<sup>1)</sup>.

### § 36. Berechnung der Stromfunktion und Ergänzung der Lösung.

Zum Zwecke der Diskussion der gefundenen Näherungslösung bestimmen wir die Stromfunktion, die entsprechend den Geschwindigkeitsausdrücken aus zwei Bestandteilen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  sich zusammensetzt. Die dem Potential  $\Phi$  zugeordnete Stromfunktion  $\Psi_1$  genügt den Gleichungen

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_1}{r \partial \varphi}, \quad \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial r},$$

sie ist der imaginäre Bestandteil des komplexen Potentials

$$A_0 \lg z + \frac{A_1}{z},$$

so daß, abgesehen von einer additiven Konstanten,

$$(2) \quad \Psi_1 = A_0 \varphi - A_1 \frac{\sin \varphi}{r}$$

wird. Der zweite Teil  $\Psi_2$  genügt den Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = \left(1 + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x}\right) C e^{-kx} \cdot K_0(kr); \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = -\frac{C}{2k} \frac{\partial}{\partial y} e^{-kx} \cdot K_0(kr),$$

deren Integration in einer bemerkenswerten Arbeit von L. Bairstow<sup>2)</sup> durchgeführt worden ist. Im Hinblick auf die Umständlichkeit der Rechnung, in der ausgiebig Gebrauch von der Theorie der Besselschen Funktionen gemacht wird, begnügen wir uns damit, das Endresultat in seiner allgemeinen Gestalt anzugeben. Man erhält

$$(4) \quad \frac{2k}{C} \Psi_2 = -\varphi + kr \{ \sin \varphi [K_0(I_0 + I_2) + 2K_1 I_1] \\ - \frac{1}{2} \sin 2\varphi [K_0(I_1 + I_3) + 2K_1 I_2] + \dots \},$$

wobei  $K_n$  und  $I_n$  die oben eingeführten Besselschen Funktionen von  $kr$  bedeuten. Wenn man nun  $kr$  nur in der ersten Potenz berücksichtigt, also annäherungsweise

$$K_0 = -\lg \frac{1}{2} \gamma kr, \quad K_1 = \frac{1}{kr}, \quad I_0 = 1, \quad I_1 = \frac{1}{2} kr$$

<sup>1)</sup> Vgl. F. Eisner, Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern, Berlin 1929, S. 17.

<sup>2)</sup> L. Bairstow, B. M. Cave and E. D. Lang, The Resistance of a Cylinder Moving in a Viscous Fluid. Philosoph. Transactions of the Royal Soc. of London, Vol. 223, 1923, S. 420.

setzt, so kommt

$$(5) \quad \frac{2k}{C} \Psi_2 = -\varphi + kr \sin \varphi [1 - \lg \frac{1}{2} \gamma kr],$$

ein Ausdruck, der auch direkt aus dem Näherungswert von  $\chi$  gewonnen werden kann. Im ganzen haben wir daher, wenn wir in (1) die Koeffizienten durch  $C$  ausdrücken,

$$(6) \quad \Psi = \frac{C}{2} \sin \varphi \left[ r(1 - \lg \frac{1}{2} \gamma kr) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} \right].$$

Dieser Ausdruck zeigt Symmetrie in bezug auf eine durch den Kreismittelpunkt gezogene Senkrechte zur Bewegungsrichtung. Daß in größerem Abstand vom Kreiszyylinder die Symmetrie nicht mehr besteht, ergibt sich bereits, wenn wir die Glieder bis zur zweiten Potenz von  $kr$  berücksichtigen. Dann ist zu setzen

$$K_0 = -\lg \frac{1}{2} \gamma kr, \quad K_1 = \frac{1}{kr}, \quad I_0 = 1, \quad I_1 = \frac{kr}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{8} (kr)^2,$$

und man hat

$$K_0(I_1 + I_3) + 2K_1 I_2 = \frac{1}{2} kr \left[ \frac{1}{2} - \lg \frac{1}{2} \gamma kr \right],$$

womit die Stromfunktion übergeht in

$$(7) \quad \Psi = \frac{C \sin \varphi}{2} \left[ r(1 - \lg \frac{1}{2} \gamma kr) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} - \frac{1}{2} kr^2 \cos \varphi \left( \frac{1}{2} - \lg \frac{1}{2} \gamma kr \right) \right].$$

Man sieht hier, daß die Strömung auf der Vorder- und der Hinterseite in größerem Abstand vom Kreiszyylinder verschiedenes Verhalten zeigt. Sie setzt sich im ganzen zusammen aus der wirbellosen Strömung mit dem Potential

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{2k} \chi$$

und einer Strömung mit kontinuierlicher Wirbelverteilung. Der erste Teil von  $\Phi'$  besteht wieder aus einer im Mittelpunkt gelegenen Quelle von der Ergiebigkeit

$$q = 2\pi \frac{C}{2k}$$

sowie aus einer nach der negativen  $x$ -Richtung orientierten Doppelquelle von dem Moment

$$m = 2\pi \frac{C a^2}{4}.$$

Die Quelle wird durch eine gleichgroße Senke des zweiten Teiles  $\frac{1}{2k} \chi$  aufgehoben, wie man ohne weiteres sieht, wenn man die radiale Geschwindigkeit berechnet; es wird nämlich

$$v_{1r} = \frac{C}{2kr} - \frac{C a^2 \cos \varphi}{4 r^2} = \frac{\partial \varphi_1}{r \partial \varphi},$$

$$v_{2r} = -\frac{C}{2kr} + \frac{C}{2} \cos \varphi (1 - \lg \frac{1}{2} \gamma kr).$$

In der Nähe des Kreiszyinders haben wir für die Gesamtströmung

$$(8) \quad v_r = -\frac{Ca^2 \cos \varphi}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{C}{2} \cos \varphi (1 - \lg \frac{1}{2} \gamma kr).$$

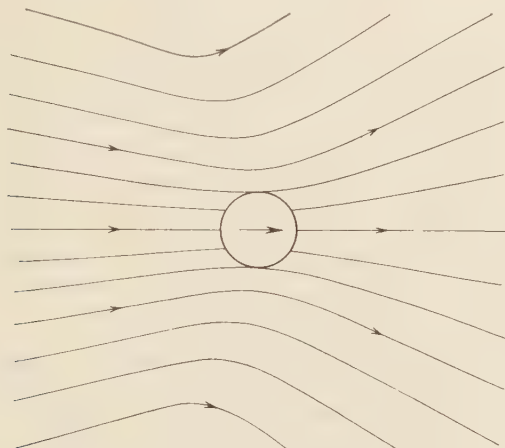


Abb. 45. Absolute Strömung um einen gleichmäßig bewegten Kreiszyinder ( $\Re = 0,5$ ).

Hinter dem Kreiszyinder, insbesondere im Kielwassergebiet, wo  $\cos \varphi$  negativ ist und mit wachsendem  $r$  der 1 sich nähert, überwiegt das negative Vorzeichen (bei vorausgesetzter Kleinheit der Reynoldsschen Zahl), was auf die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \gamma kr < e^{1 - \frac{a^2}{2r^2}}$$

hinauskommt. Setzen wir z. B.  $\Re = 0,4$ ,  $ka = 0,1$ ,  $\frac{r}{a} = \lambda$ , so ergibt sich der ungefähre Grenzwert von  $\lambda$ , wenn man  $\frac{1}{\lambda^2}$  vernachlässigt, aus

$$0,089 \lambda = e; \quad \lambda = \frac{e}{0,089} = 30,5.$$

Die Stromlinien verlaufen also jedenfalls im Kielwassergebiet auf den Kreiszyinder zu. Wenn dagegen  $\cos \varphi$  positiv ist, so wird  $v_r$  positiv. Auf der Vorderseite laufen die Stromlinien, wie zu erwarten war, vom Kreiszyinder weg. In größerer Entfernung vom Zylinder nimmt die Strömung einen einfachen Charakter an, der sich leicht aus dem Verhalten der Besselschen Funktionen für große Argumente herleiten läßt. Wir haben unabhängig von der Ordnungszahl

$$\begin{aligned} K_n(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\propto} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr}, & I_n(kr) &\underset{kr \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{kr}, \\ \chi &\underset{kr \rightarrow \infty}{\propto} C \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-k(r+\alpha)}, \end{aligned}$$

daher

$$\chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr(1+\cos\varphi)} \cdot (1 - \cos\varphi),$$

$$\frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{C}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sin\varphi e^{-kr(1+\cos\varphi)}.$$

Für große Werte von  $r$  hat daher die radiale Strömungsgeschwindigkeit das Verhalten der Funktion

$$v_r \propto \frac{C}{2kr} - \frac{C}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (1 - \cos\varphi) e^{-kr(1+\cos\varphi)}.$$

Der Unterschied der vorderen und der hinteren Seite fällt hier deutlich in die Augen. Außerhalb der Kielwasserzone, also insbesondere auf der Vorderseite, kommt allein das erste Glied in Betracht, da  $e^{-kr(1+\cos\varphi)}$  stärker gegen Null konvergiert wie  $\frac{1}{r}$ , und man sieht, daß die Stromlinien im Unendlichen in radiale Strahlen aus dem Mittelpunkt des Kreiszyllinders übergehen, als ob sie von einer dort konzentrierten Quelle herrühren würden. In der Kielwasserzone dagegen, die etwa durch eine Parabel  $r(1+\cos\varphi) = \lambda = \text{const}$ , deren Brennpunkt im Kreismittelpunkt liegt, begrenzt zu denken ist, ist das erste Glied gegen das zweite zu vernachlässigen, wodurch die Stromschleppes hinter dem Zylinder auch im Unendlichen bestätigt wird. Da hier die Bewegungsrichtung, wie die Ausdrücke für  $v_x$  und  $v_y$  zeigen, durch die Gleichung

$$-\frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

ausgedrückt ist, so sieht man, daß die Stromlinien nicht gegen radiale Strahlen konvergieren, sondern den Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Radiusvektor halbieren (vgl. Abb. 45).

Das Kielwassergebiet ist ferner durch stärkere Wirbelbewegung charakterisiert. Die Wirbelung ergibt sich nach den Formeln ohne weiteres durch die Ableitung von  $\chi$  nach  $y$ . Wir haben daher

$$2w = Ck \sin\varphi e^{-kr \cos\varphi} \cdot K_1(kr).$$

Die Kurven gleicher Wirbelstärke sind nicht symmetrisch; sie ragen stärker in das Gebiet hinter dem Zylinder hinein (vgl. die auf den analogen Fall der Kugel bezügliche Abb. 51). Die Wirbelstärken  $w_v$  und  $w_h$  für zwei gleichweit vom Nullpunkt und der  $x$ -Achse abstehende Punkte vor und hinter dem Zylinder verhalten sich wie

$$\frac{w_h}{w_v} = e^{2kx}.$$

Die Stellen stärkster Rotation liegen auf dem Kreis in den der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{1 - \sqrt{1 + (2ka)^2}}{2ka} \propto -ka$$



entsprechenden Punkten, die demnach von den Punkten  $\varphi = \pm \frac{\gamma}{2}$  der Querachse einen Bogenabstand haben, der der Reynoldsschen Zahl proportional ist.

### § 37. Die Translation eines Rotationskörpers, insbesondere einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit.

1. Die Integration der in § 35, (4) angegebenen Differentialgleichung für die Strömung um einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten festen Körper läßt sich, wie Oseen, Lamb u. a. gezeigt haben, auch im achsensymmetrischen Falle in ähnlicher Weise durchführen wie im ebenen Falle. Insbesondere ist es möglich, die Lösung näherungsweise für kleine Reynoldssche Zahlen einer Kugel als Grenze anzupassen<sup>1)</sup>. In der Ableitung werden wir der übersichtlichen Darstellung von Burgess<sup>2)</sup> folgen, die sich im besonderen auf die Bestimmung der Stromfunktion  $\Psi$  bezieht und die von Zylinder- und sphärischen Koordinaten Gebrauch macht. Dabei wird dann gleichzeitig die klassische Stokessche Lösung als bemerkenswerter Grenzfall auftreten.

Wenn wir achsensymmetrische Zylinderkoordinaten einführen, und die axiale Koordinate  $x$  sowie die dazu senkrechte Radialkoordinate (etwa in der Ebene  $\varphi=0$ )  $y$  nennen, so lautet, wie wir oben gefunden haben, die allgemeine Differentialgleichung für die Stromfunktion

$$(1) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2v_y}{y} - \nu D \right) D \Psi = 0,$$

wobei mit  $D$  die Operation

$$D \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

bezeichnet ist. Wenn wir nun das absolute, den Rotationskörper begleitende Strom- oder Störungsfeld zugrunde legen und annehmen, daß der Körper eine gleichmäßige Bewegung in der positiven  $x$ -Richtung ausführt, so haben wir  $v_x$  durch  $v_x - u_0$  zu ersetzen. Unter Voraussetzung der stationären Beschaffenheit der Strömung erhalten wir dann die Grundgleichung

$$(2) \quad \left[ (v_x - u_0) \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2v_y}{y} - \nu D \right] D \Psi = 0.$$

<sup>1)</sup> Vgl. neben den oben angeführten Arbeiten (C. W. Oseen, Arkiv usw. Bd. 9, Nr. 16, 1913; Hydrodynamik, S. 166 ff.; F. Noether, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 62 (1911).

<sup>2)</sup> R. W. Burgess, The Uniform Motion of a Sphere through a viscous Liquid. Americ. Journ. of Mathem., Vol. 38 (1916), S. 81—96.

Es wird sich in der Folge darum handeln, Näherungslösungen dieser Gleichung für den Fall der bewegten Kugel anzugeben, wobei wir wieder als Grenzbedingung das Haften der Flüssigkeit an der Oberfläche annehmen.

2. Die erste Oseensche Lösung. Vernachlässigen wir zunächst die quadratischen Glieder in (2), so erhalten wir mit  $\frac{u_0}{2r} = k$  die vereinfachte Gleichung

$$(3) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2kD \right) D \Psi = 0,$$

deren Lösung sich wieder wie in den früheren Fällen zusammensetzt aus einem partikulären Integral  $\Psi''$  und der Lösung der homogenen Gleichung

$$(4) \quad D \Psi' = 0.$$

Die Lösungen  $\Psi'$  gehören zu einer Teilströmung, die ein Geschwindigkeitspotential  $\Phi'$  besitzt. Die beiden einander zugeordneten Funktionen  $\Phi'$  und  $\Psi'$  können durch Kugelfunktionen dargestellt werden<sup>1)</sup>. Führen wir daher sphärische Koordinaten  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  ein und die Legendreschen Kugelfunktionen n-ter Ordnung

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{n!} \left[ \cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \vartheta + \dots \right],$$

die bekanntlich der Gleichung

$$0 = n(n+1)P_n \sin \vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_n}{\partial \vartheta} \right)$$

genügen, so haben wir als elementare Potentiale

$$\Phi'_n = a_n \frac{P_n}{r^{n+1}}.$$

Daraus leiten sich dann mit Hilfe der Formeln

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

die entsprechenden elementaren Stromfunktionen her

$$\Psi'_n = c_n \frac{\sin \vartheta}{r^n} \frac{\partial P_n}{\partial \vartheta}.$$

Von Konstanten abgesehen, haben wir daher für die ersten Funktionen

$$\Psi'_0 = \cos \vartheta, \quad \Psi'_1 = \frac{\sin^2 \vartheta}{r}, \quad \Psi'_2 = \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{r^2} \dots$$

<sup>1)</sup> Vgl. die bekannten Bücher über Kugelfunktionen oder H. Schmidt, Einführung in die Theorie der Wellengleichung, Leipzig 1931, § 27, S. 113 f.

Diese Funktionen sind die Lösungen der auf Kugelkoordinaten transformierten Gleichung (4), also von

$$(4a) \quad D\Psi' = \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Psi'}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Um den zweiten Bestandteil  $\Psi''$  zu bestimmen, setzen wir

$$\Psi'' = e^{-kr} \cdot \chi$$

und erhalten dann für  $\chi$  die Differentialgleichung

$$(5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) \chi = 0,$$

die bei Einführung von Kugelfunktionen übergeht in

$$(5a) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \right) - k^2 \chi = 0.$$

Wir setzen jetzt ebenso wie im ebenen Fall die Funktion  $\chi$  als Produkt zweier Funktionen  $R(r)$  und  $\Theta(\vartheta)$  an und gewinnen damit die Teilgleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 R}{dr^2} - k^2 R - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0, \\ n(n+1)\Theta + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) = 0. \end{cases}$$

Die Lösung der ersten Gleichung ist für ganzzahliges  $n$  in endlicher Form darstellbar<sup>1)</sup>. Die zweite Gleichung führt auf Kugelfunktionen. Wir haben

$$(7) \quad \begin{cases} R_n = r^{n+1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+1} (Ae^{kr} + Be^{-kr}), \\ \Theta_n = \sin \vartheta \frac{\partial^n P_n}{\partial \vartheta^n} \end{cases}$$

und erhalten daher, wenn  $A=0$  gesetzt, also vorausgesetzt wird, daß die Funktion im Unendlichen endlich bleibt,

$$\begin{aligned} \Psi'' = e^{-kr(1+\cos \vartheta)} & \left[ b - b_0 \cos \vartheta + b_1 \sin^2 \vartheta \left( k + \frac{1}{r} \right) \right. \\ & \left. + b_2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( k^2 + \frac{3k}{r} + \frac{3}{r^2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

mithin als allgemeine Lösung der Gleichung (3)

$$(8) \quad \begin{aligned} \Psi = c_0 \cos \vartheta + c_1 \frac{\sin^2 \vartheta}{r} + c_2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{r^2} + c_3 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^3} (5 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots \\ + e^{-kr(1+\cos \vartheta)} \left[ b - b_0 \cos \vartheta + b_1 \sin^2 \vartheta \left( k + \frac{1}{r} \right) \right. \\ \left. + b_2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( k^2 + \frac{3k}{r} + \frac{3}{r^2} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa A. R. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig 1889, S. 203.

Diese Lösung ist nun den Grenzbedingungen anzupassen. Die radiale und die dazu senkrechte Geschwindigkeit, also

$$(9) \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad v_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

müssen überall endlich bleiben und im Unendlichen verschwinden. Diese Forderungen sind erfüllt, sobald wir  $b = b_0$  setzen, da in diesem Falle  $\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}$  und  $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$  durch  $\sin \vartheta$  teilbar sind. Ferner muß an der Oberfläche der Kugel

$$v_r = u_0 \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = -u_0 \sin \vartheta$$

werden. Beschränkt man sich nun, um die erste Oseensche Näherung zu erhalten, auf die Glieder mit den Koeffizienten  $b_0, c_0, c_1$ , so lauten die Oberflächenbedingungen

$$(10) \quad \begin{cases} u_0 \cos \vartheta = -\frac{c_0}{a^2} + \frac{2c_1 \cos \vartheta}{a^3} + b_0 \frac{e^{-ka(1+\cos \vartheta)}}{a^2} [1 + ka(1 - \cos \vartheta)], \\ -u_0 \sin \vartheta = \frac{c_1 \sin \vartheta}{a^3} + \frac{b_0 k}{a} \sin \vartheta \cdot e^{-ka(1+\cos \vartheta)}. \end{cases}$$

Der Vergleich der Koeffizienten von 1 und  $\cos \vartheta$  in der ersten und von  $\sin \vartheta$  in der zweiten Gleichung gibt

$$c_0 = b_0, \quad u_0 = \frac{2c_1}{a^3} - \frac{2b_0 k}{a}, \quad -u_0 = \frac{c_1}{a^3} + \frac{b_0 k}{a},$$

woraus

$$c_0 = b_0 = -\frac{3ar}{2}, \quad c_1 = -\frac{u_0 a^3}{4}.$$

Wir erhalten daher als Näherungsausdruck für  $\Psi$  bei kleinen Reynoldsschen Zahlen

$$\Psi = -\frac{u_0 a^3 \sin^2 \vartheta}{4r} - \frac{3}{2} \nu a (1 - \cos \vartheta) e^{-kr(1+\cos \vartheta)} - \frac{3}{2} \nu a \cos \vartheta$$

oder nach Hinzufügung der Konstanten  $-\frac{3}{2} \nu a$

$$(11) \quad \Psi = \frac{3}{2} \nu a (1 - \cos \vartheta) [1 - e^{-kr(1+\cos \vartheta)}] - \frac{u_0 a^3 \sin^2 \vartheta}{4r}.$$

Wenn wir den Exponentialausdruck entwickeln, so ergibt sich

$$\Psi = \frac{u_0 a^2}{4} \left( \frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin^2 \vartheta - \frac{3u_0 a k}{8} r^2 \sin^2 \vartheta (1 + \cos \vartheta) + \dots$$

Vernachlässigen wir den zweiten Ausdruck, setzen also  $\Re = 0$ , so ergibt sich die Lösung von Stokes<sup>1)</sup> für die langsame Bewegung der Kugel, nämlich

$$(12) \quad \Psi = \frac{u_0 a^2}{4} \left( \frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin^2 \vartheta = \frac{3}{4} u_0 a r \sin^2 \vartheta \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right).$$

<sup>1)</sup> G. G. Stokes, Trans. Cambr. Phil. Soc., Bd. 8, 1845.

Zum Vergleich mit der Oseenschen Lösung haben wir das absolute und das relative, durch die Funktion

$$(12a) \quad \Psi_r = -\frac{u_0 r^2 \sin^2 \vartheta}{4} \left[ 2 + \left( \frac{a}{r} \right)^3 - 3 \left( \frac{a}{r} \right) \right]$$

charakterisierte Stromfeld der Stokesschen Lösung in den Abb. 46 u. 47 dargestellt. Während hier die Stromlinien in bezug auf die Ebene  $x=0$  symmetrisch verlaufen, haben wir im Oseenschen Falle, der in den

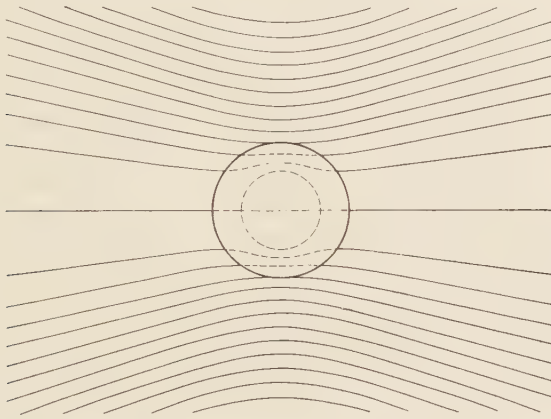


Abb. 46. Absolutströmung um eine gleichmäßig bewegte Kugel nach Stokes ( $\Re = 0$ ).

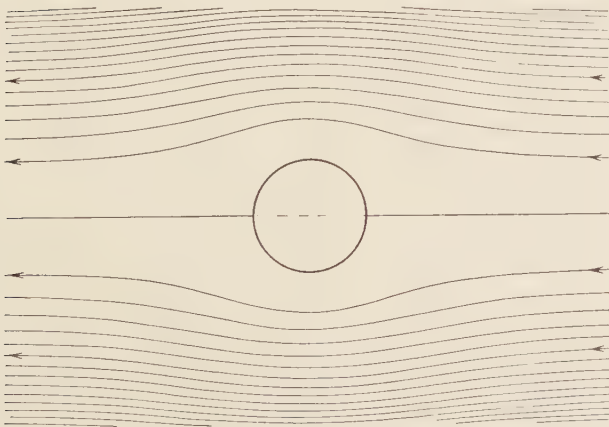


Abb. 47. Relativströmung um eine gleichmäßig bewegte Kugel nach Stokes ( $\Re = 0$ ).

Abb. 48, 49 für  $\Re = 0,4$  gezeichnet ist, ähnlich wie beim Kreiszylinder eine ausgesprochene Asymmetrie der Strömung, die namentlich in der Abb. 49 hervortritt, für die der Radius  $\frac{1}{20}$  des Wertes in der ersten Figur gewählt ist, und die daher die Geschwindigkeitsverteilung in großem Abstände

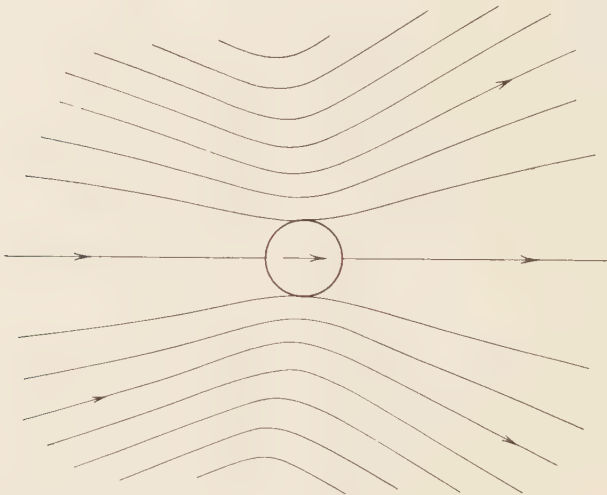


Abb. 48. Absolutströmung um eine gleichmäßig bewegte Kugel nach Lamb-Oseen ( $\Re = 0,4$ ).

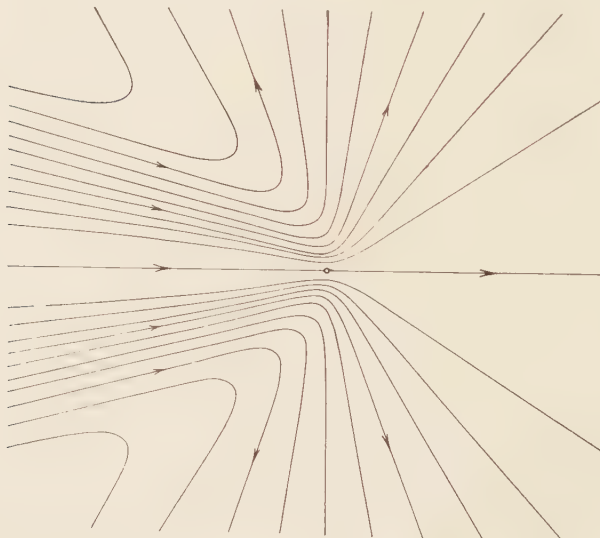


Abb. 49. Absolutströmung nach Lamb-Oseen in größerem Abstand von der Kugel ( $\Re = 0,4$ ).



von der Kugel wiedergibt. Die Diskussion ist in ähnlicher Weise durchzuführen wie im ebenen Falle. Um das Verhalten im Unendlichen festzustellen, müssen wir wieder ein parabolisches, durch  $r(1 + \cos \vartheta) = \lambda$  begrenztes Gebiet herausheben, das etwa dem Kielwassergebiet der wirklichen Strömung entspricht. Außerhalb dieses Gebietes, in dem für  $r \rightarrow \infty$  auch  $r(1 + \cos \vartheta)$  unendlich groß wird, hat man für die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_r = \frac{1}{r^2} \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{3}{2} \frac{r a}{r^2},$$

$$v_\vartheta = 0.$$

Die Strömung geht also im vorderen Gebiet in eine einfache Radialströmung über, die so beschaffen ist, als ob sie hervorgerufen wäre durch eine im Kugelmittelpunkt gelegene Quelle von der Stärke

$$q = 6\pi\nu a.$$

Im Kielwassergebiet, also insbesondere in der Nähe der  $x$ -Achse, wo  $kr(1 + \cos \vartheta)$  als klein angenommen werden kann, haben wir

$$v_r = \cos \vartheta \left[ \frac{3}{2} \frac{u_0 a}{r} - \frac{1}{2} \frac{u_0 a^3}{r^3} \right].$$

Hier wirkt also der Quellströmung eine entgegengesetzte, auf die Kugel zustrebende Strömung entgegen, und die Geschwindigkeit im Unendlichen verschwindet hier wie der reziproke Wert des Radiusvektors.

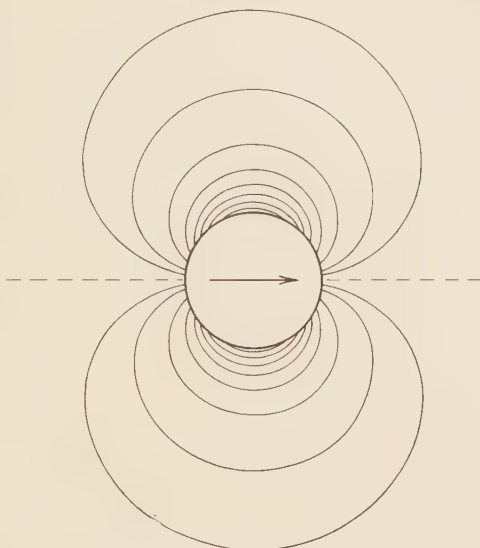


Abb. 50. Kurven gleicher Rotation bei der Stokesschen Strömung um eine Kugel

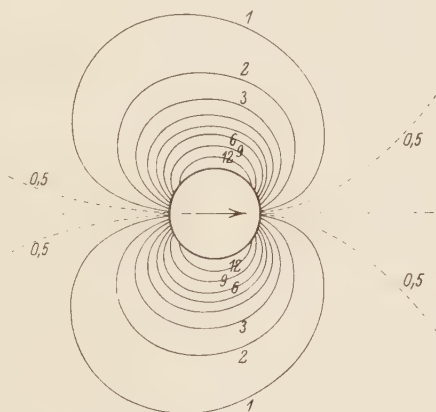


Abb. 51. Kurven gleicher Rotation bei der Lamb-Oseenschen Strömung um eine Kugel ( $R = 0,4$ ).

Die Rotation der Flüssigkeit wird

$$(13) \quad w = \frac{3}{2} u_0 a (1 + kr) \frac{y}{r^3} e^{-k(r+x)}.$$

Für zwei in bezug auf die Ebene  $x = 0$  symmetrisch gelegene Punkte verhalten sich demnach die Wirbelstärken wie

$$w_h : w_v = e^{2kx} : 1.$$

Im Gebiet hinter der Kugel herrscht also jedenfalls stärkere Rotation als vor der Kugel. Die Stelle absolut stärkster Rotation liegt auf dem Kugelrand und entspricht einem Winkel  $\vartheta_0$  etwas größer als  $\frac{\pi}{2}$ , der aus der Reynoldsschen Zahl nach der Gleichung

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1 - |1 + 4k^2 a^2|}{2ka} = \frac{2 - |4 + \Re^2|}{\Re}$$

berechnet werden kann. Wenn man etwa  $\Re = 0,4$ ,  $ka = 0,1$  setzt, so wird  $\cos \vartheta_0 = -0,1$ , also  $\vartheta_0 = \arccos 0,1 = 84^\circ$ .

Eine deutliche Vorstellung der Wirbelverteilung vermittelt die Schar der Kurven gleicher Rotation, die in den Abb. 50 u. 51 für den Stokeschen und den Oseenschen Fall gezeichnet ist.

### § 38. Annäherungslösung der genauen Gleichung.

Die im vorigen Paragraphen gegebene Lösung der Gleichung (3) kann weiter dadurch vervollständigt werden, daß man in der Entwicklung noch weitere Koeffizienten berücksichtigt, oder noch mehr partikuläre Integrale dem Ausdruck für  $\Psi$  hinzufügt. Die Annäherung an die strengen Grenzbedingungen kann dann beliebig weit geführt oder der Fehler, den man begeht, kann mit beliebig hohen Potenzen von  $ka$  verhältnismäßig gemacht werden. Wir wollen uns im Anschluß an Burgess mit der Näherungslösung der genauen Gleichung (2), § 37 beschäftigen, in der auch die quadratischen Geschwindigkeitsglieder vorkommen, weil wir erst dadurch in stand gesetzt werden, eine zuverlässige Widerstandsformel zu gewinnen.

Diese Gleichung erhält in sphärischen Koordinaten die Form

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\ & + \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right) - r \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \\ & - u_0 \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial y}{\sin \vartheta \partial \vartheta} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir nun die gesuchte Näherungslösung nach Analogie mit dem bereits gefundenen Wert in der Form ansetzen

$$\Psi = \sin^2 \vartheta [A_0 + A_1 \cos \vartheta],$$

wo  $A_0$  und  $A_1$  Funktionen von  $r$  sind und  $A_1$  den Faktor  $ka$  enthält, so ergibt sich durch Einsetzen und Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von  $ka$

$$(2) \quad \left( \begin{aligned} & \left( \frac{2A_0}{r^2} - u_0 \right) \left\{ \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 A_0}{dr^2} - \frac{2A_0}{r^2} \right) - \frac{2}{r} \left( \frac{d^2 A_0}{dr^2} - \frac{2A_0}{r^2} \right) \right\} \cos \vartheta \\ & = r \left[ \frac{d^4 A_0}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{dA_0}{dr} - \frac{8A_0}{r^4} + \left( \frac{d^4 A_1}{dr^4} - \frac{12}{r^2} \frac{d^2 A_1}{dr^2} + \frac{24}{r^3} \frac{dA_1}{dr} \right) \cos \vartheta \right]; \end{aligned} \right.$$

daher muß zunächst das von  $\cos \vartheta$  freie Glied verschwinden, also

$$(3) \quad \frac{d^4 A_0}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{dA_0}{dr} - \frac{8A_0}{r^4} = 0,$$

woraus sich für  $A_0$  die Form ergibt

$$A_0 = \frac{a_0}{r} + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^4;$$

die Funktion  $A_0 \sin^2 \vartheta$  genügt, wie man leicht feststellt, der Stokes'schen Gleichung  $DD\Psi=0$ . Wir können im besonderen als  $A_0$  den Faktor von  $\sin^2 \vartheta$  in der oben gegebenen Oseenschen Lösung nehmen, also setzen

$$(4) \quad A_0 = b_0 \left( 3 \frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) - \frac{3}{8} ka u_0 r^2.$$

Die Grenzbedingungen ergeben ferner für  $r=a$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{u_0 a^2}{2} &= (A_0)_{r=a}, & u_0 a &= \left( \frac{dA_0}{dr} \right)_{r=a}, \\ (A_1)_{r=a} &= 0, & \left( \frac{dA_1}{dr} \right)_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$(6) \quad \frac{u_0 a^2}{2} = 2b_0 - \frac{3}{8} ka u_0 a^2; \quad b_0 = \frac{u_0 a^2}{4} \left( 1 + \frac{3}{4} ka \right).$$

Wenn wir jetzt (4) in die mit (3) vereinfachte Gleichung (2) einsetzen mit Benutzung von

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_0}{dr^2} - \frac{2A_0}{r^2} &= -\frac{6b_0}{ar}, & \left( \frac{d}{dr} - \frac{2}{r} \right) \frac{6b_0}{ar} &= -\frac{18b_0}{ar^2}, \\ \frac{2A_0}{r^2} - u_0 &= -u_0 \left( 1 + \frac{3}{4} ka \right) \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{a^3}{2r^3} \right] \end{aligned}$$

und die zweiten Potenzen von  $ka$  vernachlässigen, so ergibt sich

$$(2a) \quad r^4 \frac{d^4 A_1}{dr^4} - 12r^2 \frac{d^2 A_1}{dr^2} + 24r \frac{dA_1}{dr} = \frac{9}{2} \frac{u_0 ka}{r} (3ar^2 - a^3 - 2r^3).$$

Für  $A_1$  erhalten wir dann

$$(7) \quad A_1 = -\frac{3}{32} \frac{u_0^2 a}{\nu r^2} [2r^4 - 3ar^3 + dr^2 a^2 - a^3 r + f].$$

Beachten wir die Bedingungsleichung (5), so finden wir

$$d = 1, \quad f = a^4.$$

Dann wird

$$(7a) \quad A_1 = -\frac{3}{32} \frac{u_0^2 a}{\nu} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 (2r^2 + ra + a^2).$$

Die Näherungslösung  $\Psi = \sin^2 \vartheta (A_0 + A_1 \cos \vartheta)$  wird daher

$$(8) \quad \Psi = \frac{1}{4} u_0 \sin^2 \vartheta \left[ \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \left(3ra - \frac{a^3}{r}\right) - \frac{3}{2} kar^2 \right. \\ \left. - \frac{3}{4} ka \cos \vartheta \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 (2r^2 + ra + a^2) \right].$$

Die daraus abgeleiteten Geschwindigkeiten werden aber im Unendlichen nicht Null. Wenn wir jedoch den Ausdruck (8) mit der Oseenschen Lösung, die der Korrektur zugrunde gelegt wurde, kombinieren, d. h. die nicht in (8) enthaltenen Glieder dieser Lösung hinzufügen, so entsteht

$$(9) \quad \Psi = +\frac{3}{2} \nu a \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) (1 - \cos \vartheta) [1 - e^{-kr(1 + \cos \vartheta)}] - \frac{u_0 a^3}{4} \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \frac{\sin^2 \vartheta}{r} \\ + \frac{3}{16} u_0 ka \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left[ 3ar + \frac{a^3}{r} - a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right].$$

Bezeichnen wir die erste Oseensche Lösung mit  $\Psi_1$  und die jetzige mit  $\Psi_2$  so haben wir

$$(9a) \quad \Psi_2 = \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \Psi_1 + \frac{3}{16} u_0 ka \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left[ 3ar + \frac{a^3}{r} - a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right].$$

Wenn wir den Ausdruck für  $\Psi$  mit  $\frac{8}{ar}$  multiplizieren und die Reynoldssche Zahl  $\frac{2u_0 a}{\nu} = \Re$  einführen, so ergibt sich

$$(9b) \quad \Psi_{\text{red}} = -\Re \frac{a}{r} \left(1 + \frac{3}{16} \Re\right) \sin^2 \vartheta + 12 \left(1 + \frac{3}{16} \Re\right) (1 - \cos \vartheta) \left[ 1 - e^{-\frac{\Re r}{4a} (1 + \cos \vartheta)} \right] \\ + \frac{3}{16} \Re^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left[ 3 \frac{r}{a} + \frac{a}{r} - 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right].$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten hat man die Werte

$$(10) \quad \begin{cases} v_r = -\frac{3\nu a}{2r^2} \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) [e^{-kr(1 + \cos \vartheta)} [1 + kr(1 - \cos \vartheta)] - 1] \\ \quad - \frac{u_0 a^3}{2} \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \frac{\cos \vartheta}{r^3} + \frac{3u_0 ka}{16r^2} (-1 + 3 \cos^2 \vartheta) \left(3ar - a^2 + \frac{a^3}{r} - \frac{a^4}{r^2}\right), \\ v_\vartheta = -\frac{3u_0 a}{4r} \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \sin \vartheta e^{-kr(1 + \cos \vartheta)} \\ \quad - \frac{u_0 a^3}{4} \left(1 + \frac{3}{4} ka\right) \frac{\sin \vartheta}{r^3} - \frac{3u_0 ka}{16r} \sin \vartheta \cos \vartheta \left[ 3a - \frac{a^3}{r^2} + \frac{2a^4}{r^3} \right]. \end{cases}$$

Beide Geschwindigkeiten werden Null für  $r > \infty$ . Für  $r = a$  gehen die Ausdrücke in  $+u_0 \cos \vartheta$  und  $-u_0 \sin \vartheta$  über, wenn man die zweiten und höheren Potenzen von  $ka$  und  $kr$  vernachlässigt. Bis auf die quadratischen Glieder stimmen die Ausdrücke (8) und (9) miteinander überein, woraus sich ergibt, daß (9) in der Umgebung der Kugel der vollständigen Differentialgleichung in dem verlangten Näherungsgrad genügt.

Die Rotation der Flüssigkeit berechnet sich aus der Formel

$$w = \frac{1}{2r \sin \vartheta} DD\psi = \frac{1}{2r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right].$$

Wir erhalten dann

$$(11) \quad w = \frac{3}{4} u_0 a (1 + kr) \left( 1 + \frac{3}{4} ka \right) \frac{\sin \vartheta}{r^2} e^{-kr(1 + \cos \vartheta)} + \frac{3}{16} u_0 \frac{ka}{r} \sin \vartheta \cos \vartheta \left( 9 \frac{a}{r} - 3 \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a^3}{r^3} \right).$$

Die Diskussion gestaltet sich in ganz analoger Weise wie in dem oben besprochenen Falle der ersten Oseenschen Näherung.

### § 39. Vergleich mit dem Versuch; Einfluß der Gefäßwände auf die Bewegung.

Bevor wir einige weitere Folgerungen betrachten, dürfte es zweckmäßig sein, den gefundenen theoretischen Verlauf der Stromlinien mit der Erfahrung zu vergleichen. Eine Übereinstimmung im Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahlen, also großer Zähigkeit und kleiner Geschwindigkeit, würde dann als experimenteller Beweis für die Berechtigung der Oseenschen Methode zu gelten haben. In seinem Lehrbuch bespricht H. Bouasse<sup>1)</sup>, leider ohne literarischen Hinweis, Versuche von Fortépaule, der Kugeln mit verschiedenem Radius (von 0,50 bis 50 mm) in einem mit Zuckersirup gefüllten Gefäß (von quadratischem Querschnitt 240 mm<sup>2</sup>) fallen läßt und das dadurch in der Flüssigkeit hervorgerufene Geschwindigkeitsfeld durch besondere optische Vorrichtungen zur unmittelbaren Anschauung bringt. Die kleinen Luftbläschen in der beleuchteten Meridianebene durch die Bewegungsachse hinterlassen bei entsprechender Kurzaufnahme auf der photographischen Platte kleine Striche (Vektoren), die aneinandergereiht das absolute Strömungsfeld der Kugel ergeben. Aus der Länge der Striche kann ferner auf die Bewegungsgeschwindigkeit der Kugel geschlossen werden. Es ergibt sich, daß die Stromlinien um so unsymmetrischer werden, je größer die Geschwindigkeit

<sup>1)</sup> H. Bouasse, Hydrodynamique générale, Paris 1928, S. 356—361.

keit wird, daß ferner ihr Verlauf in einigem Abstand von der Kugel von dem aus der Theorie berechneten wesentlich abweicht. Während hier die Linien divergieren und sich erst im Unendlichen schließen, umkreisen sie dort einen Wirbelring um die Kugel, dessen Abstand von der Achse etwa der beigegebenen Zeichnung (Abb. 52) entspricht und sich bei einer Vergrößerung oder Verkleinerung der Kugel nur wenig ändert, aber bei Abnahme der Zähigkeit geringer wird. Mit wachsender Geschwindigkeit verschiebt sich der Wirbel aus der Äquatorebene der Kugel nach hinten,

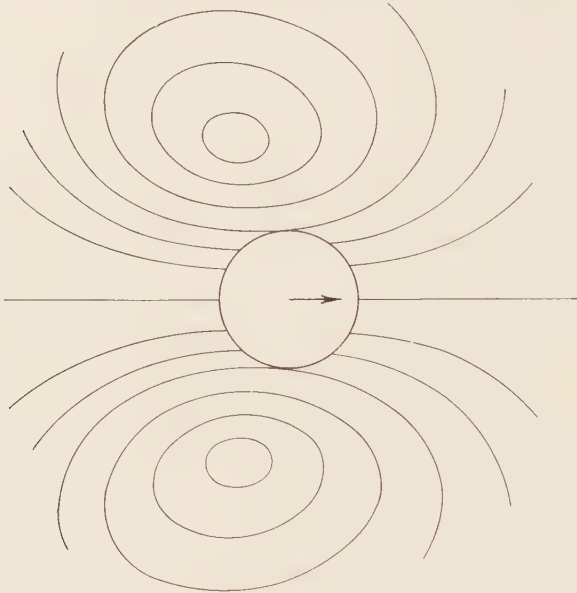


Abb. 52. Bewegung einer Kugel in zäher Flüssigkeit bei kleiner Reynoldsscher Zahl  $\Re \approx 3,5$  (Versuch).

und das umgebende Strombild wird unsymmetrisch verzerrt. Ferner wird, wenn die Kugel sich in der Nähe der Wand bewegt, das ganze Feld eine starke Veränderung erfahren. Mehrere Bilder, die den Einfluß der freien Oberfläche erkennen lassen, sind in dem Lehrbuch von Bouasse zur Darstellung gebracht.

W. E. Williams<sup>1)</sup>, der ähnliche Versuche gemacht hat, verwendet als Flüssigkeit eine Mischung von Wasser und Glycerin. Die Kugel wird hier mittels eines dünnen Verbindungsstückes an einem fahrbaren, durch einen Motor angetriebenen Gestell befestigt und so durch die in einem

<sup>1)</sup> W. E. Williams, On the motion of a sphere in a viscous fluid. Phil. Mag., 29 (1915), S. 526—552.



rechteckigen Trog befindliche Flüssigkeit hindurchgezogen. Die Bewegung der Flüssigkeit wird durch beleuchtetes Aluminiumpulver, das dem Glycerin beigegeben ist, sichtbar gemacht. Die Kugel hatte bei diesen Versuchen einen Radius von 1,25, 0,88 und 0,40 cm; die verwendeten prismatisch gestalteten Gefäße hatten die Abmessungen  $10 \times 10 \times 9$  cm bzw.  $46 \times 18 \times 17$  cm.

Wie auf den Bildern von Fortépaule, zeigen auch hier die absoluten Stromlinien eine zirkulatorische Gestalt zum Unterschiede von dem von Stokes und Oseen angegebenen Resultat der Theorie. Das in Ruhe befindliche Zirkulationszentrum rückt bei wachsender Reynoldsscher Zahl weiter nach hinten, während das Stromliniensystem die für  $\Re \rightarrow 0$  symmetrische Anordnung aufgibt. Man erkennt aber schon aus einer einfachen Überlegung, daß die Umkehr der Stromlinien zur geschlossenen Form durch die Gefäßwandung bedingt ist (vgl. § 34, S. 126). Denn da der Gesamtfluß durch eine Ebene senkrecht zur Bewegung verschwinden muß, so muß die Vorwärtsbewegung der Flüssigkeit durch eine Rückwärtsbewegung kompensiert werden, also jede Stromlinie die Ebene zweimal nach verschiedenen Richtungen durchschneiden.

Dieser Einfluß der Bewegung wird nun, wie Williams gezeigt hat, durch die Rechnung bestätigt. Eine einfache Lösung der Bewegungsgleichungen kann man insbesondere für die Bewegung der Kugel in einer zähen Flüssigkeit erhalten, die von einer größeren konzentrischen Kugel begrenzt wird. Für die langsame Bewegung ( $\Re = 0$ ) haben wir z. B. nach § 34 die Gleichung

$$(1) \quad DD\Psi = 0$$

zu lösen, wo der Operator  $D\Psi$  in Kugelfunktionen die Form hat

$$D\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right).$$

Die Grenzbedingungen besagen, daß die Geschwindigkeit Null wird auf der Oberfläche der äußeren Kugel und gleich der Fortschrittsgeschwindigkeit  $u_0$  auf der Oberfläche der inneren Kugel.

Wenn  $a$  und  $R$  den inneren und äußeren Radius bedeuten, so hat man für  $r = a$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = u_0 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = + u_0 a \sin^2 \vartheta,$$

und für  $r = R$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0.$$

Setzt man für  $\Psi = \Psi_0$  der Gleichung (1) die Form

$$(2) \quad \Psi_0 = u_0 \sin^2 \vartheta \left( \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Er^4 \right),$$

so wird (1) für alle Werte der Konstanten  $A, B, C, E$  erfüllt. Um das Resultat mit einem Versuch von Williams vergleichen zu können, setzen wir  $a=1, R=5,7$ . Dann ergeben sich für die Koeffizienten die Werte  $A=-0,413, B=1,237, C=-0,325, E=0,00339$ , und wir haben also

$$(3) \quad \Psi_0 = u_0 \sin^2 \vartheta \left( -\frac{0,413}{r} + 1,237r - 0,325r^2 + 0,00339r^4 \right).$$

Da bei der Williamsschen Versuchsanordnung die Geschwindigkeit im Abstand  $r=5,2a$  vom Kugelzentrum bereits Null ergab, so wird durch (3) die Strömung auch im Fall einer prismatischen Begrenzung angenähert richtig wiedergegeben.

Zur Herstellung der zweiten Näherung haben wir die Gleichung (2) des § 37, nämlich

$$(1a) \quad \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2v_y}{y} \right) D\Psi = \nu DD\Psi,$$

zu integrieren. Die vollständige Lösung setzt sich zusammen aus  $\Psi_0$ , der Stromfunktion der langsamen Bewegung einer verschwindenden Reynoldsschen Zahl und einer Korrekionsfunktion  $\Psi_1$ , also

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1.$$

Nimmt man auf die Kleinheit von  $\Psi_1$  Rücksicht, so erhält man die Differentialgleichung

$$\nu DD\Psi = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2v_y}{y} \right) D\Psi_1.$$

Setzen wir  $\Psi_0 = \chi_0(r) \sin^2 \vartheta, \Psi_1 = \chi_1(r) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$ , so ergeben sich nach der Rechnung von Williams für  $\chi_0$  und  $\chi_1$  Ausdrücke von der Art

$$(4) \quad \begin{aligned} \chi_0 = u_0 \left( \frac{A}{r} + Br + Cr^3 + Er^4 \right); \quad \chi_1 = \frac{u_0}{\nu} \left[ -\frac{AB}{2r} + \frac{1}{2}B^2r + \frac{1}{2}CB r^2 - \frac{1}{2}EB r^4 \right] \\ + u_0 \left( \frac{F}{r^2} + Gr^3 + Hr^5 + J \right). \end{aligned}$$

Wenn wir dasselbe Beispiel zugrunde legen, erhalten wir auf Grund der Grenzbedingungen außer den bereits ermittelten Werten von  $A$  bis  $D$

$$F = -0,0171, \quad J = -0,824, \quad G = 0,0224, \quad H = 0,000166.$$

Der entsprechende Verlauf der Stromlinien ist für die Reynoldssche Zahl  $\Re=2$  in der Abb. 53 zur Darstellung gebracht, und man sieht die qualitative Übereinstimmung mit den Versuchen. Um die Lage des Wirbelzentrums im ersten Falle der langsamen Bewegung zu bestimmen, hat man

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right) = -\frac{A}{r^2} + B + 2Cr + 4Dr^3 = 0$$

zu setzen. Man erhält mit den angegebenen Werten der Konstanten

$$r \approx 2.$$

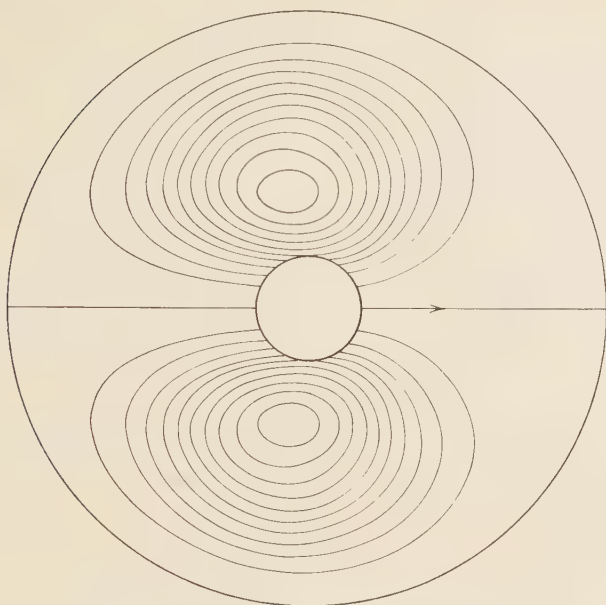


Abb. 53. Stromfeld für die Bewegung einer Kugel innerhalb einer größeren Kugel bei der Reynoldsschen Zahl  $R = 2$ . (Nach Williams.)

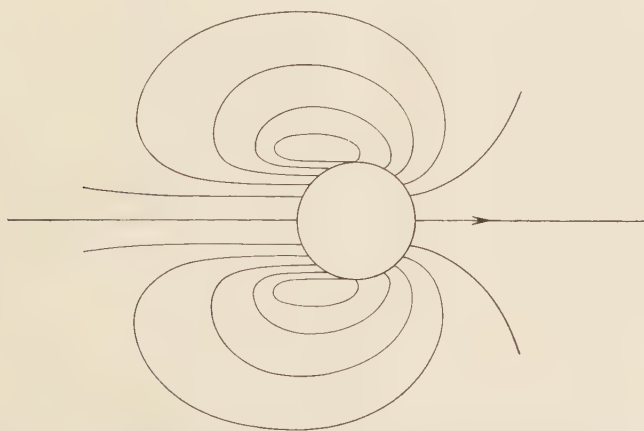


Abb. 54. Stromfeld um eine gleichförmig im Wasser bewegte Kugel bei einer Reynoldsschen Zahl 125. (Versuch von Williams.)

Durch die Theorie wird bestätigt, daß das Zirkulationszentrum mit wachsender Reynoldsscher Zahl nach hinten rückt. Die mit größeren Kennzahlen angestellten Versuche (vgl. Abb. 54) zeigen ferner, daß die Unsymmetrie sich weiter vervollständigt, und der Wirbelkern dem Ur-

sprung des sogenannten Kielwassers sich nähert, in dem die Stromlinien der Bewegungsrichtung parallel laufen, also eine nahezu gleichmäßige Bewegung herrscht. Die weitere Verfolgung der Strömung für den turbulenten Fall wird späteren Kapiteln vorbehalten bleiben.

### § 40. Berechnung des Widerstandes.

Um den Widerstand der Kugel in der zähen Strömung zu bestimmen, beschränken wir uns zunächst auf die erste Näherungslösung der gekürzten Oseenschen Gleichung, die wir nur noch vervollständigen müssen durch Angabe der Druckfunktion. Für die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Druck haben wir

$$(1) \quad \left( J + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v} = \frac{1}{r_0} \Gamma p.$$

Bildet man die Divergenz dieser Gleichung und vertauscht man die Operationen, so erhält man

$$\Gamma p = 0.$$

Benutzt man die oben gegebene Teillösung, die der Stromfunktion  $\Psi'$  und der Potentialfunktion  $\Phi'$  entspricht, so erhält man aus (1) das partiikuläre System

$$\mathbf{v} = \mathcal{F} \Phi', \quad p = \varrho u_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial x}.$$

Mit den oben berechneten Konstanten ergibt sich daher

$$(2) \quad p = \frac{3}{2} \varrho u_0 \nu a \frac{\cos \vartheta}{r^2} - \frac{1}{4} \varrho u_0^2 \frac{a^3}{r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

Der Widerstand berechnet sich durch Integration der auf ein Element der Kugelfläche wirkenden Spannkkräfte. Zwei benachbarte, zur  $x$ -Achse senkrechte Ebenen bestimmen auf der Kugel eine Ringfläche von der Größe  $2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta$ . Bezeichnet man die  $x$ -Komponente des zu einem Punkt dieser Fläche gehörigen Spannungsvektors mit  $\tau_{rx}$ , so hat man für die Resultierende aller tangentialen Kräfte den Ausdruck

$$W = 2\pi a^2 \int_0^\pi \tau_{rx} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Nun ist

$$\tau_{rx} = \sigma_x \frac{x}{r} + \tau_{xy} \frac{y}{r} + \tau_{xz} \frac{z}{r}.$$

Setzt man hierin die früher angegebenen Werte ein, so kommt

$$\begin{aligned} \tau_{rx} &= \cos \vartheta \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{y}{r} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{z}{r} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ &= -p \cos \vartheta + \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} - \mu \frac{1}{r} v_x + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (xv_x + yv_y + zv_z) \\ &= -p \cos \vartheta + \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} - \mu \frac{1}{r} v_x + \mu \frac{\partial v_r}{\partial x} + \mu \frac{v_r x}{r^2}. \end{aligned}$$

Mit  $v_x = v_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta$ ,  $\frac{\partial v_r}{\partial x} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r}$

geht der Ausdruck für  $\tau_{rx}$  über in

$$(3) \quad \tau_{rx} = -p \cos \vartheta + 2\mu \cos \vartheta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \mu \sin \vartheta \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r} \right).$$

Die beiden Ausdrücke

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r} \right)$$

sind natürlich nichts anderes als die normale bzw. die tangentielle Verzerrungskomponente. Bezeichnet man die entsprechenden Spannungen mit  $\sigma_r$  und  $\tau_{r\vartheta}$ , so hat  $\tau_{rx}$  die Form

$$\tau_{rx} = \sigma_r \cos \vartheta - \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta.$$

Der Widerstand setzt sich also aus drei Teilen zusammen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = -2\pi a^2 \int_0^\pi p \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \\ W_2 = 4\mu\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\partial v_r}{\partial r} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \\ W_3 = -2\mu\pi a^2 \int_0^\pi \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r} \right) \sin^2 \vartheta d\vartheta. \end{array} \right.$$

Wenn wir die Geschwindigkeiten aus der Stromfunktion ableiten, so erhalten wir

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{2} \frac{u_0}{a} \cos \vartheta - \frac{3}{2} \frac{u_0}{ka^2} (1 - e^{-ka(1+\cos\vartheta)}) + \frac{3}{2} \frac{u_0}{a} e^{-ka(1+\cos\vartheta)} \\ \quad \quad \quad + \frac{3}{4} u_0 k \sin^2 \vartheta e^{-ka(1+\cos\vartheta)}, \\ (v_\vartheta)_{r=a} = -u_0 \sin \vartheta, \\ \left( \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right)_{r=a} = \frac{1}{2} u_0 \sin \vartheta - \frac{3}{2} u_0 \sin \vartheta e^{-ka(1+\cos\vartheta)} \\ \quad \quad \quad - \frac{3}{4} u_0 k a \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) e^{-ka(1+\cos\vartheta)}, \\ \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{2} \frac{u_0}{a} \sin \vartheta. \end{array} \right.$$

Entwickeln wir die Exponentialfunktion und unterdrücken die ersten Potenzen von  $ka$ , so ergibt die Auswertung der Integrale (4) in erster Annäherung

$$W_1 = 2\mu\pi a u_0, \quad W_2 = 0, \quad W_3 = 4\mu\pi a u_0,$$

also

$$(6) \quad W = 6\mu\pi a u_0.$$

Das ist derselbe Widerstandswert, den zuerst Stokes für die langsame Bewegung der Kugel gefunden hat. Bei kleinen Reynoldsschen

Zahlen ergibt sich also jedenfalls eine Proportionalität des Widerstandes mit dem Reibungskoeffizienten, dem Radius und der Geschwindigkeit. Wenn wir die zweite Näherung zugrunde legen, dann tritt, wie wir leicht erkennen, noch der Faktor  $1 + \frac{3}{4}ka$  zum Widerstandswert hinzu. Wir erhalten dann den zuerst von Oseen angegebenen Ausdruck

$$(7) \quad W = 6\pi\mu a u_0 \left(1 + \frac{3}{4}ka\right) = 6\pi\mu a u_0 \left(1 + \frac{3}{8}\frac{a u_0}{\nu}\right).$$

Wenn wir die Reynoldssche Zahl  $\Re = \frac{2a u_0}{\nu}$  einführen und

$$W = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot \pi a^2$$

setzen, so ergibt sich für den Widerstandsbeiwert  $c_w$  die Formel

$$(7a) \quad c_w = \frac{24}{\Re} \left(1 + \frac{3}{16}\Re\right),$$

die, wie sich zeigen wird, für kleine  $\Re$  ( $< 1$ ) mit den Versuchen gut zusammenstimmt.

#### § 41. Einfluß der Wände auf den Widerstand und Vergleich mit der Messung.

Wenn die Flüssigkeit, in der die Kugel sich bewegt, von festen Wänden begrenzt wird, so wird der Widerstand im allgemeinen eine Vergrößerung erfahren. Zur Bestimmung des Wandinflusses kann man sich etwa der von H. A. Lorentz<sup>1)</sup> ausgebildeten Spiegelungsmethode bedienen, die wir in ihren Grundgedanken wiedergeben wollen. Sei ein stationärer Bewegungszustand  $S_0$  mit der Geschwindigkeit  $v_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  und eine etwa mit der  $yz$ -Ebene zusammenfallende Wand gegeben, so können wir den an der Wand gespiegelten Bewegungszustand  $S_1$  aufsuchen, dem die Geschwindigkeit  $v_1(v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$  entspricht. Zeichnen wir die Wandwerte durch Umklammerung aus, so haben wir

$$(1) \quad (v_{0x}) = -(v_{1x}), \quad (v_{0y}) = (v_{1y}), \quad (v_{0z}) = (v_{1z}).$$

Daraus leitet sich dann der durch Reflexion an der Wand entstehende Zustand  $S_2$  ab, für den die Bedingungen gelten

$$(2) \quad (v_{2x}) = (v_{1x}), \quad (v_{2y}) = -(v_{1y}), \quad (v_{2z}) = -(v_{1z}),$$

der also mit dem ursprünglichen Zustand superponiert die Geschwindigkeit längs der Wand zum Verschwinden bringt.

Haben wir z. B. eine Kugel, deren Radius  $a$  klein ist gegen den Abstand  $l$  von der Wand, und die sich auf der  $x$ -Achse mit der Geschwindig-

<sup>1)</sup> H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoret. Physik, I. Bd., Leipzig 1907, S. 23–42.



keit  $u_0$  bewegt, dann bezieht sich der Zustand  $S_2$  auf die Bewegung einer Kugel im Punkt  $x = -l$ , die mit der Geschwindigkeit  $-u_0$  nach der entgegengesetzten Seite fortschreitet.  $S_0$  und  $S_1$  sind aus der Stokes'schen Lösung sofort angebar. Für die Bewegung  $S_2$  haben wir dann

$$(3) \quad \begin{cases} v_{2x} = v_{1x} - 2x \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ v_{2y} = -v_{1y} - 2x \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ v_{2z} = -v_{1z} - 2x \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z}, \\ p_2 = p_1 + 2x \frac{\partial p_1}{\partial x} - 4\mu \frac{\partial v_1}{\partial x}, \end{cases}$$

wie man leicht feststellt, wenn man  $x=0$  setzt und die Werte in die vereinfachten Stokes'schen Gleichungen einsetzt. Wenn man auf die Kleinheit des Verhältnisses  $\frac{a}{l}$  Rücksicht nimmt, so erhält man die Lorentz'sche Näherungslösung für die Bewegung  $S_2$ , nämlich

$$(4) \quad \begin{cases} v_{2x} = -\frac{3}{4} a u_0 \left[ \frac{1}{r} + \frac{x^2 + l^2}{r^3} + \frac{6lx(x+l)^2}{r^5} \right], \\ v_{2y} = -\frac{3}{4} a u_0 \left[ \frac{(x-l)y}{r^3} + \frac{6lxy(x+l)}{r^5} \right], \\ v_{2z} = -\frac{3}{4} a u_0 \left[ \frac{(x-l)z}{r^3} + \frac{6lxz(x+l)}{r^5} \right], \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt der gespiegelten Kugel bedeutet. Für den Mittelpunkt der Kugel haben wir  $x=l$ ,  $r=2l$ , also

$$v_{2x} = -\frac{9}{8} \frac{a}{l} u_0, \quad v_{2y} = v_{2z} = 0.$$

Die relative Geschwindigkeit der Kugel gegen die Flüssigkeit wird also um  $\frac{9}{8} \frac{a}{l} u_0$  vergrößert. Als Näherungswert des entsprechend vergrößerten Widerstandes erhalten wir

$$(5) \quad W = 6\pi\mu a u_0 \left( 1 + \frac{9}{8} \frac{a}{l} \right).$$

Für den Fall, daß sich die Kugel parallel zur Wand bewegt, gibt Lorentz den Wert

$$(6) \quad W = 6\pi\mu a u_0 \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{l} \right)$$

an. Für die Anwendungen sind besonders die Fälle wichtig, daß sich die Kugel in einem von parallelen vertikalen Wänden oder in einem von einer zylindrischen Wand begrenzten röhrenförmigen Gefäß bewegt. Wie oben lassen sich auch hier die verschiedenen bisher angegebenen Korrekturen

durch einen Zusatzfaktor  $f$  ausdrücken, der etwa unter der Voraussetzung, daß sich die Kugel in der Mitte zwischen zwei um  $2l$  voneinander abstehenden Ebenen bewegt, als eine Funktion  $f\left(\frac{a}{l}\right)$  des Quotienten  $\frac{a}{l}$  darzustellen ist, die sich für große Werte von  $l$  der Einheit nähert. R. Ladenburg<sup>1)</sup> verwendet die Lorentzsche Methode, um den Einfluß der Wände eines kreiszylindrischen, beiderseits durch ebene Grenzflächen abgeschlossenen Gefäßes auf die Bewegung einer Kugel darzustellen, indem er die Zustände superponiert, die durch Reflexion der ursprünglichen Bewegung an den Flächen und dem Körper selbst entstehen. Dabei genügt es in erster Annäherung, die Einflüsse eines unendlich langen Zylinders und zweier paralleler Ebenen gesondert zu behandeln. Sehen wir von der ebenen Begrenzung des Zylinders ab und nennen  $R$  den Radius des Zylinderquerschnittes, so erhält man für  $W$  den Wert

$$(7) \quad W = 6\pi\mu a u_0 \left(1 + 2,4 \frac{a}{R}\right).$$

Auf direktem Wege hat ferner H. Faxén<sup>2)</sup> die Korrektur des Widerstandes für einige Fälle ermittelt. Für den Fall, daß die Kugel in einem zylindrischen Gefäß längs der Achse fällt, findet er z. B.

$$(8) \quad W = \frac{6\pi\mu a u_0}{1 - \frac{3}{4}ak - \frac{a}{R}L(Rk) + 2,09\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 0,95\left(\frac{a}{R}\right)^5},$$

wo  $k = \frac{u_0}{v}$ ,  $L(0) = 2,104$ ,  $L(0.5) = 1.76$ ,  $L(1) = 1.48$ ,  $L(2) = 1.04$ ,  $L(5) = 0.46$  zu setzen ist.

Die entsprechenden Versuche beziehen sich auf die Fallbewegung kleiner Kugeln in Wasser oder einer ausgesprochen zähen Flüssigkeit. Wenn die Kugel unter dem Einfluß ihres Gewichtes in der Flüssigkeit fällt, so ergibt sich für die Endgeschwindigkeit, wenn  $\varrho_1$  die mittlere Dichte der Kugel bedeutet, mit Benutzung von (6) § 40 der Ausdruck

$$u_0 = \frac{2}{9} \frac{(\varrho_1 - \varrho)}{\mu} g a^2,$$

der natürlich nur gültig bleibt, solange  $\frac{u_0 a}{\nu}$  klein ist. Wenn  $t$  die Zeit ist, die eine Kugel braucht, um eine gleichbleibende Strecke  $s$  zu durchfallen, und das Gewicht der Kugel in der Flüssigkeit  $\frac{4}{3}\pi(\varrho_1 - \varrho)a^3g = G'$  gesetzt wird, so hat man

$$t = \frac{6\pi\mu f a s}{G'}.$$

<sup>1)</sup> R. Ladenburg, Ann. der Physik, 4. Folge, Bd. 23 (1907), S. 447—458.

<sup>2)</sup> H. Faxén, Diss. Arkiv för mat., astr. och fysik 17, 1923; Ann. d. Physik, 4. Folge, Bd. 68 (1922), S. 89—119.

Ladenburg benutzt in seinem Versuch Stahlkugeln mit einem Durchmesser 1,5—4 mm in einer filtrierten Lösung von drei Gewichtsteilen Kolophonium mit einem Teil Terpentinöl, der etwa die Reibungszahl  $\mu = 1400 \frac{g}{cm \cdot s}$  entspricht. Der starke Einfluß der Wände tritt deutlich zutage, wenn man die Fallzeiten bei der gegebenen Fallstrecke  $s = 20$  cm für verschiedene Werte  $l$  bestimmt. Man erhält dann:

$l$	4,4 cm	7,94 cm	14 cm
$t$	4055 s	3924 s	3858 s

H. Faxén prüft seine Formel an den Meßresultaten von Westgren, der kleine Kugeln von Mastix oder Gummigutt in Wasser fallen läßt.

Wenn wir aus dem gemessenen Wert von  $t$  die Fallzeit

$$t_0 = \frac{t}{f} = \frac{6\pi\mu a s}{G'}$$

für den Fall, daß keine Wände vorhanden sind, berechnen, so müßte sich für jede Kugel bei verschiedenen Verhältnissen  $\frac{a}{l}$  ein konstanter Wert  $t_0$  ergeben. Wie die Tabellen von Westgren<sup>1)</sup>, die hier auszugsweise für zwei Versuche wiedergegeben sind, zeigen, trifft das etwa bis zu  $\frac{a}{l} < 0,3$  zu. Für größere Werte von  $\frac{a}{l}$  ergeben sich etwas zu hohe Werte von  $t_0$ .

Tabelle von Westgren.

$\frac{a}{l}$	$t$	$t_0$	$\frac{a}{l}$	$t$	$t_0$
0,063	18,8	17,6	0,068	14,0	13,0
0,042	19,0	17,4	0,086	14,4	13,1
0,195	19,2	17,2	0,113	14,8	13,1
0,17	20,6	17,1	0,17	15,8	13,1
0,21	22,0	17,4	0,23	16,8	13,0
0,25	22,0	16,6	0,27	17,4	12,8
0,36	25,8	16,9	0,38	21,0	13,4

Eine Erschwerung der Versuche ist die große Empfindlichkeit der Zähigkeit gegenüber der Temperatur, auf die bereits hingewiesen wurde. Ladenburg benutzt ferner die Fallmethode, um den Einfluß des Druckes in einem Gebiet von 1—200 Atmosphären zu ermitteln. Wenn die Falldauer etwa bei gewöhnlichem Druck 842 s beträgt, so ergibt sich bei einem Druck von 200 Atmosphären ein Wert von 3770 s.

<sup>1)</sup> Westgren, Ann. der Physik, 52 (1917), S. 308.

Was die Widerstandsformel für die Kugel selbst angeht, so haben wir bereits in § 40 den entsprechenden Beiwert in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl  $\Re = \frac{2 a u_0}{\nu}$  angegeben. Aus der Stokesschen und der genaueren Oseenschen Formel ergeben sich die Werte

$$c_{w_s} = \frac{24}{\Re}, \quad c_{w_0} = \frac{24}{\Re} \left( 1 + \frac{3}{16} \Re \right).$$

Tabelle für die Widerstandszahlen von Kugeln.

$\Re$	$2a$	$\frac{a}{R}$	$c_w$ Stokes	$c_w$ Oseen	$c_w$ Ladenburg	$c_w$ Faxén	$c_w$ Versuch
0,0531	0,1131	0,020	451,2	456,5	453,8	459,4	475,6
0,2437	0,1936	0,034	98,48	103,1	101,2	105,1	109,6
0,7277	0,1750	0,031	32,98	38,23	36,11	38,29	38,82
1,493	0,2005	0,036	16,07	22,32	17,88	19,26	19,40

Die beigegebene Tabelle gibt diese theoretischen Widerstandszahlen, ferner die auf unendlich ausgedehnte Flüssigkeit nach den Ladenburgschen und Faxénschen Formeln umgerechneten Zahlen im Vergleich mit neueren und sehr genauen Versuchsergebnissen von Schmiedel<sup>1)</sup>, die sich beziehen auf die Bewegung von Stahl- und Aluminiumkugeln von verschiedener Größe in einem zylindrischen Gefäß mit einem Durchmesser von 5,6 cm, das mit einer Mischung von Wasser und Glycerin gefüllt ist. Die Übereinstimmung der Versuchswerte namentlich mit der Faxénschen Formel, kann als gut und als eine Bestätigung der theoretischen Grundlagen im Bereiche kleiner Reynoldsscher Zahlen betrachtet werden<sup>2)</sup>.

## § 42. Das Widerstandsgesetz für größere Geschwindigkeiten.

In dem zunächst von der Theorie erfaßten Bereich hat die Strömung einen laminaren Charakter, d. h. sie besitzt überall ein System gleichbleibender Stromlinien, längs derer die Flüssigkeitsteilchen relativ oder absolut zu dem bewegten Körper fortschreiten. In diesem Bereich kleiner Reynoldsscher Zahlen oder dem Stromlinienbereich (régime currentiligne), zu dem insbesondere der Stokessche Bereich kleiner Geschwindigkeiten gehört, gilt das im vorigen Abschnitt behandelte Widerstandsgesetz, d. h. das Gesetz einfacher Proportionalität des Widerstandes mit der Geschwindigkeit und dem Radius. Im turbulenten Bereich dagegen,

<sup>1)</sup> H. Schmiedel, Diss. Leipzig 1928; L. Schiller und H. Schmiedel, ZS.F.M. Heft 21, 1928.

<sup>2)</sup> Weitere Literaturangaben finden sich im Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, 1. Teil, S. 224—231.

das durch das Fehlen geordneter Flüssigkeitsbahnen charakterisiert ist, wird der Widerstand etwa mit dem Quadrat des Radius und der Geschwindigkeit  $u_0$  sich ändern. In diesem Gebiet nähert sich also der Widerstandsbeiwert  $c_w$  mehr einer Konstanten. Manchmal nimmt man auch einen Zwischenbereich (régime intermédiaire) an, für den der Widerstand bei gleichbleibender Zähigkeit mit

$$u_0 a \mid u_0 a$$

proportional ist. Wenn man eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit fallen läßt, so wird die Endgeschwindigkeit im laminaren Bereich mit dem Quadrat des Radius, im Zwischenbereich mit dem Radius  $a$  selbst und im turbulenten Bereich wegen

$$\frac{4}{3}\pi(\rho_1 - \rho)ga^3 = \frac{1}{2}c_w \rho \pi a^2 u_0^2$$

mit der Wurzel aus dem Radius verhältnismäßig. Der Wechsel in der Gesetzmäßigkeit des Widerstandes läßt sich durch Fallversuche bestätigen, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen<sup>1)</sup>.

### § 43. Die beschleunigte Bewegung der Kugel in der zähen Flüssigkeit.

Das Problem der mit veränderlicher Geschwindigkeit in der zähen Flüssigkeit bewegten Kugel bietet im allgemeinen größere Schwierigkeiten, die natürlich erheblich anwachsen, wenn man größere Reynoldsche Zahlen berücksichtigt. Für den Fall der langsamen Schwingung einer Pendelkugel hat bereits Stokes<sup>2)</sup> einen Ansatz gegeben und zugleich das Gesetz des Flüssigkeitswiderstandes bestimmt. Die vollständige nicht stationäre Gleichung für die Stromfunktion lautet

$$(1) \quad D\left(D\Psi - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{\nu} \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2v_y}{y}\right) D\Psi.$$

Bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder bleibt

$$(2) \quad D\left(D\Psi - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Wenn wir nun annehmen, daß die Translationsgeschwindigkeit durch eine Exponentialfunktion gegeben sei, also

$$(3) \quad u = u_0 e^{\lambda^2 \nu t},$$

<sup>1)</sup> Vgl. auch W. Bauer, Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln im Wasser. Ann. der Physik, Bd. 80, 4. Folge, 1926; C. Ramsauer, Einfluß freier Oberflächen und fester Wände auf schnell bewegte Kugeln im Wasser. Ann. der Physik, 4. Folge, 1927, S. 721.

<sup>2)</sup> G. Stokes, Camb. Trans. t. IX, 1851.



so können wir dem Stokesschen Ansatz entsprechend für die Stromfunktion einen Ausdruck

$$(4) \quad \Psi_0 = u_0 e^{\lambda^2 r t} \chi_0(r) \sin^2 \vartheta$$

eingeführen. Es ergibt sich dann für die Funktion  $\chi_0$ , wenn  $a$  der Kugelradius ist,

$$(5) \quad \chi_0(r) = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \left( 1 + \frac{3}{\lambda a} + \frac{3}{\lambda^2 a^2} \right) \frac{a}{r} - \frac{3}{\lambda a} \left( 1 + \frac{1}{\lambda r} \right) e^{-\lambda(r-a)} \right\}.$$

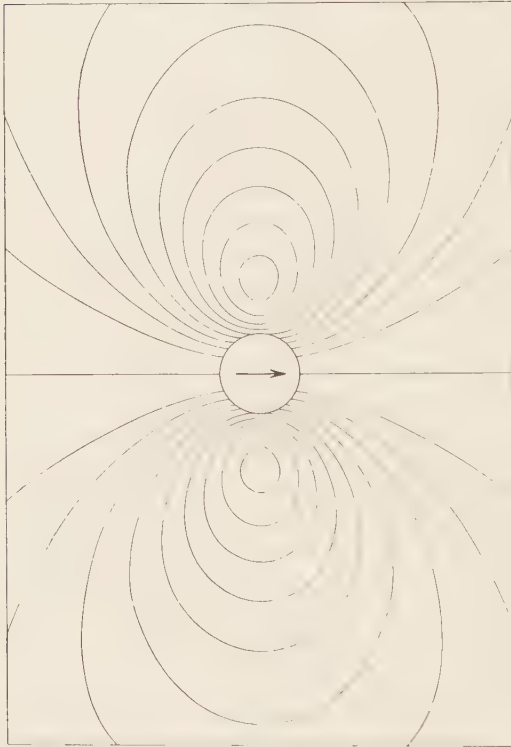


Abb. 55. Absolutes Stromfeld für die beschleunigte Bewegung einer Kugel in zäher Flüssigkeit.

in der Tat genügt  $\chi_0$  der Gleichung (2). Ferner stellt man mit Hilfe der früher gegebenen Formeln leicht fest, daß die Geschwindigkeit  $v_x$  in der  $x$ -Richtung für  $r=a$  den Wert  $u_0$  annimmt.

Das in der Abb. 55 für  $a=1$ ,  $\lambda=1$  gezeichnete augenblickliche Absolutstrombild hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung einer Kugel, die sich gleichförmig in einer nach außen begrenzten Flüssigkeit bewegt (Abb. 53). Das Gesamtfeld stellt eine Zirkulation um eine kreisringförmige Kernlinie dar. Der Radius des Wirbelringes, dessen Ebene senkrecht steht auf der Bewegungs-

richtung und den Mittelpunkt der Kugel enthält, beträgt für den bezeichneten Wert von  $\lambda$  etwa  $r_0=2,3a$ . Da in jedem Punkte der Kernlinie die Geschwindigkeit gleich Null ist, so haben wir  $\left( \frac{d\chi_0}{dr} \right)_{r=r_0} = 0$ .

Um nun eine weitere Annäherung an die Lösung der vollständigen Gleichung (1) im Falle der nach (3) beschleunigten Bewegung der Kugel zu erhalten, setzen wir

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$$



und erhalten dann bei Vernachlässigung der Glieder höherer als 2. Ordnung

$$(6) \quad D \left( D \Psi_1 - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) = \frac{1}{r} \left( v_x \frac{\partial}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2v_x}{y} \right) D \Psi_0 = \frac{1}{r} D' D \Psi_0.$$

In Kugelkoordinaten stellen sich die Operationen  $D$  und  $D'$  nach § 8 folgendermaßen dar:

$$(7) \quad \begin{cases} D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right), \\ D' = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\vartheta \frac{\partial}{r \partial \vartheta} - \frac{2v_r}{r} - \frac{2v_\vartheta}{r} \operatorname{ctg} \vartheta. \end{cases}$$

Die rechte Seite von (6) ergibt eine Funktion von der Form

$$\frac{1}{r} \Phi(r) u_0^2 e^{2\lambda^2 \nu t} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta,$$

wobei

$$\Phi(r) = \frac{\chi_0}{r^2} F' - \frac{\chi_0'}{r} F - \frac{4\chi_0 F}{r^2}$$

und

$$F = \chi_0'' - \frac{2}{r^2}$$

zu setzen ist. Wählen wir daher für  $\Psi_1$  den Ausdruck

$$(8) \quad \Psi_1 = \frac{1}{\nu} u_0^2 e^{2\lambda^2 \nu t} \chi_1(r) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta,$$

so ergibt sich durch Substitution in (6) mit Benutzung von (7)

$$(9) \quad D \left[ \left[ \chi_1''(r) - \frac{6}{r^2} \chi_1(r) - 2\lambda^2 \chi_1(r) \right] e^{2\lambda^2 \nu t} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right] = \Phi(r) e^{2\lambda^2 \nu t} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta.$$

Mit der Abkürzung

$$(10) \quad \chi_1'' - \frac{6}{r^2} \chi_1 - 2\lambda^2 \chi_1 = \xi(r)$$

wird

$$(11) \quad \xi'' - \frac{6}{r^2} \xi = \Phi(r).$$

Wir haben also aus der Gleichung (11), in der  $\Phi$  eine bekannte Funktion ist,  $\xi$  und dann aus (10) die Funktion  $\chi_1(r)$  zu bestimmen.

Beide Differentialgleichungen werden in gleicher Weise dadurch behandelt, daß man die Lösung als Produkt einer partikulären Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung und einer unbekanntenen Funktion ansetzt, die dann durch einfache Quadratur bestimmt werden kann. Eine Lösung der Gleichung

$$\xi'' - \frac{6}{r^2} \xi = 0$$

lautet nun

$$\xi_1 = r^3.$$

Setzt man also  $\xi = \xi_1 \cdot \eta$ ,

so geht (11) über in  $\xi_1 \eta'' + 2 \xi_1' \eta' = \Phi(r)$ .

Setzt man  $\eta' = u \cdot v$  und  $\xi_1 v' + 2 \xi_1' v = 0$ , so wird

$$v = \frac{a}{\xi_1^2} = \frac{a}{r^6}$$

und daher wegen  $\xi_1 u' v = \Phi(r)$

$$u = C + \frac{1}{a} \int r^3 \Phi(r) dr$$

$$\eta' = u \cdot v = C \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^6} \int r^3 \Phi(r) dr.$$

Durch nochmalige Integration und Multiplikation mit  $\xi_1 = r^3$  ergibt sich dann

$$(12) \quad \xi = r^3 \left[ C' + C \int \frac{dr}{r^6} + \int \frac{dr}{r^6} \int r^3 \Phi(r) dr \right].$$

Um die Gleichung (10) zu lösen, benutzt man das partikuläre Integral

$$(13) \quad \zeta(r) = e^{-\sqrt{2}\lambda r} \left[ 2\lambda^2 + 3\sqrt{2} \frac{\lambda}{r} + \frac{3}{r^2} \right]$$

und findet dann wie oben, wenn man  $r^3$  durch  $\zeta(r)$  und  $\Phi$  durch  $\xi(r)$  ersetzt,

$$(14) \quad \chi_1(r) = \zeta(r) \left[ E' + E \int \frac{dr}{\zeta^2(r)} + \int \frac{dr}{\zeta^2(r)} \int \zeta(r) \xi(r) dr \right].$$

Die Stromfunktion  $\Psi$  kann dann in der Form geschrieben werden

$$(15) \quad \Psi = u_0 e^{\lambda^2 \nu t} \chi_0(r) \sin^2 \vartheta + \frac{u_0^2}{\nu} e^{2\lambda^2 \nu t} \chi_1(r) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

$$= u \sin^2 \vartheta \left[ \chi_0(r) + \frac{u}{\nu} \chi_1(r) \cos \vartheta \right].$$

W. E. Williams hat zur Konstruktion des Strombildes die Werte der Funktionen  $\chi_0$  und  $\chi_1$  für zwei Werte von  $\lambda$ ,  $\lambda = 0.09$  und  $\lambda = 1$  und für eine Reihe von  $r$ -Werten berechnet. Es ergibt sich dann in Übereinstimmung mit dem Versuch, daß das Stromliniensystem mit zunehmender Reynoldsscher Kennzahl seine Symmetrie in bezug auf die Mittelebene mehr und mehr verliert.

#### § 44. Eine momentan aus der Ruhe in Bewegung versetzte Kugel in der zähen Flüssigkeit.

Wenn wir wie im vorigen Abschnitt sphärische Polarkoordinaten zugrunde legen und die Bewegung als gleichmäßig voraussetzen, so haben wir zu verlangen, daß für einen von Null verschiedenen Wert von  $t$  an der Oberfläche der Kugel die Bedingungen

$$(1) \quad v_r = \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = u_0 \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = -\frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_0 \sin \vartheta$$

erfüllt sind, und die Geschwindigkeit im Unendlichen gegen Null konvergiert. Bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder der Grundgleichung können wir die Stromfunktion  $\Psi$  setzen

$$(2) \quad \Psi = (\chi_1 + \chi_2) \sin^2 \vartheta,$$

wo  $\chi_1$  und  $\chi_2$  Funktionen von  $r$  und  $t$  sind, die den Gleichungen<sup>1)</sup> genügen

$$(3a) \quad \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} - \frac{2\chi_1}{r^2} = 0, \quad (3b) \quad \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} - \frac{2\chi_2}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}.$$

Nach § 28 können wir für (3a) eine Partikularlösung in der Form anschreiben

$$(4) \quad \chi_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2r\sqrt{\nu t}} \int_0^\infty \varphi(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Setzen wir ferner  $\chi_2 = r e^{-\lambda \nu t} \frac{dw}{dr}$ , wo  $w$  eine Funktion von  $r$  ist, so ergibt sich der Ausdruck

$$r w = A \cos \lambda (r - a + \alpha),$$

in dem  $A$  und  $\alpha$  Integrationskonstanten bedeuten. Man hat dann

$$(5) \quad \chi_2 = A r \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\lambda^2 \nu t}}{r} \cdot \cos \lambda (r - a + \alpha).$$

Integriert man nun in bezug auf die Variable  $\lambda$  zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$ , indem man die trigonometrische durch die Exponentialfunktion darstellt und die bekannte Formel benutzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\lambda^2 \pm b\lambda} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}},$$

so erhält man eine weitere Lösung

$$(6) \quad \chi_2 = \frac{A r \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu t}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} \right).$$

Ersetzt man ferner  $A$  durch  $F(\alpha)$  und integriert zwischen denselben Grenzen, so erhält man die Lösung

$$(7) \quad \chi_2 = \frac{r\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu t}} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{F(\alpha)}{r} e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Ausführung der Differentiation und partielle Integration ergibt

$$(7a) \quad \chi_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \int_0^\infty \left[ \frac{F(\alpha)}{r} + F'(\alpha) \right] e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \left[ F(\alpha) e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} \right]_0^\infty.$$

<sup>1)</sup> Vgl. A. B. Basset, A Treatise on Hydrodynamics, P. II., Cambridge 1888, S. 286 f.

Wenn man jetzt  $F(\alpha)$  so bestimmt, daß  $F(0)=0$  und  $F(\alpha)e^{-\alpha^2}=0$  wird für  $\alpha=\infty$ , so verschwindet der letzte Teil des Ausdrucks für  $\chi_2$ , und es bleibt im ganzen

$$(8) \quad \Psi = \frac{\sin^2 \vartheta}{2r} \left| \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-4\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right| \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{F(\alpha)}{r} + F'(\alpha) \right) e^{-\frac{(r-\alpha+\alpha)^2}{4\alpha t}} d\alpha.$$

Bildet man die Geschwindigkeitskomponenten, so ergibt sich durch eine geringe Umgestaltung der Integrale, daß der Ansatz

$$F(\alpha) = \frac{3u_0 a \alpha^3}{2\pi}, \quad \varphi(\alpha) = \frac{u_0 a}{\pi} \left( \frac{3}{2} \alpha^2 + 3a\alpha + a^2 \right)$$

die Randbedingungen (1) erfüllt. Das läßt sich auch auf folgendem Wege direkt nachweisen. Die Stromfunktion erhält dann nämlich die Form

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{u_0 a \sin^2 \vartheta}{2r \sqrt{\pi} \sqrt{t}} \int_0^{\infty} \left( \frac{3}{2} \alpha^2 + 3a\alpha + a^2 \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4\alpha t}} d\alpha \\ &\quad - \frac{3u_0 a \sin^2 \vartheta}{2\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \int_0^{\infty} \left( \frac{\alpha^2}{2r} + \alpha \right) e^{-\frac{(r-\alpha+\alpha)^2}{4\alpha t}} d\alpha. \end{aligned}$$

Setzt man im ersten Integral  $\frac{\alpha}{\sqrt{t}} = q$ , im zweiten Integral  $r - \alpha + \alpha = 2q\sqrt{\pi t}$ , so kommt

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{u_0 a \sin^2 \vartheta}{2r \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left( 12q^2 \pi t + 12aq \sqrt{\pi t} + 2a^2 \sqrt{\pi t} \right) e^{-q^2} dq \\ &\quad - \frac{3u_0 a \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r-a}{2\sqrt{\pi t}}}^{\infty} \left( \frac{1}{2r} (2q\sqrt{\pi t} - r + a)^2 + 2q\sqrt{\pi t} - r + a \right) e^{-q^2} dq. \end{aligned}$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich auf elementare Funktionen und auf das Fehlerintegral

$$\int_0^q e^{-q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_e(q)$$

zurückführen. Man erhält zunächst unmittelbar oder durch partielle Integration folgende Formeln

$$J_1 = \int_{q_0}^{\infty} e^{-q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - F_e(q_0)],$$

$$J_2 = \int_{q_0}^{\infty} q e^{-q^2} dq = -\frac{1}{2} [e^{-q^2}]_{q_0}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-q_0^2},$$

$$J_3 = \int_{q_0}^{\infty} q^2 e^{-q^2} dq = -\left[\frac{1}{2} q e^{-q^2}\right]_{q_0}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} e^{-q^2} dq = \frac{1}{2} q_0 e^{-q_0^2} + \frac{1}{4} \sqrt{\pi} [1 - F_e(q_0)].$$

Wegen  $F_e(q_0) = 0$  ergibt sich also

$$(8a) \quad \Psi = \frac{u_0 a \sin^2 \vartheta}{2r} \left( 3vt + 6a \sqrt{\frac{vt}{\pi}} + a^2 \right) - \frac{3u_0 a \sin^2 \vartheta}{2r\sqrt{\pi}} \sqrt{vt} \left\{ (r+a) e^{-\frac{(r-a)^2}{4vt}} + \sqrt{vt} \left( 1 - \frac{r^2 - a^2}{2vt} \right) \left[ 1 - F_e \left( \frac{r-a}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \right\}.$$

Wenn man  $r=a$  setzt, so nimmt  $\Psi$  die Form an

$$\Psi_{r=a} = \frac{a^2 u_0 \sin^2 \vartheta}{2},$$

aus der sich ohne weiteres erkennen läßt, daß die erste der Gleichungen (1) für jedes von Null verschiedene  $t$  erfüllt ist. Ebenso folgt aus

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{u_0 a \sin^2 \vartheta}{2r^2} \left\{ - \left( 3vt + 6a \sqrt{\frac{vt}{\pi}} + a^2 \right) + 3 \sqrt{\frac{vt}{\pi}} (r+a) e^{-\frac{(r-a)^2}{4vt}} + 3vt \left( 1 + \frac{r^2 + a^2}{2vt} \right) \left[ 1 - F_e \left( \frac{r-a}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \right\}$$

die Beziehung

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=a} = u_0 a \sin^2 \vartheta,$$

mithin

$$(v_3)_{r=a} = -u_0 \sin \vartheta.$$

Da ferner für  $t \rightarrow 0$ ,  $\frac{r^2}{2\sqrt{vt}} \rightarrow \infty$  die Integrale  $J_1, J_2, J_3$  verschwinden, so nimmt die Stromfunktion die Gestalt an

$$\Psi_{t \rightarrow 0} = \frac{u_0 a^3 \sin^2 \vartheta}{2r}.$$

Das ist aber die Stromfunktion für die entsprechende reibungslose Strömung<sup>1)</sup>. Zu Beginn der Bewegung der Kugel bildet sich also eine Potentialströmung um die Kugel aus, die aber nicht existenzfähig ist und sofort durch eine Reibungsströmung ersetzt wird. Für  $t \rightarrow \infty$  werden die Integrale mit  $q_0 = 0$

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad J_2 = \frac{1}{2}, \quad J_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

und die Stromfunktion geht über in die Stokesche Form

$$\Psi_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} u_0 a^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right),$$

<sup>1)</sup> Vgl. W. Müller, Mathem. Strömungslehre, S. 57.

die bereits früher geometrisch veranschaulicht worden ist. Um den Gesamtverlauf der Bewegung zu übersehen, haben wir den von  $\vartheta$  unabhängigen Faktor  $\chi(r, t)$  von  $\Psi$  für  $t=0$ ,  $t\nu=1$ ,  $t\nu=4$  und  $t=\infty$ , bei  $u_0=1$ ,  $a=1$  in Abhängigkeit vom Radius  $r$  dargestellt. Alle Kurven bis auf die zu  $t=0$  gehörige, die als singuläre Kurve der Schar  $\chi(r, t)$  zu betrachten ist, beginnen mit derselben Tangentensteigung

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_{r=a} = 1.$$

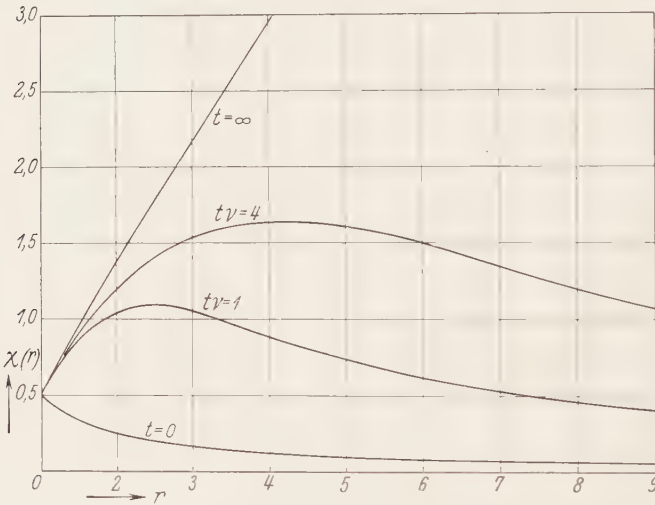


Abb. 56. Zur Konstruktion der Strömung um eine momentan aus der Ruhe in Bewegung versetzte Kugel.

Wenn  $t$  endlich und von Null verschieden ist, so erreicht  $\chi(r)$  für ein bestimmtes  $r$  ein Maximum, dem eine Nullstelle der Geschwindigkeit entspricht. Das Maximum und der Wert des zugehörigen Radius werden um so größer, je größer  $t$  wird. Wir haben das absolute Stromfeld für den Fall  $t\nu=1$  gezeichnet, um den augenblicklichen Bewegungszustand in der Umgebung der Kugel zu verdeutlichen (Abb. 57). Man sieht, daß, wie bei jeder beschleunigten Translation der Kugel, ein ringförmiges Zirkulationsfeld entsteht um den Nullkreis der Geschwindigkeit als Kern, der in dem Falle langsamer Bewegung in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegt. Dieser Zirkulationsring erweitert sich sehr schnell mit der Zeit und wird im Grenzfall der Stokesschen Strömung unendlich groß. Eine interessante, bisher nicht behandelte Frage wäre die Feststellung der wirklichen Bewegungsbahnen



der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die auf die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \chi(r); \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\sin \vartheta}{r^2} \chi'(r)$$

hinausläuft. Es scheint aussichtslos zu sein, diese Gleichungen ohne Benutzung graphischer Hilfsmittel zu lösen.

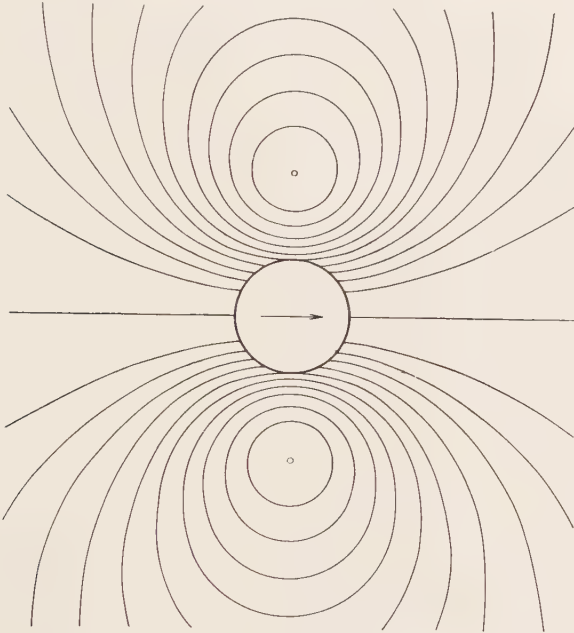


Abb. 57. Strömung um eine plötzlich in Bewegung versetzte Kugel  
( $\nu t: a^2 = 1, \Re = 0$ ).

Neuerdings ist die Lösung des Problems der beschleunigten und plötzlich einsetzenden Bewegung einer Kugel durch J. Boussinesq<sup>1)</sup> und C. W. Oseen<sup>2)</sup> wesentlich vervollständigt und auf den Fall verallgemeinert worden, daß die Translationsgeschwindigkeit  $u$  beliebig mit der Zeit veränderlich ist. Auch für die Kraft, die von der Flüssigkeit auf die Kugel ausgeübt wird, läßt sich ein allgemeiner Ausdruck angeben, über dessen Herleitung und Diskussion in dem Oseenschen Lehrbuch das Nähere nachgelesen werden möge.

<sup>1)</sup> J. Boussinesq, *Théorie de la chaleur*, II, Paris 1903, S. 224.

<sup>2)</sup> C. W. Oseen, *Hydrodynamik*, S. 132—134; *Arkiv för mat., astr. och fys.* Bd. 6, 1904; Bd. 14, 1919.

## ACHTES KAPITEL.

# Theorie des Widerstandes für große Reynoldssche Zahlen (nach Prandtl).

### § 45. Reibungs- oder Grenzschicht.

Die Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte haben keine Gültigkeit für den Fall größerer Reynoldsscher Zahlen oder kleiner Zähigkeit. Da aber gerade das Verhalten der Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, also insbesondere von Luft und Wasser, in der Umgebung fester Körper in technischer Beziehung von hervorragender Bedeutung ist, so wird es nötig sein, diesem Falle eine eingehende, von physikalischen Gesichtspunkten ausgehende Betrachtung zu widmen.

Wenn wir die innere Reibung und das Haften der Flüssigkeit an den festen Wänden als die beiden grundlegenden Eigenschaften aussprechen dürfen, deren eigenartige Wechselwirkung den Bewegungswiderstand erzeugt, so erscheint die Tatsache entscheidend, daß das Haften an dem Körper unabhängig von der Reibung auch dann eintritt, wenn diese Reibung außerordentlich klein ausfällt. Diese Haftung bedingt aber in der unmittelbaren Nachbarschaft des Körpers bei einer nicht langsamen Bewegung ein stärkeres Geschwindigkeitsgefälle normal zur Oberfläche, und dieser Geschwindigkeitsgradient gibt wieder Veranlassung für das Zustandekommen von Scherkräften, die jedenfalls unvergleichlich größer sind als die in der freien Flüssigkeit auftretenden Tangentialspannungen. Diese „freien“ Scherkräfte sind sogar so klein, daß die Strömung außerhalb einer gewissen, der Oberfläche aufliegenden Grenz- oder Reibungsschicht als Potentialströmung angesprochen werden kann. Nur in diesem Gebiet können die Eulerschen bzw. Bernoullischen Gleichungen als angenähert gültig vorausgesetzt werden, während sie in der Grenzschicht nicht mehr zutreffen und durch die Stokes-Navierschen Gleichungen ersetzt werden müssen. Je kleiner die Reibung ist, desto schärfer tritt der Unterschied zwischen der Potentialbewegung und der Grenzschichtbewegung, also insbesondere zwischen den Reibungsspannungen in beiden Gebieten, zutage. Da aber gerade, wie sich zeigen wird, in diesem Spannungsgefälle der Ursprung zu suchen ist für die Umgestaltung des Strombildes, namentlich auf der hinteren Seite des umströmten Körpers, so ist auch die Entstehung der daraus ableitbaren Kräfte, die weder die Theorie der reibungslosen noch der reibungsstarken Flüssigkeit zu erklären vermag, insbesondere des Formwiderstandes und der Auftriebskraft wesentlich durch die Kleinheit der Reibung bedingt.

Die genauen Vorgänge wollen wir zunächst in qualitativer Beziehung an Hand der beigegebenen Figuren verfolgen, die sich auf die Umströmung eines zylindrischen konvexen und stetig gekrümmten Profiles beziehen.  $O$  sei der Staupunkt der Strömung und  $M$  der Punkt, in dem die Geschwindigkeit der im Beginn der Bewegung sich ausbildenden relativen Potentialströmung den größten Betrag längs des Körpers erreicht

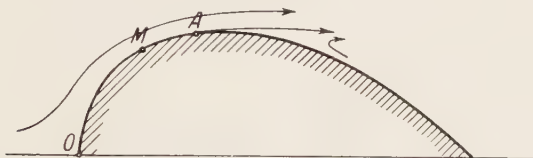


Abb. 58. Ablösung der Strömung um eine gekrümmte Oberfläche.

reicht; ferner sei  $A$  der noch zu bestimmende Punkt, in dem die Strömung sich von der Kontur ablöst (Abb. 58). Die kurze Zeit nach dem Beginn der Bewegung des Körpers sich ausbildende relative Geschwindigkeitsverteilung kann so dargestellt werden, daß längs einer Normalen innerhalb der Grenzschicht  $G$  von der kleinen, mit der Geschwindigkeit veränderlichen Dicke  $\delta$  die Stromgeschwindigkeit vom Werte

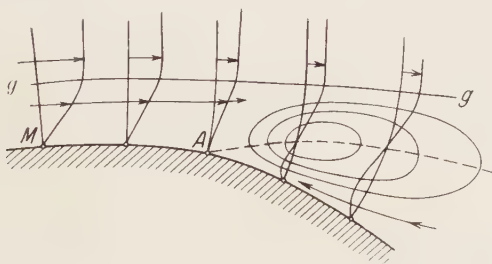


Abb. 59. Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht und Wirbelentwicklung.

Null an der Oberfläche bis zu einem Werte  $V$  an der Grenze  $gg$  ansteigt, die gleichzeitig das Gebiet  $P$  der Potentialströmung abschließt. Der wesentliche, weiterhin noch näher zu begründende Gedanke der Grenzschichttheorie besteht nun in der Annahme, daß der Druckgradient normal zur Grenzschicht vernachlässigbar klein ist, oder daß dieselbe Druckverteilung, wie sie an der Grenze  $gg$  der Potentialbewegung herrscht, auch im Gebiete  $G$  bestehen bleibt. Beim Anstieg der Geschwindigkeit auf der Strecke  $OM$  fällt der Druck vom Staudruck in  $O$  bis zum Kleinstwert ab, so daß die resultierende Druckwirkung

in die Richtung der Strömung fällt. Beim Geschwindigkeitsabfall vom Punkte  $M$  an dagegen muß die Strömung in das Gebiet höheren Druckes eindringen. Da sie aber infolge der Bremsung innerhalb der Grenzschicht durch die Schubkräfte nicht mehr die Geschwindigkeit besitzt, die gemäß der Bernoullischen Gleichung erforderlich wäre, um den erhöhten Druck zu überwinden, so wird eine resultierende, der Stromrichtung entgegengesetzte Druckwirkung entstehen, die von einer bestimmten Stelle  $A$  an die Strömung im unteren Teil der Grenzschicht zur Umkehr und daher die Grenzschicht zur Ablösung von der Körperoberfläche zwingt (Abb. 59). Diese Ablösung beginnt an der Stelle, wo der Geschwindigkeitsgradient

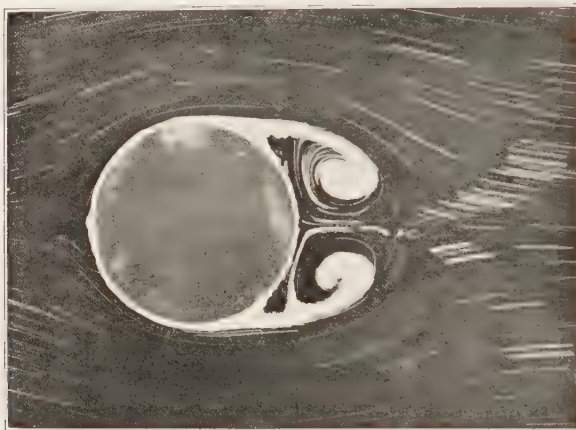


Abb. 60. Wirbelentwicklung aus der Grenzschicht. Anfangsstadium.  
(Nach Tietjens.)

in Richtung der Profilnormalen an der Oberfläche den Wert Null erreicht. Der laminare Teil der Grenzschicht kann zufolge des Stokesschen Integralsatzes, den wir auf einen zwischen zwei benachbarten Oberflächennormalen liegenden Teil der Grenzschicht anwenden, als ein wirbelbehaftetes Gebiet oder als eine Wirbelschicht angesehen werden. Durch die Rückströmung und die Ablösung bei  $A$  tritt nun die Wirbelschicht in die Flüssigkeit und bildet hier, indem sie sich spiralig aufrollt, sichtbare und größere zusammengesetzte, individualisierte Wirbelgebilde, die in die freie Flüssigkeit treten und das äußere Stromfeld und damit natürlich auch die Druckverteilung längs der Hinterseite, also den Widerstand des Körpers wesentlich verändern (Abb. 60). Während also die Umsetzung von Druck in Geschwindigkeit verhältnismäßig verlustfrei (im Sinne der Eulerschen bzw. Bernoullischen



Gleichung) vor sich geht, tritt der umgekehrte Vorgang nur unvollständig auf, indem ein Teil der Geschwindigkeitsenergie auf dem Wege der Wirbelbildung sich in Wärmeenergie umsetzt, also sicherlich verloren geht. Denn der in der Umgebung jedes Wirbelkerns zunächst entstehende starke Geschwindigkeitsgradient bedingt eine entsprechend große Reibungskraft, durch die die Wirbelenergie allmählich aufgezehrt wird (vgl. § 31).

Was die weitere Umbildung des Stromfeldes angeht, so ergibt sich etwa folgender Verlauf: Indem die Flüssigkeit nach jeder Ablösung eines Wirbels von der Körperoberfläche die ursprüngliche Verteilung der Feldgrößen (Geschwindigkeit und Druck) längs der Kontur wieder herzustellen strebt, wird gleichzeitig eine neue Anhäufung und Abwirbelung von

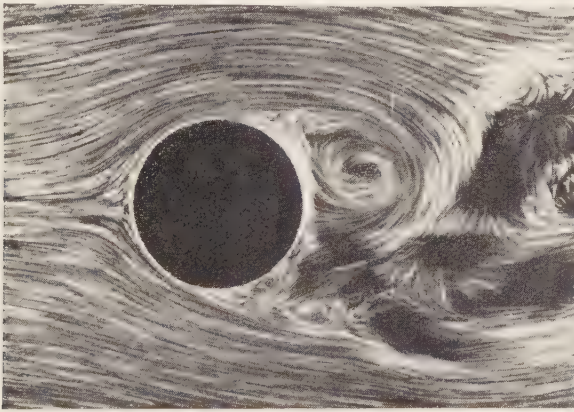


Abb. 61. Unsymmetrische (wechselseitige) Ablösung der Kielwasserwirbel. Fortgeschrittenes Stadium. (Nach Tietjens.)

Grenzschichtmaterial eingeleitet, die jener Tendenz entgegenwirkt, und man sieht, daß im Laufe der gleichmäßigen Bewegung des Körpers ein instationäres, rhythmisches Wirbelspiel sich dem Hauptstrom überlagert. Dabei zeigt sich, daß insbesondere im ebenen Falle die Ablösung eines Wirbels die Entstehung eines entgegengesetzt drehenden Wirbels auf der anderen Seite des Hindernisses begünstigt, was schließlich zur Folge hat, daß die Wirbel abwechselnd von beiden Seiten abgehen (Abb. 61) und so hinter dem bewegten Körper einen wirbelerfüllten Kielwasserstrom (oder Stromschatten) erzeugen, der sich in dem Maße immer wieder neu ersetzt, wie die abschwimmenden Wirbel durch die Reibung aufgezehrt werden (Abb. 62). Die individualisierten, im wesentlichen zweireihigen Wirbelgebilde hinter einem Körper mit endlicher Querfläche werden dabei einer Anordnung zustreben, die die größte

Stabilität gewährleistet. Wie v. Kármán<sup>1)</sup> nachgewiesen hat, erfüllen zwei gegenseitige, unendlich lange geradlinige Wirbelstraßen nur dann die Bedingung der Stabilität, wenn die Wirbel „auf Lücke“ stehen, und das Verhältnis des Abstandes beider Reihen zum Abstand zweier aufeinanderfolgender Wirbel einer Reihe einen ganz bestimmten Wert, nämlich 0,28, besitzt. Tatsächlich lehrt auch die Beobachtung, daß die wirkliche Anordnung etwa diesem Verhältnis entspricht. Bei der achsensymmetrischen Strömung um einen Rotationskörper, die uns später noch näher

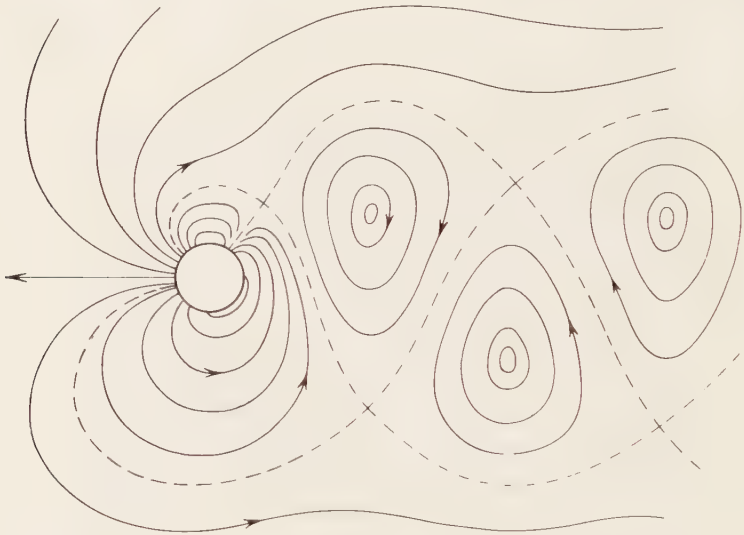


Abb. 62. Schema der Absolutströmung um einen bewegten Kreiszyylinder mit ausgebildetem Kielwasser. (Nach Ahlborn.)

beschäftigen wird, wird der Kielwasserstrom im wesentlichen sich aus kreisförmigen Wirbelringen bzw. Schraubenwirbeln zusammensetzen, die in einer dem Körper aufliegenden zylindrischen Wirbelschicht ihren Ursprung haben. Auch für Wirbelsysteme dieser Art läßt sich eine der Kármánschen analoge Stabilitätsbetrachtung durchführen<sup>2)</sup>.

Die Kielwasserwirbel bestimmen im wesentlichen den gegen die Bewegung gerichteten Formwiderstand des Körpers, der im allgemeinen gegenüber dem Reibungswiderstand um so mehr ins Gewicht fällt, je kleiner die Zähigkeit ist. Ferner entsteht bei jeder zur Bewegungs-

<sup>1)</sup> Th. v. Kármán — H. Rubach, Phys. Z. 13 (1912), S. 49—59.

<sup>2)</sup> H. Levy u. A. G. Forsdyke, Proc. Roy. Soc. London (A) 114, S. 594—604; 120, S. 670—690.



richtung auftretenden Unsymmetrie des Körpers eine Seitenkraft, die in besonderen Fällen den Charakter einer Auftriebskraft annimmt. Für die Berechnung dieser Kräfte werden wir später einige Methoden angeben.

### § 46. Differentialgleichung und Impulsgleichung für die Grenzschicht.

1. Um die für die Grenzschicht gültige Differentialgleichung abzuleiten, setzen wir ebene Verhältnisse sowie eine zylindrische, stetig gekrümmte Kontur voraus und führen die Bogenlänge bzw. die in die Flüssigkeit weisende Normale als  $x$ - bzw.  $y$ -Richtungen ein. Wenn man auf die Krümmung oder die Richtungsänderung der Tangente und Normalen Rücksicht nimmt, so treten zunächst in den Bewegungsgleichungen zusätzliche, vom Krümmungsradius und dessen tangentiellen Gradienten abhängige Glieder auf, z. B. die Zentripetalbeschleunigung  $\frac{v_x^2}{R}$ , die wir vernachlässigen können, wenn wir die Krümmung im Verhältnis zur Grenzschichtdicke als klein ansehen bzw. uns auf ein kleines Gebiet in der Nähe der Ablösungsstelle beschränken. Die Form der Gleichung ist dann dieselbe, als ob die Koordinaten  $x$  und  $y$  Cartesische Koordinaten wären. Wenn wir bei Einführung dimensionsloser Größen für den kleinen Wert der Grenzschichtdicke ( $\delta = y_{\max}$ ) die Größenordnung  $\varepsilon$  annehmen, ferner voraussetzen, daß die im wesentlichen durch die Vorgänge außerhalb der Grenzschicht bestimmten Werte

$$v_x, \frac{\partial v_x}{\partial t}, \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}$$

normale, mit 1 vergleichbare Größenordnungen besitzen, so erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung die Abschätzung  $\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim 1$  und daher in der Nähe der Oberfläche  $v_y \sim \varepsilon$ , also, da  $x$  nicht klein sein soll,  $\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \varepsilon$ ,  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \varepsilon$ . Dagegen wird wegen des raschen Anstieges von  $v_x$  innerhalb der Grenzschicht  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Schreiben wir diese Vergleichswerte unter die einzelnen Glieder unserer Gleichungen, so erhalten wir folgendes Schema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathfrak{R}} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ 1 \quad 1 \cdot 1 \quad \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{R}} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \varepsilon \quad 1 \cdot \varepsilon \quad \varepsilon \cdot 1 \quad \varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right.$$

Da die erste Gleichung zeigt, daß der Einfluß der Reibung von merklicher Größe wird, wenn  $\frac{1}{\Re} \propto \varepsilon^2$  ist, so sieht man, daß die Dicke  $\delta$  der Grenzschicht proportional mit  $\sqrt{\frac{1}{\Re}}$  zu setzen ist. Vernachlässigen wir weiter in der Gleichung (1) alle Glieder von der Größenordnung  $\varepsilon$  oder  $\varepsilon^2$ , so ergibt sich aus der zweiten Gleichung, daß das Druckgefälle  $\frac{\partial p}{\partial y}$  von der Größenordnung  $\varepsilon$  ist, also gegenüber  $\frac{\partial p}{\partial x}$  vernachlässigt werden kann. Wir finden also die wesentliche Annahme der Prandtlschen Theorie bestätigt, daß der Druckgradient in der zur Oberfläche normalen Richtung gegenüber dem tangentiellen Gradienten gleich Null gesetzt werden kann, oder daß die Druckverteilung im Potentialgebiet als ein der Grenzschicht eingepprägtes Kraftfeld aufzufassen ist. Bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes rechts geht aber die erste Gleichung über in

$$(2) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\Re} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Wenn  $V$  die Stromgeschwindigkeit an der Grenze gegen das Potentialgebiet ist, so folgt aus  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  die gewöhnliche Bernoullische Beziehung zwischen  $p$  und  $V$

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Damit geht dann bei stationärem  $V$  Gleichung (2) über in die zuerst von Prandtl<sup>1)</sup> aufgestellte Differentialgleichung der Grenzschicht

$$(2a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\Re} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

2. Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man mit v. Kármán<sup>2)</sup> und Pohlhausen<sup>3)</sup> von der bereits bekannten Differentialgleichung der Stromfunktion ausgeht, nämlich

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nu \Delta \psi,$$

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Verhandlungen des III. Intern. Math.-Kongr. 1904 (Heidelberg), Leipzig 1905, S. 484, abgedruckt in: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik u. Aerodynamik, Göttingen 1927.

<sup>2)</sup> Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Z. f. a. Math. u. Mech., Bd. 1, (1921), S. 233—252.

<sup>3)</sup> K. Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Ebenda, S. 252—268.

worin wir wieder unter Voraussetzung dimensionsloser Größen  $\nu$  durch  $\frac{1}{\Re}$  ersetzen wollen.

Um die Grenzbedingungen für großes  $\Re$  zu erfüllen, setzen wir mit  $\eta = y \cdot \Re^{\lambda}$  unter der Annahme stationärer Strömung

$$\Psi = \Psi_0(x, y) + \Re^{\varkappa} \Psi_1(x, \eta),$$

wo die Koeffizienten  $\varkappa$  und  $\lambda$  noch zu bestimmen sind. Dabei soll sich  $\Psi_0$  auf die Potentiallösung beziehen, die an der Grenze der Reibungsschicht gültig wird. Dann ist bei großem  $\Re$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Psi_0 &= 0, \quad \mathcal{A} \Psi_1 = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \Re^{2\lambda} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \eta^2} \approx \Re^{2\lambda} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \eta^2}, \\ \mathcal{A} \mathcal{A} \Psi_1 &= \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial x^4} + 2 \Re^{2\lambda} \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \Re^{4\lambda} \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial \eta^4} \approx \Re^{4\lambda} \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial \eta^4}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in die Differentialgleichung für  $\Psi$  ein, so wird

$$\begin{aligned} (5) \quad \Re^{\varkappa+2\lambda} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \eta^2 \partial x} - \Re^{\varkappa+2\lambda} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \eta^3} + \Re^{2\varkappa+3\lambda} \left[ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \eta^3} \right] \\ = \Re^{\varkappa+4\lambda-1} \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial \eta^4}. \end{aligned}$$

Wenn beide Seiten mit wachsender Reynoldsscher Zahl gleichmäßig zunehmen sollen, so erhalten wir als Bedingungsgleichung für  $\varkappa$  und  $\lambda$

$$\varkappa + 2\lambda = 2\varkappa + 3\lambda = 4\lambda + \varkappa - 1,$$

die die Werte liefert

$$\varkappa = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\Psi_0(x, y) = (\Psi_0)_{y=0} + \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)_{y=0} y + \dots = c + f_1(x) \cdot y + \dots$$

geht die Differentialgleichung (5) über in

$$(5a) \quad \left( f_1 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \eta \right) + \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \eta^3} \right) = \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial \eta^4}$$

oder

$$(5b) \quad \left( f_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^3 (\Psi_1 + f_1 \eta)}{\partial x \partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \eta + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 (\Psi_1 + f_1 \eta)}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^4 (\Psi_1 + f_1 \eta)}{\partial \eta^4}.$$

Nach Einführung von  $G = \Psi_1 + f_1 \eta$  hat man also

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4} \\ \Psi = \Psi_0(x, y) + \frac{1}{\Re} (G - f_1 \eta), \end{cases}$$

wobei als Grenzbedingungen für  $G$  zu beachten sind

$$G = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad \text{für } \eta = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = f_1 \quad \text{für } \eta \rightarrow \infty.$$

Man sieht dann, daß in der Nähe der Wand, wo die Flüssigkeit haftet,  $\Psi = \frac{G}{\sqrt{\Re}}$  wird, während im Unendlichen  $G$  sich wie  $f_1 \eta$  verhält, also  $\Psi$  in die Potentialfunktion  $\Psi_0$  übergeht.

Wenn wir nunmehr die gewonnene Gleichung (6) nach  $\eta$  integrieren und

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial \eta} \Re^{\frac{1}{2}} = v_x, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -v_y$$

setzen, so erhalten wir wieder die Differentialgleichung der Grenzschicht.

3. Grenzschicht als Wirbelschicht. Wie bereits hervorgehoben, können wir die Grenzschicht auch als eine Wirbelschicht auffassen. Da die Ableitung  $\frac{\partial v_y}{\partial x}$  gegenüber  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$  vernachlässigt werden kann wie  $\frac{1}{\Re}$  gegen 1, so haben wir für die Wirbelstärke den Ausdruck

$$w = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Die Differentialgleichung für  $w$  lautet daher

$$(7) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + v_x \frac{\partial w}{\partial x} + v_y \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Alle in dieser Gleichung enthaltenen Ausdrücke haben die Größenordnung  $\frac{1}{\epsilon} \propto \frac{1}{\nu} \propto \sqrt{\Re}$  der Wirbelstärke. Man sieht also, daß die Wirbelbildung an der Oberfläche des Körpers um so mehr ins Gewicht fällt, je kleiner die Zähigkeit oder je größer die Reynoldssche Zahl wird, ein Resultat, das mit der Erfahrung durchaus übereinstimmt. Die Gleichung (7) werden wir später für den besonderen Fall des Kreiszylinders integrieren.

4. Die Impulsgleichung der Grenzschicht. Wenn man die Differentialgleichung der Grenzschicht nach  $y$  von 0 bis  $\delta$  integriert, so erhält man eine Integralbeziehung, die auch in direkter Weise aus dem allgemeinen Impulssatz (vgl. § 7) gewonnen werden kann. Dieser Satz besagt, daß die Gesamtheit der auf das Element der Schicht wirkenden Kräfte (Summe aus Druck- und Reibungskräften an der Wand) der substantiellen Impulsänderung in der Zeiteinheit gleichzusetzen ist. Diese Impulsänderung setzt sich zusammen aus der lokalen Änderung des in dem Element enthaltenen Impulses, also aus

$$J_1 = \rho dx \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta v_x dy,$$

und aus dem Impulstransport durch die Grenzflächen. Der Überschuß  $J_2$  des in der Zeiteinheit durch die Fläche  $F_2$  austretenden Impulses gegenüber dem durch die Fläche  $F_1$  eintretenden Impuls ist

$$J_2 = \rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x^2 dy .$$

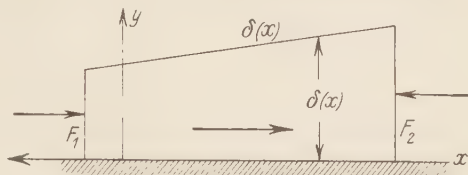


Abb. 63. Zur Ableitung der Impulsgleichung für die Grenzschicht.

Die durch die Seitenfläche mit der Spurkurve  $\delta(x)=y$  eintretende Flüssigkeitsmenge ist gleich der Differenz der durch die Flächen  $F_2$  und  $F_1$  aus- bzw. einströmenden Mengen, also gleich

$$\rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy ;$$

den zugehörigen eintretenden Impuls  $-J_3$ , der von  $J_2$  abzuziehen ist, findet man daraus durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit  $V$  der Potentialströmung. Wir haben daher im ganzen folgende Impulsgleichung:

$$J_1 + J_2 + J_3 = P_1 - P_2 - R$$

oder

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta v_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x^2 dy - V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy = -\delta \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} ,$$

die übrigens auch für die turbulente Grenzschicht Gültigkeit behält, wenn man unter  $v_x$  und  $p$  die zeitlichen Mittelwerte von Geschwindigkeit und Druck versteht. Setzt man

$$v_x = V - q(x, y)$$

in die Impulsgleichung ein, so ergibt sich bei Annahme stationärer Strömung, für  $q$  die Differentialgleichung

$$(8a) \quad -2 \frac{dV}{dx} \int_0^\delta q dy - V \frac{d}{dx} \int_0^\delta q dy + \frac{d}{dx} \int_0^\delta q^2 dy = -\nu \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right)_{y=0} ;$$

$q$  hat ferner die Randbedingungen zu erfüllen:  $v_x=0$ ,  $q(x, y)=V$  für  $y=0$ ,  $q(x, y)=0$  für  $y=\delta$ . Für den Rand  $y=0$  geht die Grenzschichtgleichung wegen  $v_x=0$  über in

$$V \frac{dV}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 (V-q)}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 .$$

In den folgenden Abschnitten werden wir einige spezielle Lösungen dieser Gleichungen angeben.

### § 47. Zurückführung der Grenzschichtgleichung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Die mathematisch einwandfreieste und zugleich allgemeinste Begründung der Grenzschichtgleichung hat v. Mises auf der Kissinger Tagung<sup>1)</sup> gegeben. Die Allgemeinheit und Tragweite dieser Beziehung spricht sich darin aus, daß v. Mises zunächst nicht von den Randverhältnissen, sondern von einer ganz beliebigen Stromlinie  $S$  im Innern der Flüssigkeit ausgeht und das Bestehen der Grenzschicht als nachträgliches Ergebnis ableitet. In der Umgebung von  $S$  denken wir uns ein krummliniges Koordinatensystem festgelegt, dessen Koordinatenlinien aus Parallelkurven und Normalen von  $S$  bestehen. Bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes durch  $s, n$ , die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten durch  $v_s, v_n$ , und führen wir in den dimensionslos geschriebenen Stokes-Navierschen Gleichungen die Transformation ein

$$x = s, y = n \sqrt{\mathfrak{R}}, v_x = v_s, v_y = v_n \sqrt{\mathfrak{R}},$$

so ist damit eine doppelte Verzerrung des Stromfeldes in der Umgebung von  $S$  ausgedrückt; einerseits nämlich eine Abwicklung des Bogens  $s$  auf die geradlinige  $x$ -Achse und andererseits eine Querdehnung auf das  $\sqrt{\mathfrak{R}}$ -fache. Beim Übergang zu  $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$  ergibt sich dann

$$(1) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist im wesentlichen identisch mit dem Prandtlschen System. Führt man nun  $x$  und die Stromfunktion  $\Psi$  als unabhängige Veränderliche ein und wählt die der Strömungsenergie proportionale Größe

$$z = -2 \left( \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2\mathfrak{R}} + \frac{p}{\rho} \right) \infty - 2 \left( \frac{v_x^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)$$

als Unbekannte, so ergibt sich aus

$$\frac{\partial v_x(xy)}{\partial x} = \frac{\partial v_x(x\mathcal{Y})}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x(x\mathcal{Y})}{\partial \mathcal{Y}}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_x(x\mathcal{Y})}{\partial \mathcal{Y}}$$

für  $z$  die bemerkenswerte Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = k \frac{\partial^2 z}{\partial \mathcal{Y}^2} \quad \left( k = v_x = \sqrt{-\frac{2}{\rho} p(x) - z} \right),$$

die ohne weiteres als Wärmeleitungsgleichung eines unendlich langen Stabes zu deuten ist, wenn  $x$  als Zeit,  $\mathcal{Y}$  als Abszisse des Stabes und  $z$  als Temperatur aufgefaßt werden.

<sup>1)</sup> Vgl. Z. a. M. M. Bd. 7, 1927, S. 425–431.



v. Mises leitet nun auf Grund dieser Analogie einige interessante Folgerungen aus der Gleichung ab, insbesondere die Bedingungen, unter denen die Erscheinung der Grenzschicht am festen Rand auftritt.

Eine Grenzschicht ganz allgemein entsteht immer dann, wenn der gegebene Druckverlauf nicht mit dem Geschwindigkeitsverlauf längs der Grundlinie übereinstimmt, d. h.  $z$  für  $\Psi = 0$  nicht konstant ist; ferner unabhängig vom Druckverlauf, wenn die Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt schon das starke Gefälle aufweist. In diesem Falle verliert sich die Grenzschicht allmählich, oder ihre Breite wird mit wachsendem  $x$  unendlich groß. Daraus würde sich ergeben, daß eine Randschicht nur dann auftritt, wenn der Druck längs des Randes variabel ist, während sie bei konstantem Druck, wie etwa im Falle der eingetauchten Platte, durch die Eintrittsbedingungen erzwungen werden kann, um sich dann allmählich in der normalen Strömung zu verlieren. Eine „innere Grenzschicht“ dagegen kommt dann vor, wenn eine fortschreitende Strömung an ein Kielwassergebiet grenzt, oder aber beim Auslauf hinter einem Hindernis.

Auf die weiteren Einzelheiten, die v. Mises besprochen hat, können wir in diesem Zusammenhang nicht eingehen. Da auch die in Aussicht gestellte Durchrechnung einiger wichtiger Sonderfälle, z. B. des Kreiszyinders, noch nicht erschienen ist, so werden wir in den folgenden Abschnitten hauptsächlich auf die Arbeiten der Prandtl'schen Schule Bezug nehmen.

## § 48. Widerstand einer in die Strömungsrichtung gestellten ebenen Platte (bei laminarer Grenzschicht).

1. Die Blasius'sche Rechnung<sup>1)</sup>. Die Grenzschichtgleichung kann ohne weiteres angewendet werden auf den Fall der unendlich langen ebenen Platte, die sich in ihrer Ebene normal zu ihrer Längsausdehnung gleichförmig durch die Flüssigkeit bewegt. Da wir hier  $V = U_0$  setzen können, so gehen die Gleichungen der stationären Grenzschicht über in

$$(I) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Führen wir mit Blasius durch die Substitutionen

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad \Psi = \sqrt{\nu U_0 x} \cdot \zeta$$

<sup>1)</sup> H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z.f. Math. u. Physik, Bd. 56, 1908, S. 1—37, insbes. S. 4f.

die dimensionslosen Größen  $\zeta$  und  $\xi$  ein, so ergibt sich, wenn man die Ableitungen von  $\zeta$  nach  $\xi$  durch Striche bezeichnet,

$$v_x = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \cdot \zeta' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{U_0 \zeta'}{2}$$

$$v_y = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\nu U_0} \zeta' - \sqrt{\nu U_0} x \zeta'' \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{2} \right] \sqrt{\nu U_0} (\xi \zeta' - \zeta)$$

Wenn man diese Werte in die Gleichung (1) einsetzt, so erhält man durch eine einfache Rechnung die Differentialgleichung

$$(2) \quad \zeta \zeta'' + \zeta''' = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$v_y = v_z = 0, \quad \zeta' = \zeta = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0, \quad y = 0;$$

$$v_x = U_0, \quad \zeta' = 2 \quad \text{für} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty.$$

Als Lösung von (2) ergibt sich nach Blasius die konvergente Reihe

$$(3) \quad \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n \alpha^{2n+1}}{(3n+2)!} \xi^{3n+2},$$

deren Koeffizienten durch die Rekursionsformel zu bestimmen sind

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{3n-i}{3i} \right) c_i c_{n-1-i}.$$

Die noch unbestimmte Konstante  $\alpha$  wird auf Grund der Bedingung festgelegt, daß  $\zeta'$  im Unendlichen den Wert 2 annehmen soll. Setzt man

$$\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot Z = \zeta, \quad X = \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \xi,$$

so wird

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{(3n+2)!} X^{3n+2}.$$

Man findet für die Richtungskonstante der Asymptote dieser Kurve  $\frac{dZ}{dX} = \alpha^{\frac{3}{2}}$ . Daraus ergibt sich dann aus der Beziehung

$$\frac{dZ}{dX} = \zeta' \cdot \alpha^{-\frac{2}{3}}$$

der Wert

$$\alpha = 2^{1.5} = 1,326.$$

Das erste Glied der Entwicklung von  $\zeta$  lautet dann

$$\zeta = \frac{\alpha}{2} \xi^2.$$

Für die Oberflächenreibung längs der Platte haben wir ferner

$$(4) \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{U_0}{2} \zeta'' \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\alpha}{4} \sqrt{\mu \rho U_0^3} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Für eine ebene Platte von der Breite  $b$  und der Länge  $l$  findet man daher den Widerstand

$$(5) \quad W = 2b \int_0^l \tau_{xy} dx = 1,326 \cdot b \sqrt{\rho \mu l U_0^3}$$

und mit

$$W = c_w \cdot F \cdot \frac{1}{2} \rho U_0^2$$

den Widerstandsbeiwert

$$(5a) \quad c_w = 1,326 \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Der Widerstand ist also der Breite direkt und der Wurzel aus der Länge, ferner der  $\frac{3}{2}$ -Potenz der Geschwindigkeit proportional. Der Beiwert nimmt ab mit wachsender Reynoldsscher Zahl. Eine Ablösung der Grenzschicht findet in diesem Falle natürlich nicht statt.

2. Vergleich mit einer Formel von Rayleigh. Wir haben früher (§ 29) den Fall betrachtet, daß eine unendlich ausgedehnte Ebene aus der Ruhe plötzlich mit einer Geschwindigkeit  $U_0$  sich in sich selbst in Richtung der  $x$ -Achse bewegt. Die Geschwindigkeit  $v$  in einem Punkt im Abstand  $y$  von der Ebene war dargestellt durch

$$v = U_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-q^2} dq \right]; \quad q^2 = \frac{y^2}{4\nu t}.$$

Daraus ergibt sich als Widerstand pro Flächeneinheit

$$\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -U_0 \left| \frac{\mu q}{\pi t} \right|.$$

Setzen wir nun für  $t$  diejenige Zeitdauer ein, die der Punkt mit der Koordinate  $x$  braucht, um die Lage  $x=0$  zu erreichen, wählen also

$$t = \frac{x}{U_0},$$

und integrieren dann von 0 bis  $l$ , so kommt mit  $b=1$

$$(6) \quad W = \int_0^l U_0 \sqrt{\frac{\mu q}{\pi x}} U_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu \rho l} U_0^3 = 1,13 \sqrt{\mu \rho l} U_0^3,$$

ein Ausdruck, den wir mit einer gewissen Berechtigung als Näherung für den Widerstand bei der gleichmäßigen Bewegung in Anspruch nehmen können. Das Gesetz stimmt wenigstens qualitativ mit dem Blasius'schen Gesetz überein.

3. Die Pohlhausensche Näherung. Um die Grenzschichtgleichung für die Platte näherungsweise aufzulösen, führt Pohlhausen in der be-

reits zitierten Arbeit einen parabolischen Geschwindigkeitsabfall innerhalb der Grenzschicht durch den Ansatz

$$(7) \quad v = U_0 - q = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)y^3 + d(x)y^4$$

ein. Aus den Grenzbedingungen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{\nu} V \frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{für } y = 0,$$

$$v = U_0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für } y = \delta$$

erhalten wir dann die Bestimmungsgleichungen

$$a + 2b\delta + 3c\delta^2 + 4d\delta^3 = 0, \quad a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 = U_0, \quad b = 0, \\ 2b + 6c\delta + 12d\delta^2 = 0,$$

aus denen die Werte hervorgehen

$$a = \frac{2U_0}{\delta}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{2U_0}{\delta^3}, \quad d = \frac{U_0}{\delta^4};$$

daher wird

$$(8) \quad q = U_0 - v = U_0 \left[ 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 + \left( \frac{y}{\delta} \right)^4 \right].$$

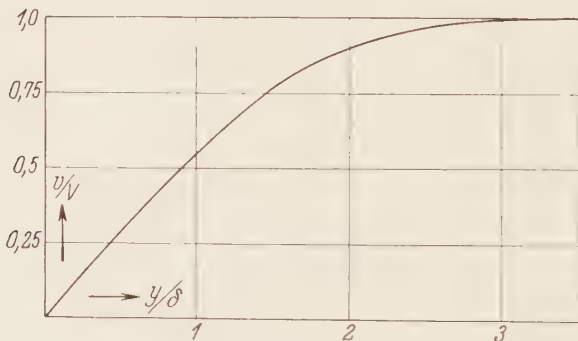


Abb. 64. Geschwindigkeitsverteilung bei der Strömung längs einer ebenen Platte.

Für die in der Impulsgleichung (§ 46, 8) vorkommenden Ausdrücke erhalten wir ferner

$$\int_0^{\delta} q dy = \frac{3}{10} U_0 \delta, \quad \int_0^{\delta} q^2 dy = \frac{23}{126} U_0^2 \delta; \quad \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\delta} = -\frac{2U_0}{\delta},$$

mithin für die Dicke der Grenzschicht den Wert

$$(9) \quad \delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_0}},$$

der von der Vorderkante bis zur Hinterkante mit der Wurzel aus dem Abstand von dem vorderen Punkt  $x=0$  wächst. Für die Reibungsspannung ergibt sich dann

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0,343 \left| \frac{\mu \rho U_0^3}{x} \right.$$

Der entsprechende Widerstandsbeiwert

$$(10) \quad c_w = \frac{1,372}{\sqrt{\Re}}$$

ist um einige Prozent größer als der unter (5a) angegebene Wert.

Das der Blasius'schen Lösung entsprechende Geschwindigkeitsprofil (vgl. Abb. 64), das übrigens später von Bairstow<sup>1)</sup> neu berechnet wurde, ebenso die entsprechenden Widerstandswerte befinden sich für  $\Re = \frac{U_0 l}{\nu} < 3.10^5$  in guter Übereinstimmung mit den Messungen von Burgers<sup>2)</sup>, van der Hegge Zijnen und Hansen<sup>3)</sup>. Für  $\Re > 3.10^5$  nimmt die Grenzschichtbewegung einen instabilen Charakter an.

### § 49. Der Widerstand der ebenen Platte bei turbulenter Grenzschicht.

Um die Berechnung des Widerstandes für den Fall durchzuführen, daß in der Grenzschicht der turbulente Zustand herrscht, gehen wir auf das von Blasius und v. Kármán ermittelte Gesetz für die turbulente Strömung in Rohren zurück, das für  $2.10^3 < \Re < 2.10^5$  Gültigkeit hat. Die Geschwindigkeitsverteilung ist in diesem Bereich der Kennzahl darstellbar in der Form

$$(1) \quad v = 8,7 \left( \frac{v_0}{\rho} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{v}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}},$$

wo  $\tau_0$  die tangentielle Wandspannung und  $\eta$  den Abstand von der Wand bedeuten. Ferner hat man

$$(2) \quad \tau_0 = 0,0225 \rho v^2 \left( \frac{\nu}{v\eta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

In unserem Falle setzen wir, wenn  $U_0$  die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung und  $\delta$  die Grenzschichtdicke bezeichnen,

$$(3) \quad v = U_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}},$$

<sup>1)</sup> L. Bairstow, Journ. of the R. Aeron. Soc. 19, 3, 1925.

<sup>2)</sup> J. M. Burgers, Proc. of the I. Intern. Congr. for Appl. Mech. Delft 1924, S. 113.

<sup>3)</sup> M. Hansen, Z. A. M. M. 8, 185, 1928.

also

$$(4) \quad \tau_0 = 0,0225 \rho U_0^2 \left( \frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Führen wir diese Kraft in die oben aufgestellte Impulsgleichung der Grenzschicht ein, so erhalten wir

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \int_0^\delta \rho v^2 dy - U_0 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v dy = 0,0225 \rho U_0^2 \left( \frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

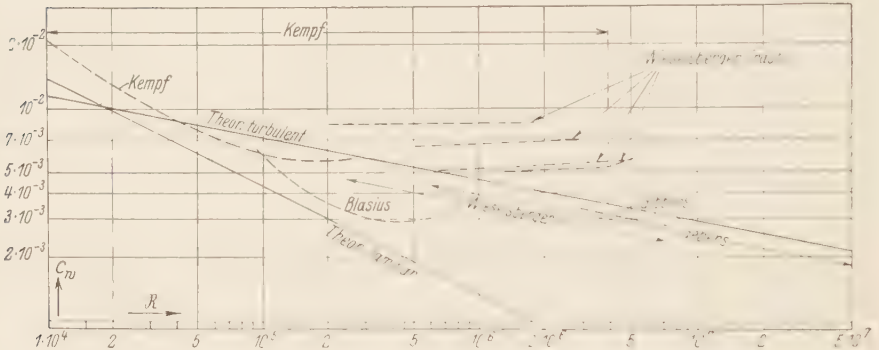


Abb. 65. Reibungswiderstand einer in Stromrichtung gestellten Platte.

Mit Hilfe des Ansatzes (3) entsteht nach Ausführung der Integrationen die Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left( \frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

die die Lösung besitzt

$$(7) \quad \delta = \left( \frac{90}{7} \right)^{\frac{4}{5}} (0,0225)^{\frac{4}{5}} \left( \frac{\nu}{U_0} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}; \quad \delta = 0,30 x \left( \frac{\nu}{U_0 x} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Für den Plattenwiderstand ergibt sich dann wie im vorigen Abschnitt der Prandtl-Kármánsche Wert

$$(8) \quad W = \frac{7}{36} \rho U_0^2 \delta = 0,072 \rho U_0^2 b \mathfrak{R}^{-\frac{1}{5}}$$

mit dem entsprechenden Beiwert

$$(8a) \quad c_w = 0,072 \mathfrak{R}^{-\frac{1}{5}}.$$

Der Widerstand ist nach diesem Gesetz der  $9/5$ -Potenz der Geschwindigkeit  $U_0$  und der  $4/5$ -Potenz der Länge der Platte proportional. Diese Werte stimmen, wie das beifolgende, im logarithmischen Maßstabe gezeichnete Diagramm (Abb. 65) ergibt, mit den Versuchsergebnissen



von Gibbons, Gebers Wieselsberger u. a. verhältnismäßig gut überein. Nur bei hohen Kennzahlen treten erhebliche Abweichungen auf<sup>1)</sup>.

Durch Gleichsetzung des laminaren und turbulenten Widerstandes erhält man

$$0,072 \rho U^2 l \Re^{-\frac{1}{5}} = 1,327 \rho U^2 l \Re^{-\frac{1}{2}}$$

und daraus die theoretische Übergangszahl

$$(9) \quad \Re_k = (18,4)^{\frac{10}{3}} \approx 16,10^3,$$

die unterhalb des versuchsmäßig gefundenen Wertes ( $\Re \approx 3 \cdot 10^5$ ) liegt.

### § 50. Lösung von Blasius für den symmetrischen Fall.

Als weiteres Beispiel besprechen wir den auch von Blasius<sup>2)</sup> behandelten Fall eines symmetrischen Profils, das parallel der Symmetrieebene angeströmt wird bzw. in der Flüssigkeit sich gleichförmig bewegt. Wenn wir den Anfangspunkt der  $x$ -Koordinate in den Staupunkt legen, können wir für die Potential- und Reibungsströmung einen ersten Ansatz in der Form machen:

$$(1) \quad V = rx - sx^3, \quad \Psi = \chi(y)x - \chi_1(y)x^3,$$

und erhalten dann nach Einsetzen in die Grenzschichtgleichung, wenn wir die Glieder von höherer als der dritten Potenz in  $x$  vernachlässigen, und die Ableitungen nach  $y$  mit Strichen bezeichnen

$$(2) \quad \chi'^2 - \chi\chi'' = r^2 + \nu\chi'''; \quad 4\chi'\chi_1' - \chi\chi_1'' - 3\chi_1\chi'' = 4rs + \nu\chi''''.$$

Führen wir jetzt dimensionslose Größen ein durch die Substitutionen

$$\xi = x\sqrt{\frac{s}{r}}, \quad \eta = y\sqrt{\frac{r}{2\nu}}, \quad \zeta = \chi\sqrt{\frac{2}{r\nu}}, \quad \zeta_1 = \chi_1\sqrt{\frac{2r}{\nu s^2}},$$

so wird

$$(1a) \quad V = \sqrt{\frac{r^3}{s}}(\xi - \xi^3), \quad \Psi = \sqrt{\frac{\nu r^2}{2s}}(\zeta\xi - \zeta_1\xi^3).$$

Ferner erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \zeta' &= \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dy} = \frac{2}{r} \chi'; & \zeta_1' &= \frac{2}{s} \chi_1', & \zeta'' &= \frac{2}{r} \sqrt{\frac{2\nu}{r}} \chi'', \\ \zeta \zeta'' &= \frac{4}{r^2} \chi \chi'', & \zeta_1 \zeta_1'' &= \frac{4}{r^2} \chi_1 \chi_1'', & \zeta \zeta''' &= \frac{2}{r} \sqrt{\frac{2\nu}{r}} \chi \chi''', & \frac{2\nu}{r} &= \frac{4}{r^2} \nu \chi'''. \end{aligned}$$

für die Geschwindigkeit

$$(3) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^3}{s}} (\zeta' \xi - \zeta_1' \xi^3)$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), Bd. VII, Berlin 1927, S. 158.

<sup>2)</sup> H. Blasius, Dissertation 1907; Z. f. Math. u. Physik, Bd. 56, 1908, S. 1–37.

sowie als Differentialgleichungen für  $\zeta$  und  $\zeta_1$  aus (2)

$$(4) \quad \zeta'^2 - \zeta \zeta'' = 4 + \zeta'''; \quad 4 \zeta' \zeta_1' - 3 \zeta'' \zeta_1 - \zeta \zeta_1'' = 16 + \zeta_1'''$$

mit den Grenzbedingungen

$$\zeta = \zeta' = \zeta_1 = \zeta_1' = 0 \text{ für } \eta = 0; \quad v_x = U, \quad \zeta' = \zeta_1' = 2 \text{ für } \eta = \infty.$$

Die Auflösung der Gleichungen (4) geschieht am besten mittels Reihen. Blasius gibt die Ansätze

$$(5) \quad \zeta = \frac{\alpha^3}{2!} \eta^2 + \frac{4}{3!} \eta^3 + \frac{\alpha^6}{5!} \eta^5 - \frac{8\alpha^3}{6!} \eta^6 - \frac{32}{7!} \eta^7 - \frac{\alpha^9}{8!} \eta^8,$$

$$(5a) \quad \zeta_1 = d \left( \frac{c_2}{2!} \eta^2 + \frac{c_3}{3!} \eta^3 + \frac{c_4}{4!} \eta^4 + \dots \right).$$

Die Kurve  $\zeta = f(\eta)$  muß im Nullpunkt eine in die  $\eta$ -Achse fallende und im Unendlichen eine durch  $\frac{d\zeta}{d\eta} = 2$  bestimmte Tangente haben. Setzt man  $Z = \frac{\zeta}{\alpha}$ ,  $X = \alpha\eta$ , so zeigt sich, daß die Funktion  $Z = Z(X)$  nur Potenzen von  $\alpha^i$  im Nenner enthält. Die Differentialekurve  $dZ:dX = F(X)$  muß sich also asymptotisch dem Werte  $dZ:dX = 2:\alpha^2$  nähern. Blasius bestimmt daraus den Wert  $\alpha = 1.515$ . Für die Koeffizienten der  $\zeta_1$ -Reihe ergeben sich ferner die Zusammenhänge

$$c_2 = 1, \quad dc_3 = -16, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 4\alpha^3 \\ c_6 = 6\alpha^3 \cdot c_3 - 8, \quad c_7 = -32c_3, \quad c_8 = 17\alpha^6.$$

Die Funktion  $\zeta_1'$  erscheint dann zunächst in der Form

$$\zeta_1' = dA - 16B,$$

wo  $A$  und  $B$  nicht von  $d$  abhängen. Damit im Unendlichen der Wert 2 erreicht wird, muß die Konstante  $d$  den Wert

$$d = 8,25$$

annehmen.

Bestimmung der Ablösungsstelle. Die der Ablösung entsprechende Koordinate  $\xi = \xi_a$  ergibt sich aus

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta'' \zeta_a - \zeta_1'' \zeta_a^3 = 0.$$

Da die ersten Glieder der Reihen (5) und (5a)

$$(\zeta'')_{\eta=0} = \alpha^3, \quad (\zeta_1'')_{\eta=0} = d, \quad \text{also} \quad \alpha^3 - d \zeta_a^2 = 0$$

ergeben, so wird  $\xi_a = 0,65$ , also

$$(6) \quad x_a = 0,65 \sqrt{\frac{r}{s}},$$

während dem Maximum der Geschwindigkeit  $V$  die Koordinate

$$(7) \quad x_m = 0,5777 \sqrt{\frac{r}{s}}$$

und dem hinteren Staupunkt die Koordinate

$$(8) \quad x_0 = \sqrt{\frac{r}{s}}$$

entsprechen. Man kann weiter den Winkel  $\varphi$  bestimmen, unter dem die Stromlinie  $\Psi=0$  die Körperoberfläche verläßt. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Funktion  $\Psi$  in der Umgebung der Stelle  $\xi=\xi_a$ ,  $\eta_a=0$  in eine Taylorsche Reihe und benutzen die Grenzbedingungen. Wir haben zunächst mit  $F(\xi, \eta)=\zeta\xi-\zeta_1\xi^3$

$$F(\xi, \eta) = F(\xi_a, 0) + \sum_1^3 \frac{1}{n!} \left( \xi_a \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_a \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^n F.$$

Da alle Glieder der Reihe bis  $n=3$  verschwinden, so erhält man wegen

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} = \zeta''' \xi - \zeta_1''' \xi^3, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} = \zeta'' - 3 \zeta_1'' \xi^2, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2} = 0$$

die Gleichung

$$(\xi_a \zeta''' - \zeta_1''' \xi_a^3) l_1^3 + 3(\zeta'' - 3 \zeta_1'' \xi_a^2)(\xi - \xi_a) l_1^2 = 0.$$

Nach Einsetzen der oben berechneten Werte ergibt sich

$$\frac{\eta}{\xi} \frac{\zeta_1''}{\zeta_1''} = 3 \frac{3 d \xi_a^2 - a^3}{16 \xi_a^2 - 4 \xi_a} = 11,5,$$

also der Ablösungswinkel

$$(9) \quad \varphi_a = \frac{y}{x - x_a} = 11,5 \sqrt{\frac{2r^3}{r^2}}.$$

Man sieht jedenfalls, daß die Stromlinie  $\Psi=0$  die Körperoberfläche unter einem spitzen Winkel verläßt.

Anwendung auf den Kreiszyylinder. Wenn wir die vorstehenden Betrachtungen auf den Kreiszyylinder anwenden, so können wir in erster Annäherung das aus der Lehre der Potentialströmung bekannte Potential

$$(10) \quad \Phi + i\Psi = U_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

benutzen, dem die Geschwindigkeit längs der Kontur

$$(11) \quad V_\varphi = 2 U_0 \sin \varphi$$

entspricht. Wenn wir an Stelle des Bogens  $s=a \cdot \varphi$  wieder  $x$  einführen, so wird

$$(11a) \quad V_x = 2 U_0 \sin \frac{x}{a}.$$

Setzt man für den Sinus die Anfangsglieder der gewöhnlichen Reihenentwicklung, so wird

$$V_x = 2 U_0 \frac{x}{a} - \frac{1}{3} U_0 \frac{x^3}{a^3}$$

also:

$$r = 2 \frac{U_0}{a}, \quad s = \frac{1}{3} \frac{U_0}{a^3}.$$

Man erhält dann

$$x_m = 1,41a, \quad x_a = 1,6a$$

und die entsprechenden Winkel

$$\varphi_m = 81^\circ, \quad \varphi_a = 93^\circ.$$

Wenn man dagegen die Koordinaten vom hinteren Staupunkt an zählt, so ergibt sich

$$\pi - \varphi_m = 104^\circ, \quad \pi - \varphi_a = 117^\circ.$$

Um diese Differenz auszugleichen, verwendet Blasius statt des Sinus eine Funktion dritten Grades auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate und findet

$$(12) \quad r = \frac{2 \cdot 0,856}{a} \cdot U_0, \quad s = \frac{2 \cdot 0,093}{a^3} \cdot U_0.$$

Die entsprechenden Werte für  $x$  und  $\varphi$  lauten dann

$$\begin{aligned} x_m &= 1,75a & \varphi_m &= 101^\circ \\ x_a &= 1,97a & \varphi_a &= 113^\circ. \end{aligned}$$

Die Stromlinie  $\Psi=0$  erhält in erster Annäherung die Entwicklung

$$(13) \quad y = 4,1 \left| \sqrt{\frac{\nu}{a \cdot U_0}} (x - x_a) \right.$$

Wenn z. B.  $U_0 = 5$  cm/s,  $a = 5$  cm,  $\nu = 0,01$ , so ergibt sich ein Ablösungswinkel von  $\varphi_a = 524'$ ; bei einer größeren Geschwindigkeit  $U_0 = 20$  cm/s findet man  $\varphi_a = 2^\circ 42'$ .

Im ganzen ergibt sich, daß die Ablösungsstelle bei der gleichmäßigen Bewegung im wesentlichen von der Reynoldsschen Zahl unabhängig ist, während der Ablösungswinkel und daher auch die Ausdehnung des Kielwassers oder Wirbelgebiets um so kleiner ausfällt, je größer die Reynoldssche Zahl ist.

## § 51. Methode von Boussinesq-Burgers.

Um die Wirbelverteilung in der Grenzschicht und weiter die Fortsetzung der Wirbelbewegung im Kielwasser, etwa bei einem Kreiszyylinder zu untersuchen, kann man sich einer Methode bedienen, die Boussinesq<sup>1)</sup> für die Ermittlung der Wärmeleitung einer strömenden Flüssigkeit angewendet hat<sup>2)</sup>. Unter Voraussetzung ebener Verhältnisse wollen wir

<sup>1)</sup> J. Boussinesq, Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides, Journal de Liouville (6) 1, 1905, S. 285.

<sup>2)</sup> Vgl. für das Folgende J. M. Burgers, Stationaire stroomingen in een vloeistof met wrijving teweggebracht, Verstag van de Gewone vergaderingen der Wisen-Naturkundige Afdeeling, 29 (1921), II. Teil, S. 952—964.

ausgehen von der in § 46 angegebenen Differentialgleichung für die Rotation  $w$  der Flüssigkeit in der Grenzschicht

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \nu \nabla^2 w - \mathfrak{B} \cdot \nabla w,$$

wo  $\mathfrak{B}$  eine bekannte Strömung, etwa die Potentialströmung um einen Zylinder, darstellt, die in großem Abstand von dem Körper in den Parallelstrom  $U_0$  übergeht. Die Gleichung erhält eine einfache Form, wenn man stationäre Verhältnisse annimmt sowie Strom- und Potentialfunktion als krummlinige Koordinaten einführt. Setzt man etwa

$$\Phi = U_0 \alpha \quad \Psi = U_0 \beta$$

und benutzt die Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

so wird

$$\begin{aligned} \Delta w &= U_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \left( \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right), \\ \mathfrak{B} \cdot \nabla w &= U_0 \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - U_0 \frac{\partial w}{\partial \alpha} \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Man erhält daher nach Division mit

$$\left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 = \gamma^2$$

die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\nu}{U_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right).$$

Wenn man die Reynoldssche Zahl als groß voraussetzt, so daß das Wirbelgebiet auf eine dünne Grenzschicht beschränkt ist, so kann man in der Klammer die zweite Ableitung nach  $\alpha$ , d. h. längs der Grenzschicht gegenüber den Ableitungen nach  $\beta$ , d. h. normal zur Grenzschicht vernachlässigen und an Stelle von (2) angenähert setzen

$$(2a) \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\nu}{U_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = k \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}.$$

Wenn  $v$  die Geschwindigkeit innerhalb der Reibungsschicht längs der Wand und  $V_0$  die Geschwindigkeit in der Grenzlage der Reibungsschicht bedeuten, so hat man

$$(3) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial n} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial \beta} \cdot \frac{V_0}{U_0}, \\ v &= -2 \frac{U_0}{V_0} \int_0^\beta w d\beta. \end{aligned}$$

Als Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht haben wir

$$V = \gamma U_0,$$

wobei im Unendlichen  $\gamma$  sich dem Wert 1 nähert.

Gehen wir nun von dem bekannten komplexen Potential

$$(4) \quad \Phi + i\Psi = U_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

aus, so ergibt sich

$$(4a) \quad \alpha = x \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \beta = y \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Die Linie  $\beta = 0$  zerlegt sich in die  $x$ -Achse ( $y = 0$ ) und den Kreis  $r = a$ . Die beiden Staupunkte der Potentialströmung sind durch die Werte

$$\alpha_1 = -2a, \quad \alpha_2 = 2a$$

dargestellt. Für diese Werte verschwindet der Faktor  $\gamma^2$ , den wir beim Übergang zur Gleichung (2) weggelassen haben. In der Umgebung dieser Punkte, insbesondere des Punktes  $a_2$ , der in das Kielwasser fällt, ist die Vereinfachung der Gleichung (2) nicht mehr zulässig. Wir setzen daher bei Auflösung der Differentialgleichung zunächst  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  voraus.

Nun unterscheidet sich die Gleichung (2a) von der Gleichung der Wärmeleitung nur dadurch, daß an Stelle der Zeitvariablen die Größe  $\alpha$  getreten ist. Wir können daher nach § 29 als partikuläres Integral mit  $\xi$  als Parameter den Ausdruck

$$\frac{1}{(\alpha - \xi)^2} e^{-4k(\alpha - \xi)\beta}$$

nehmen und für  $w$  die Lösung

$$(5) \quad w = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\xi \frac{A(\xi)}{\sqrt{\pi k(\alpha - \xi)}} e^{-\frac{\beta^2}{4k(\alpha - \xi)}}$$

einführen.  $A(\xi)$  bestimmt die Wirbelmenge, die in der Zeiteinheit in der Umgebung des Punktes  $\xi = a$  an der Grenzschicht entsteht; sie tritt gleichsam quellenartig in der  $\beta$ -Richtung aus der Wand heraus und wird gleichzeitig in der  $\alpha$ -Richtung längs der Wand von der Strömung mitgenommen. Für den Geschwindigkeitsanteil haben wir zunächst

$$v = -2 \frac{U_0}{V_0} \int_0^{\beta} w d\beta = \frac{U_0}{V_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\xi \frac{A(\xi)}{\sqrt{\pi k(\alpha - \xi)}} \int_0^{\beta} e^{-\frac{\beta'^2}{4k(\alpha - \xi)}} d\beta'.$$

Setzt man wie früher für das Fehlerintegral

$$F_e(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-q'^2} dq',$$



so wird

$$(6) \quad v = \frac{U_0}{V_0} \int_0^\alpha A(\xi) d\xi \cdot F_e \left( \frac{\beta}{2\sqrt{k(\alpha - \xi)}} \right).$$

Die Funktion  $F_e$  bringt in der Tat das Anwachsen der Grenzschichtgeschwindigkeit in der Querrichtung in charakteristischer Weise zum Ausdruck. Denn sie verschwindet für  $\beta=0$  und steigt sehr schnell bei wachsendem  $\beta$  auf den Wert 1, wenn dieser Wert theoretisch auch erst im Unendlichen erreicht wird. Wenn  $\frac{\beta}{2\sqrt{k(\alpha - \xi)}}$  den Wert 2 annimmt, so hat das Fehlerintegral bereits den Wert 0,99 erreicht. Dann ist also  $\beta=4 \int_0^\alpha U_0$  eine sehr kleine Zahl, und man sieht gleichzeitig, daß die Dicke der Grenzschicht von  $\xi=\alpha_1$  bis  $\xi=\alpha$  wächst und umgekehrt proportional der Wurzel aus der Reynoldsschen Zahl wird. Wird aber  $F_e=1$ , so erhält man für die Grenzgeschwindigkeit

$$(7) \quad V_0 = \frac{U_0}{V_0} \int_{\alpha_1}^\alpha A(\xi) d\xi$$

und daher

$$(7a) \quad A = \frac{1}{U_0} \frac{dV_0^2}{d\alpha}.$$

Damit ist die Strömung in der Grenzschicht rechnerisch dargestellt, und man kann insbesondere auch den Ablösungspunkt oder den Beginn der Rückströmung ermitteln. In den Punkten  $\alpha_1 (= -2a)$  und  $\alpha_2 (= +2a)$  wird die Geschwindigkeit  $V_0=0$ , dazwischen liegt ein dem Wert  $\alpha_m$  entsprechendes Maximum ( $V_0=2U_0$ ). Daher ist  $A$  positiv für  $\alpha < \alpha_m$  und negativ für  $\alpha > \alpha_m$ . Es ergibt sich also, daß für  $\alpha > \alpha_m$  die negativen Bestandteile in dem Integral für wachsendes  $\alpha$  stärker zunehmen als die positiven, so daß ein bestimmter Punkt  $\alpha=\alpha_u$  erreicht wird, in dem die Geschwindigkeit den Wert Null erhält, um darüber hinaus ihr Vorzeichen zu ändern. Für kleine  $\beta$  können wir nun wegen

$$F_e(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} q$$

aus (6) den Ansatz herleiten

$$v = \frac{U_0 \beta}{V_0 \sqrt{\pi k}} \int_{\alpha_1}^\alpha \frac{A(\xi) d\xi}{\sqrt{\alpha - \xi}} = \beta(w)_{\beta=0} = \beta w_0.$$

Der Ablösungspunkt ist daher gegeben durch

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_u} \frac{A(\xi) d\xi}{\sqrt{\alpha_u - \xi}} = 0.$$

Wenn wir die gewöhnliche Potentialströmung um den Kreis zugrunde legen, so haben wir

$$V_0 = -2U_0 \sin \varphi, \quad \alpha = 2a \cos \varphi,$$

$$V_0 = -\frac{U_0}{a} \sqrt{4a^2 - \alpha^2},$$

daher nach (7a)

$$A(\alpha) = -\frac{2\alpha}{a^2} \cdot U_0$$

und nach (5) für die Stärke der dem Zylinder aufliegenden Wirbelschicht im Punkt  $\alpha$

$$(8) \quad w_0 = -\frac{U_0}{a^2 \sqrt{\pi k}} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\xi d\xi}{\alpha - \xi} = \frac{2}{3} \frac{U_0}{a^2 \sqrt{\pi k}} \left[ \sqrt{\alpha - \xi} (2\alpha + \xi) \right]_{\alpha_1}^{\alpha} = -\frac{4U_0}{3\sqrt{\pi k}} \frac{(a - \alpha) \sqrt{a + 2\alpha}}{a^2}.$$

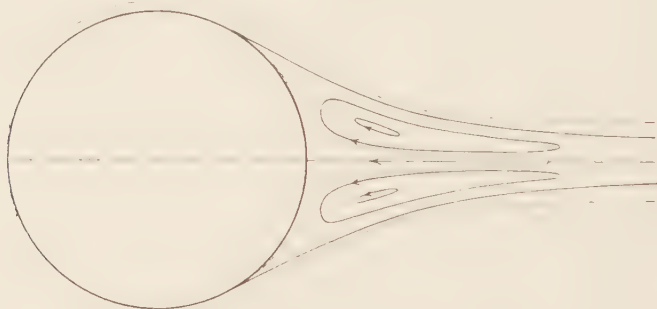


Abb. 66. Grenzschicht und Wirbelbild in der Strömung um einen Kreiszyylinder bei der Reynoldsschen Zahl  $\Re = 5200$ . (Nach Burgers.)

Dieser Ausdruck verschwindet für den Wert  $\alpha_1 = a$ , der einem Winkel von  $120^\circ$  entspricht.

Man kann nun annehmen, daß die Formeln (5) und (7) auch für  $\alpha > a_2$  gültig bleiben. Für die Fortsetzung der Grenzschichtströmung im Kielwassergebiet, d. h. für  $a > a_2$ , gibt Burgers ferner den erweiterten Ansatz

$$(9) \quad w = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{A(\xi) d\xi}{2\sqrt{\pi k}(\alpha - \xi)} e^{-\frac{\beta^2}{4k(\alpha - \xi)}} \cdot \mathcal{F}_e \left( \beta \sqrt{\frac{\alpha_2 - \xi}{4k(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \xi)}} \right),$$

dem die Geschwindigkeitsverteilung entspricht

$$(10) \quad v_x = V_0 - \frac{2U_0}{\sqrt{\pi k}} \int_0^y w d\beta,$$

wo  $V_0$  die Geschwindigkeit der Potentialströmung längs der  $x$ -Achse ( $\alpha = 0$ ) bedeutet.

Nach diesen Formeln, die durch graphische Integration ausgewertet sind, hat Burgers die Berechnung der Wirbelverteilung und der Geschwindigkeit in der Grenzschicht und ihre Fortsetzung im Kielwasser für verschiedene Reynoldssche Zahlen durchgeführt. Für die Reynoldssche Zahl  $\Re = 5200$  ergibt sich etwa das beigefügte Bild, das weder in der Lage der Ablösungsstelle noch in der Gestalt der Wirbelschlepe eine vollständige Übereinstimmung mit den Prandtl'schen Resultaten zeigt. Bei wachsender Reynoldsscher Zahl verschmälert sich das Wirbelgebiet.

### § 52. Ablösung und Widerstand bei nichtstationärer Bewegung.

1. Blasius hat ferner das Problem der Entstehung der Grenzschicht und der Ablösungsstelle bei plötzlichem Beginn der Bewegung eines Kreis-zylinders aus der Ruhe und bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung untersucht. Wir wollen kurz über die Arbeit referieren, ohne die sehr umfangreichen Ableitungen und Rechnungen im einzelnen auszuführen.

Wenn wir zunächst für den ersten Fall bei kleinem  $t$ , d. h. für den Beginn der Bewegung, die Trägheitsglieder vernachlässigen, so bleibt für die erste Näherung  $v_{0x}$  die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial v_{0x}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial y^2},$$

die die bekannte Lösung hat

$$(2) \quad v_{0x} = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Dieser ersten Näherung kann man nun eine nach Potenzen von  $t$  fortschreitende Reihe hinzufügen und erhält dann die Lösung in der Form

$$(3) \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} + t f_1(\eta) + t^2 f_2(\eta) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n f_n(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\partial \chi_n}{\partial \eta} \\ \psi = 2\sqrt{\nu t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \chi_n(x, \eta). \end{cases}$$

Setzen wir

$$\chi_0 = V \zeta_0(\eta); \quad \chi_1 = V \frac{\partial V}{\partial x} \zeta_1(\eta),$$

so liefert die Grenzschichtgleichung für  $\zeta_0$  und  $\zeta_1$  die Differentialgleichungen

$$(4) \quad \zeta_0'''' + 2\eta \zeta_0'' = 0, \quad \zeta_1'''' + 2\eta \zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0 \zeta_0'' - 1)$$

und die Grenzbedingungen lauten

$$\zeta_0 = \zeta_0' = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_1' = 0 \quad \text{für} \quad \eta = 0; \quad \zeta_0' = 1, \quad \zeta_1' = 0 \quad \text{für} \quad \eta = \infty.$$

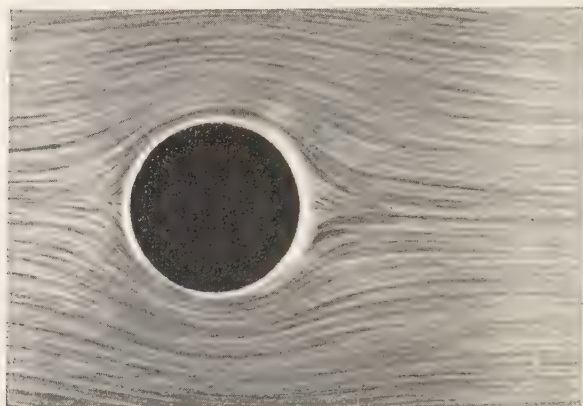


Abb. 67.

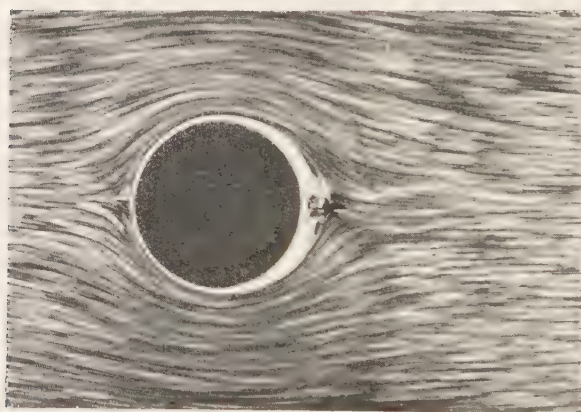


Abb. 68.

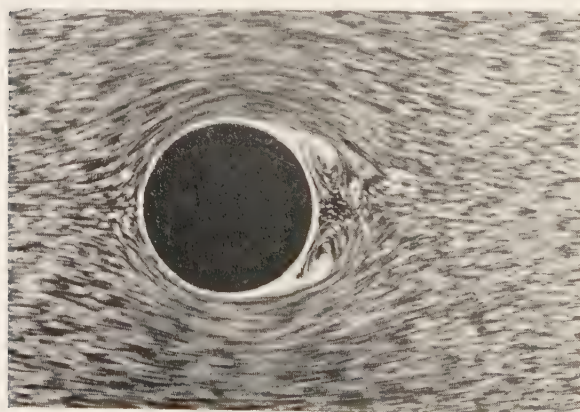


Abb. 69.

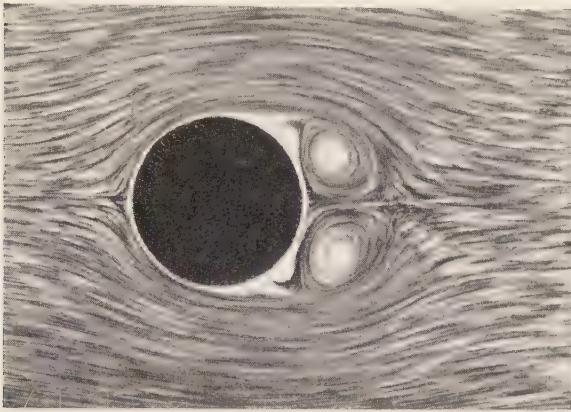


Abb. 70.

Abb. 67—70 Wirbelentwicklung bei der beschleunigten bzw. plötzlich einsetzenden Bewegung eines Kreiszyinders in der Flüssigkeit (nach Tietjens).

Man erhält dann z. B.

$$(5) \quad \begin{cases} \zeta_0' = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \\ \zeta_1' = \frac{6}{\pi} \eta e^{-\eta^2} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\pi} (2\eta^2 - 1) \left\{ \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} \end{cases}$$

und bei Beschränkung auf die ersten Glieder

$$v_x = V \zeta_0' + tV \frac{\partial V}{\partial x} \zeta_1'.$$

Zur Berechnung der Ablösungsstelle haben wir

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \left( V \zeta_0'' + t_a V \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \zeta_1'' \right) \quad \text{für } \eta = 0.$$

Nun ist

$$\zeta_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; \quad \zeta_1'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}^3};$$

daher erhalten wir als Bedingung für die Ablösungszeit  $t_a$

$$(6) \quad 1 + \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) t_a \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Für den Kreiszyinder ist zu setzen

$$V = 2U_0 \sin \frac{x}{a}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2U_0}{a} \cos \frac{x}{a}.$$

Für die Ablösungsstelle erhalten wir daher

$$(6a) \quad t_a = -0,35 \frac{a}{U_0 \cos \frac{x}{a}}.$$

In Übereinstimmung mit dem Versuch (vgl. Abb. 67—70) beginnt die Ablösung bei  $\frac{a}{x} = \pi$ ,  $\cos \frac{a}{x} = -1$ , und zwar zur Zeit

$$t_a = 0,35 \frac{a}{U_0}.$$

Bis zu diesem Zeitpunkt hat der Zylinder einen Weg

$$s = U_0 \cdot t = 0,35 \cdot a$$

zurückgelegt. Man sieht, daß diese Werte von der Geschwindigkeit, der Dichte und der Reibung unabhängig ausfallen.

2. Wenn der Körper von der Zeit  $t=0$  mit konstanter Beschleunigung bewegt wird, so haben wir zu setzen

$$(7) \quad \begin{cases} V = t\varepsilon(x), \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon + t^2 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \end{cases}$$

Für die Lösung der Grenzschichtgleichung kann man einen ähnlichen Ansatz machen wie im vorigen Fall

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\sqrt{\nu t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} \chi_{2n+1}(x \eta) \\ v_x = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} \frac{\partial \chi_{2n+1}}{\partial \eta} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \\ \chi_1 = \varepsilon \zeta_1(\eta), \quad \chi_3 = \varepsilon \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \zeta_3(\eta), \end{array} \right.$$

wobei für  $\zeta_1$  und  $\zeta_3$  die Differentialgleichungen gelten

$$(9) \quad \zeta_1'''' + 2\eta \zeta_1'' - 4\zeta_1' + 4 = 0; \quad \zeta_3'''' + 2\eta \zeta_3'' - 12\zeta_3' + 4[1 - (\zeta_1'^2 - \zeta_1 \zeta_1'')] = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \zeta_1' = 0; \quad \zeta_3 = \zeta_3' = 0 \quad \text{für} \quad \eta = 0 \quad (v_x = v_y = 0) \\ \zeta_1 = 1, \quad \zeta_3 = 0 \quad \text{für} \quad \eta = \infty \quad (v_x = V_x = t \cdot \varepsilon). \end{aligned}$$

Es ergeben sich für  $\zeta_1$  und  $\zeta_4$  wieder Reihen, die ähnlich gebaut sind wie im vorigen Fall plötzlich einsetzender Bewegung, die also im besonderen das Gaußsche Integral

$$\int_{-\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

enthalten. Wir wollen auf die vollständige Wiedergabe der Ausdrücke verzichten und nur die daraus zu gewinnende Ablösungsgleichung angeben.



Sie lautet bis zur vierten Potenz von  $t$

$$(10) \quad 1 + 0,427 \cdot t_a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - 0,026 t_a^4 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 - 0,01 t_a^4 \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = 0.$$

Wenn man die beiden letzten Glieder vernachlässigt, so bleibt

$$(10a) \quad t_a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -2,34.$$

Für den Fall des Kreiszyinders ist im hinteren Punkt, in dem die Ablösung beginnt,  $\varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = 0$  zu setzen. Dann erhält man bei Berücksichtigung des dritten Gliedes

$$(10b) \quad t_a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -2,08.$$

Setzen wir nun die Randgeschwindigkeit des Zylinders  $U = \varepsilon_0 t$ , also

$$V = t \cdot \varepsilon(x) = 2U \cdot \sin \frac{x}{a} = 2\varepsilon_0 t \sin \frac{x}{a},$$

so wird

$$(10c) \quad t_a^2 = -1,17 \frac{a}{\varepsilon_0 \cos \frac{x}{a}} \quad \text{bzw.} \quad = -1,04 \frac{a}{\varepsilon_0 \cos \frac{x}{a}}.$$

Der vom Kreiszyinder zurückgelegte Weg  $s = \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2$  beträgt bei Beginn der Ablösung  $\left( \frac{x}{a} = \pi \right)$

$$s = 0,59 \cdot a \quad \text{bzw.} \quad s = 0,52 a.$$

Wir haben in der Abb. 71, die der Blasius'schen Arbeit entnommen ist, das Stromliniensystem für ein bestimmtes Bewegungsstadium des gleichmäßig beschleunigten Kreiszyinders wiedergegeben. Für  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,1 \text{ cm/s}^2$  ist

$$2t^2 \frac{\varepsilon_0}{a} = 5, \quad \text{also} \quad t = 15,8 \text{ s}$$

gesetzt. Für diese Zeit ist der Ablösungswinkel bereits bis über  $60^\circ$  am Zylinder fortgeschritten. Für  $\varepsilon_0 = 10 \text{ cm/s}^2$

würde sich dasselbe Bild auf die Zeit  $t = 1,58 \text{ s}$  beziehen, und die Grenzschichtdicke wäre im Verhältnis  $1:\sqrt{10}$  verkleinert.

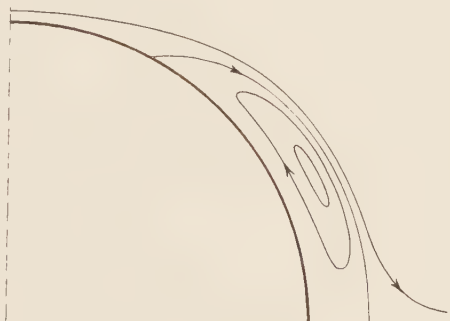


Abb. 71. Strombild in der Nähe des Grenzschichtwirbels in einem bestimmten Augenblick während der beschleunigten Bewegung eines Kreiszyinders in der Flüssigkeit.

(Nach Blasius.)

3. Schließlich hat Blasius auch den Widerstand berechnet, den der Zylinder bei einer konstanten Beschleunigung erfährt.

Infolge der Kleinheit der Reibung können wir  $\frac{\partial v_y}{\partial y}$  und  $\frac{\partial v_y}{\partial x}$  gegen  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$  vernachlässigen und erhalten dann aus dem Ausdruck für die Spannungskomponente

$$\sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

also als Kraft in Richtung der Strömung

$$W = 2ab \int_0^\pi \left( p \cos \varphi + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin \varphi \right) d\varphi,$$

wenn  $b$  die Länge des Zylinders bedeutet. Der erste, auf den Druck entfallende Teil des Integrals wird

$$W_p = 2ba \int_0^\pi p \cos \varphi d\varphi = -2ba^2 \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial x} \sin \varphi d\varphi;$$

benutzt man (7)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho (\varepsilon + t^2 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x})$$

und

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \sin \varphi,$$

so ergibt sich

$$(11) \quad W_p = 2\pi \rho b a^2 \varepsilon_0,$$

also eine Vermehrung der Trägheit um den doppelten Betrag der verdrängten Flüssigkeit. Der auf die Reibung entfallende Teil wird

$$W_r = \frac{2\mu ba}{2\sqrt{\nu t}} \int_0^\pi \left( t\varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + t^3 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right) \sin \varphi d\varphi.$$

Da das zweite Glied fortfällt, so ergibt sich schließlich der Reibungswiderstand

$$(12) \quad W_r = 4 \sqrt{\pi} \rho \mu t \cdot b a \varepsilon_0,$$

der daher der Wurzel aus der Dichte und Reibungszahl proportional ist.

### § 53. Der achsensymmetrische Fall.

Wenn wir in einem Meridianschnitt die krummlinigen Koordinaten  $x$  und  $y$  längs der Kontur und normal zur Kontur einführen und den Abstand eines Punktes von der Achse mit  $r$  bezeichnen, so haben wir die Kontinuitätsgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (r v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (r v_y) = 0,$$

die durch den Ansatz

$$(2) \quad v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

befriedigt werden kann. Wenn wir den Einfluß der Krümmung vernachlässigen, so erhalten wir für den achsensymmetrischen Fall die Gleichung der Grenzschicht

$$(3) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

die formal mit der entsprechenden Gleichung des ebenen Falles übereinstimmt.

Die Betrachtungen von Blasius, die sich auf die Bewegung eines Kreiszylinders beziehen, sind von Boltze<sup>1)</sup> auf die Kugel übertragen worden, für deren Rand die Potentialgeschwindigkeitsverteilung

$$V = \frac{3}{2} U_0 \sin \frac{x}{a}$$

zugrunde gelegt wurde. Wir wollen hier nur die Resultate angeben.

Wenn die Kugel sich aus der Ruhe plötzlich mit der Geschwindigkeit  $U_0$  bewegt, so ergibt sich, daß die Ablösung in einem Punkt  $\vartheta = \pi$  beginnt nach Ablauf der Zeit

$$t_0 = 0,39 \frac{a}{U_0},$$

während die Kugel einen Weg  $s = 0,39 a$  zurückgelegt hat. Im Laufe der Bewegung rücken die Ablösungsstellen, die auf einem Parallelkreis senkrecht zur Bewegungsrichtung liegen, mit abnehmender Schnelligkeit weiter, so daß nach Ablauf der Zeiten

$$0,457 \cdot \frac{a}{U_0}, \text{ bzw. } 0,853 \cdot \frac{a}{U_0}$$

die Parallelkreise  $\vartheta = 150^\circ$  bzw.  $\vartheta = 120^\circ$  erreicht sind. Wenn die Kugel sich um eine Strecke  $s = a$  weiterbewegt hat, beträgt der Ablösungswinkel  $\vartheta = 117^\circ$ , und nach unendlich langer Zeit erreicht  $\vartheta$  den Grenzwert  $\frac{\pi}{2}$ .

Die weitere Untersuchung bezieht sich auf die Ermittlung der Dicke der Wirbelschicht an einer bestimmten Stelle des Kugelrandes und auf den Verlauf der Stromlinie  $\Psi = 0$ , insbesondere vom Beginn der Ablösung. Trägt man für verschiedene  $\frac{x}{a}$  den Abstand  $y$  der Nullstromlinie als Funktion von  $t$  auf, so ergeben sich angenähert geradlinige Kurven ( $\frac{dy}{dt} = \text{const}$ ). Die Dicke der Wirbelschicht wächst also mit konstanter Schnelligkeit. Das Resultat befindet sich nicht in vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung, welche zeigt, daß das Anwachsen der

<sup>1)</sup> E. Boltze, Dissertation Göttingen 1908.

Wirbelschicht immer rascher und rascher vor sich geht, so daß ihre Dicke in kurzer Zeit mit dem Kugelradius vergleichbar wird. Diese Unstimmigkeit hat darin ihren Grund, daß die Glieder von höherer als der 2. Potenz von  $t$  vernachlässigt sind. Auch die weiteren Aussagen von Boltze sind nur unter dieser Voraussetzung zutreffend. Boltze hat ferner für eine bestimmte Zeit, in der der Ablösungswirbel schon eine größere Ausbildung erfahren hat, das Stromlinienbild konstruiert, um daran den Verlauf der Geschwindigkeiten zu studieren. Es ergab sich, daß die Wirbelstärke, die dem negativen Gradienten der Geschwindigkeit proportional ist, absolut am größten außerhalb der Stromlinie  $\Psi=0$  ausfällt und in der Nähe der Körperoberfläche nur gering ist. Da das Strombild sich nicht wesentlich von dem entsprechenden Bild der Strömung um einen Kreiszyylinder unterscheidet, haben wir von der Wiedergabe abgesehen.

## NEUNTES KAPITEL.

### Rotation fester Körper in einer zähen Flüssigkeit.

#### § 54. Allgemeiner Ansatz für die gleichmäßige langsame Drehung.

Wenn ein Rotationskörper, etwa ein Kreiszyylinder oder eine Kugel, in einer zähen Flüssigkeit um die Achse in Drehung versetzt wird, so wird sich die Bewegung von der mitgeführten Grenzschicht aus auf die Flüssigkeit übertragen, derart, daß die Drehgeschwindigkeit der Flüssigkeitsteile von dem vorgegebenen Wert am Rande mit wachsendem Abstand von der Achse abnimmt bis auf den Wert Null im Unendlichen. Setzen wir eine langsame, gleichmäßige Drehung um die  $z$ -Achse voraus, so können wir von den radialen Zusatzbeschleunigungen absehen und annehmen, daß die vorkommenden Größen von dem Drehwinkel  $q$  unabhängig sind. Dann erhält bei Einführung von Zylinderkoordinaten die auf die tangentielle Geschwindigkeit bezogene Bewegungsgleichung nach § 8 die Form

$$(1) \quad \nu \Delta v_\varphi = \frac{(\partial r v_\varphi)}{r \partial t}.$$

Wenn man die Stromfunktion gemäß

$$(2) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{y}{r}; \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{x}{r}; \quad v_\varphi = r\omega = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

einführt und nach  $r$  integriert, so ergibt sich aus (1) die Differentialgleichung für  $\Psi$  in der Gestalt

$$(3) \quad \nu \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = f(z, t),$$

wo  $f$  eine Funktion von  $z$  und  $t$ , und  $\Psi$  eine Funktion von  $z$ .]  $x^2 + y^2 = r$  und  $t$  ist. Längs der festen (Grenzen verschwindet die Tangentialgeschwindigkeit, d. h. es wird  $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ ; längs des Drehkörpers hat man

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r\omega_0.$$

Die aus (3) durch Differentiation nach  $r$  abgeleitete Beziehung

$$r \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{J} \Psi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0$$

führt mit Benutzung von (2) und Einsetzung von

$$\mathcal{J} \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

zur Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit

$$(4) \quad r \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Die Zirkulargeschwindigkeit  $v = r\omega$  genügt der Gleichung

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Betrachten wir ein Element der Oberfläche, dessen in die Flüssigkeit weisende Normale mit der  $z$ -Achse  $Oz$  den Winkel  $\vartheta$  bilden möge, und nehmen wir die Ebene durch  $Oz$  und das Element als Nullmeridian ( $r = x, y = 0$ ), so finden wir

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right); \quad \tau_{zy} = -\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}.$$

Die Projektion des Elementes auf die  $xy$ -Ebene ist  $df \cos \vartheta$ , auf die  $yz$ -Ebene  $df \sin \vartheta$ . Daher erhalten wir als tangentiale, auf die Flächeneinheit bezogene Kraft

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} t_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \sin \vartheta - \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \cos \vartheta \\ &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) \sin \vartheta - \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \cos \vartheta \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \sin \vartheta - \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \cos \vartheta. \end{aligned} \right.$$

Da das Linienelement des Meridians die Länge

$$ds = -\frac{dz}{\sin \vartheta} = \frac{dr}{\cos \vartheta}$$

und die durch Drehung um die  $z$ -Achse entstehende Ringzone den Flächeninhalt

$$dS = -2\pi r \frac{dz}{\sin \vartheta} = 2\pi r \frac{dr}{\cos \vartheta}$$

besitzt, so wird das entsprechende widerstehende Drehmoment

$$(7) \quad dM = 2\pi\mu r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dz - 2\pi\mu r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} dr.$$

Mit Benutzung von (3) erhält man daraus

$$(7a) \quad dM = 2\pi\mu r^2 \left[ 2\omega dz + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz + \frac{1}{\nu} f(zt) dz - d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right].$$

Wenn man  $\omega$  in den Ausdruck für  $dM$  einführt, so ergibt sich

$$(7b) \quad dM = 2\pi\mu r^3 \left[ -\frac{\partial \omega}{\partial r} dz + \frac{\partial \omega}{\partial z} dr \right].$$

Mit Einführung von  $ds$  kommt

$$(7c) \quad \begin{aligned} dM &= 2\pi\mu r^3 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cos \vartheta \right) ds \\ &= 2\pi\mu r^3 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Bei der Integration ist zu bedenken, daß längs des Rotationskörpers die Größen  $z$  und  $r$  durch eine Gleichung

$$z = F(r)$$

der Meridiankurve miteinander verbunden sind.

## § 55. Stationäre Drehbewegung von Zylindern in der Flüssigkeit.

1. Bei stationärer Drehbewegung können wir  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  und  $f = f(z)$  setzen. Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{\nu} f(z)$$

oder

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} f(z).$$

Wird die Bewegung der Flüssigkeit etwa von einem oder mehreren konzentrischen, unendlich langen Kreiszylindern erzeugt, so kann die Stromfunktion  $\varphi$  als von  $z$  unabhängig angenommen und die Funktion  $f$  einer Konstanten gleichgesetzt werden. Sei etwa  $f = 4A$ , so ergibt sich aus (1) oder

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 4A$$

die allgemeine Lösung

$$(3) \quad \varphi = Ar^2 + B \log r + C,$$

während die Drehgeschwindigkeit als Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\omega}{dr} = 0$$



sich zu

$$(4) \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = -\left(2A + \frac{B}{r^2}\right)$$

berechnet, wobei die Konstanten  $A$  und  $B$  durch die besonderen Grenzbedingungen zu ermitteln sind.

2. Wenn z. B. die Flüssigkeit das Innere eines sich drehenden Hohlzylinders erfüllt, so ist nur der Fall  $B=0$  möglich und man sieht dann, daß die Flüssigkeit mit der Zylinderwand wie ein fester Körper rotiert.

3. Sei ferner die Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen Zylindern eingeschlossen und sei  $\omega_1$  die Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders mit dem Radius  $r_1$ , während der äußere Zylinder mit dem Radius  $r_2$  als fest angenommen wird, so erhält man

$$(4) \quad A = \frac{1}{2} \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad B = -\omega_1 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\omega = \omega_1 \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} = \omega_1 \frac{r_1^2 (r_2^2 - r^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}$$

und als widerstehendes Kräftepaar pro Längeneinheit des inneren Zylinders

$$(5) \quad M = 2\pi\mu r_1^3 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=r_1} = -4\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \omega_1.$$

Das widerstehende Moment ist also proportional der Drehgeschwindigkeit des Zylinders.

Wenn im besonderen der Radius des äußeren Zylinders unendlich groß wird, so ist  $A=0$  zu setzen und wir erhalten

$$(5a) \quad \omega = \omega_1 \frac{r_1^2}{r^2}, \quad v = r\omega = \omega_1 \frac{r_1^2}{r}; \quad M = -4\pi\mu \omega_1 r_1^2.$$

Da also die Geschwindigkeit der Flüssigkeit umgekehrt proportional dem Abstand von der Achse nach außen hin abnimmt, so ist die Geschwindigkeitsverteilung dieselbe wie im Potentialfeld in der Umgebung eines in der Zylinderachse gelegenen Wirbelfadens. Das widerstehende Moment erweist sich als proportional der Winkelgeschwindigkeit der Drehung und dem Quadrat des Zylinderradius.

Wenn dagegen die Radien der beiden Zylinder nur wenig voneinander verschieden sind, so ist die dazwischen liegende Flüssigkeitsschicht mit einer dünnen ebenen Schicht vergleichbar. In der Tat ergibt sich dann, wenn man

$$\delta = r_2 - r_1, \quad 2r_m = r_1 + r_2, \quad \lambda = r - r_1$$

setzt und nur die ersten Potenzen von  $\delta$  und  $\lambda$  berücksichtigt,

$$\omega = (\delta - \lambda) \frac{r_1}{\delta r_m} \omega_1.$$

Die Geschwindigkeit  $\omega$  nimmt also angenähert linear vom Werte  $\omega_1$  bis zum äußeren Grenzwerte Null ab. Für das Drehmoment erhält man

$$(6) \quad M = \frac{2\pi\mu\omega_1}{\delta} r_m^3 \left(1 - \frac{\delta^2}{4r_m^2}\right)^2 \approx \frac{2\pi\mu\omega_1}{\delta} r_m^3.$$

4. Wenn sich auch der äußere Zylinder mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  dreht, so wird die Drehgeschwindigkeit für einen mittleren Punkt

$$(7) \quad \omega = \frac{r_2^2\omega_2(r^2 - r_1^2) + \omega_1 r_1^2(r_2^2 - r^2)}{r^2(r_2^2 - r_1^2)}$$

und das am inneren Zylinder angreifende Drehmoment

$$(8) \quad M = -\frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (\omega_1 - \omega_2).$$

Das Moment verschwindet, wenn beide Zylinder sich in gleichem Sinne mit derselben Geschwindigkeit drehen.

5. Wenn wir zwei vertikal stehende Zylinder haben und als äußere Kraft die Schwerkraft berücksichtigen, so lauten die beiden auf die Koordinaten  $r$  und  $z$  bezüglichen Bewegungsgleichungen

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_p^2}{r} = \frac{1}{r} \left(2Ar + \frac{B}{r}\right)^2; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g,$$

aus denen sich die Differentialgleichung der Druck- oder Niveauflächen ergibt zu

$$\frac{1}{\rho} dp = g dz + \frac{1}{r} \left(2Ar + \frac{B}{r}\right)^2 dr.$$

Wenn z. B. für  $z=0$ ,  $r=r_0$  der Atmosphärendruck  $p=p_0$  gesetzt wird, so erhält man das Integral

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} (p - p_0) = gz + 2A^2(r^2 - r_0^2) + 4AB \log \frac{r}{r_0} - \frac{B^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right),$$

das für  $p=p_0$  in die Gleichung der Oberfläche übergeht.

## § 56. Versuche mit rotierenden Zylindern.

Die Grundformeln des vorigen Abschnitts beziehen sich auf den Fall unendlich langer Zylinder. Bei den entsprechenden Versuchen mit endlichen Zylindern muß man daher mit sekundären Störungserscheinungen rechnen, die namentlich von den Endflächen ausgehen, und die für die strengere Theorie nur schwer zugänglich sind. Wir werden später noch Gelegenheit haben, auf diese Verhältnisse einzugehen. Vor der Hand genügt es festzustellen, daß bei kleinen Geschwindigkeiten die störenden Einflüsse nur geringfügig ausfallen, und daß die gegebenen Formeln bei eventueller Verwendung von Zusatzgliedern für einige Versuchsmethoden im wesentlichen ihre Gültigkeit behalten werden.

Die Versuche können in erster Linie dazu dienen, das Reibungsmoment und daraus die Zähigkeit der verwendeten Flüssigkeit zu ermitteln. Wenn z. B. der äußere Zylinder durch eine Antriebsvorrichtung in gleichmäßige Rotation versetzt wird (vgl. Abb. 72), so wird das auf den inneren Zylinder ausgeübte Drehmoment durch die Torsion des Fadens bestimmt, an dem der Zylinder aufgehängt ist. Die Torsionskonstante kann durch einen besonderen Schwingungsversuch bestimmt werden. Die Wirkung der Endfläche des inneren Zylinders kann nach Maxwell dadurch in Rechnung gesetzt werden, daß man die „Tauchtiefe“  $h$  des Zylinders um eine fiktive Größe  $k$  vermehrt, die nachträglich wieder eliminiert werden kann. Mißt man z. B. das durch das Torsionsmoment ausgeglichene Drehmoment für zwei verschiedene Höhen  $h$  und  $h'$ , so erhält man

$$(1) \quad M = 4\pi\mu\omega\lambda(h+k), \quad M' = 4\pi\mu\omega\lambda(h'+k),$$

wo für  $\lambda$  zu setzen ist

$$\lambda = 1 : \left| \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right|.$$

Dann wird

$$(1a) \quad M' - M = 4\pi\mu\omega(h' - h) : \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

Wenn die ringförmige Flüssigkeitsschicht zwischen den Zylindern sehr klein ist, so haben wir die Näherungsformel

$$(2) \quad M = 2\pi\mu\omega(h+k) \frac{r_m^3}{\delta}$$

anzuwenden. Naturgemäß wird es schwer sein zu erreichen, daß die Zylinder absolut konzentrisch angeordnet sind. Hat z. B. die Schichtdicke ein Maximum  $\delta(1+m)$  und ein Minimum  $\delta(1-m)$ , so kann man  $\delta$  ersetzen durch

$$\delta(1+m \cos \varphi).$$

Der entsprechende Korrekturfaktor ist dann durch das Integral gegeben

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+m \cos \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - m \cos \varphi + m^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 1 + \frac{m^2}{2},$$

und es ergibt sich mit  $k=0$

$$(2a) \quad M = 2\pi\mu\omega h \frac{r_m^3}{\delta} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right).$$

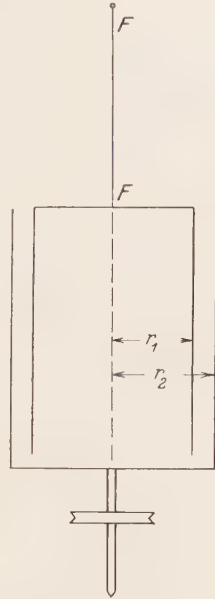


Abb. 72. Versuch mit rotierenden Zylindern zur Bestimmung der Zähigkeit der eingeschlossenen Flüssigkeit.

Wenn die Extremwerte von  $\delta$  z. B. 0,9 und 1,1 betragen, so wird  $m=0,1$ , und man sieht, daß das Drehmoment sich nur um  $\frac{1}{200}$  vergrößert. Um die Größenordnung des Drehmoments zu zeigen, nehmen wir etwa<sup>1)</sup>  $r_1=14$  cm,  $r_2=14,25$  cm,  $h=8$  cm,  $\mu=0,01$  g cm<sup>-2</sup>s,  $\omega=2\pi$  s<sup>-1</sup> (entsprechend einer Umdrehung pro Sekunde). Dann hat das Moment angenähert den Wert

$$M = 8\pi^2 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 14^3 = 35120 \text{ Erg.}$$

Durch Versuche dieser Art läßt sich bestätigen, daß für kleine Geschwindigkeiten das Drehmoment angenähert proportional ist dem Reibungskoeffizienten, und daß das Verhältnis  $\frac{M}{\omega}$  nahezu eine Konstante ergibt, die sich im Verhältnis des Reibungskoeffizienten ändert.

Man kann ferner aus dem Drehmoment auf die Größe der Zähigkeit schließen. Dazu eignen sich besonders Flüssigkeiten mit großer Reibung. Bei der Versuchsanordnung von Searle<sup>2)</sup> dreht sich der innere Zylinder unter dem Antrieb zweier Gewichte  $mg$ , die durch Vermittelung der Rollen  $S$  zwei Fäden an dem Hilfszylinder  $Z$  zur Abwicklung bringen. Sei  $T$  die Dauer der Umdrehung, so ist die Drehgeschwindigkeit des Zylinders

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Sei ferner  $d$  der Durchmesser des Hilfszylinders, so gibt die Gleichsetzung der Arbeit der Gewichte und der widerstehenden Arbeit

$$2mg\omega_1 \frac{d}{2} = M \cdot \frac{2\pi}{T},$$

also

$$\omega_1 = \frac{2\pi M}{g d m T}.$$

Abb. 73. Apparat von Searle zur Bestimmung der Reibung von Flüssigkeiten.

Aus dem Ausdruck für das Widerstandsmoment des inneren Zylinders erhält man bei Einführung der zusätzlichen Höhe  $k$

$$(3) \quad \mu = \frac{M}{4\pi\omega_1} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{h+k} = \frac{g d}{8\pi^2} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{m T}{h+k} = M \frac{m T}{h+k}.$$

Bei veränderlicher Masse  $m$  und konstanter Höhe bestimmt man die Zeit  $T$ ; dann muß gemäß der Formel das Produkt  $mT$  konstant sein.

<sup>1)</sup> Vgl. Bouasse, a. a. O. S. 226.

<sup>2)</sup> G. F. C. Searle, Proc. Camb. Phil. Soc. 16, 7 (1912).

Wenn  $h$  sich ändert, so stellt die Kurve  $mT=f(h)$  eine gerade Linie dar, deren Schnittpunkt mit der  $h$ -Achse vom Anfangspunkt den Abstand  $k$  liefert.

Der Apparat von Searle ist in erster Linie für die Untersuchung von ausgesprochen zähen Flüssigkeiten geeignet. Setzen wir etwa  $d=2$  cm,  $r_1=1,9$ ,  $r_2=2,5$ ,  $m=100$ ,  $T=9$  s.,  $h=10$  cm,  $k=0,5$  cm, so wird

$$\mu = 247 \text{ g s cm}^{-2}.$$

Damit ist etwa die Größenordnung des Reibungskoeffizienten bezeichnet, wie sie hier vorauszusetzen ist. Molin<sup>1)</sup> fand mit Hilfe dieses Verfahrens, daß  $\mu$  von der Winkelgeschwindigkeit nicht mehr unabhängig ist, wie zunächst in der Theorie vorausgesetzt wurde. Es zeigte sich nämlich, daß bei konstantem  $h$  das Produkt  $mT$  nur für größere  $m$  konstant bleibt, während es für kleinere  $m$  zunimmt und einer vertikalen Asymptote sich annähert. Daraus würde folgen, daß die Zähigkeit mit abnehmender Drehgeschwindigkeit wächst. Die Abhängigkeit läßt sich nach Molin durch eine Formel folgender Art darstellen:

$$(4) \quad \mu = \mu_0 + b e^{-\lambda \omega_1}.$$

Man sieht daraus, daß sich die klassische Theorie von Stokes-Navier nicht ohne weiteres auf Flüssigkeiten mit sehr großer Zähigkeit anwenden läßt.

2. Der laminare und turbulente Zustand. Wie wir gesehen haben, ergibt sich, daß das Verhältnis  $\frac{M}{\omega}$  des Reibungsmomentes und der Geschwindigkeit für kleine Reynoldssche Zahlen konstant ist, unter der Voraussetzung, daß sich die Zylinderabmessungen nicht ändern. Wenn die Geschwindigkeit den kritischen Wert  $\omega_k$  überschreitet, so wird der Strömungszustand turbulent, und das Kraftmoment steigt, einem parabolischen Gesetz folgend, schneller an, während das Verhältnis  $\frac{M}{\omega}$  etwa linear mit  $\omega$  zunimmt. Der kritische Wert bezeichnet genau genommen diejenige Geschwindigkeitsgrenze, unterhalb welcher der Bewegungszustand notwendig laminar ist, während für  $\omega > \omega_k$  zunächst beide Strömungsarten möglich sind. Das Drehmoment variiert für  $\omega > \omega_k$  zwischen einem Maximum und einem Minimum, die den Punkten  $B_1$  und  $B_2$  des Diagramms entsprechen. Je besser der Apparat konstruiert und je gleichmäßiger die Rotation ist, desto länger läßt sich der laminare Zustand erhalten. Nur entsprechen die über  $A$  hinaus verlängerten Teile der laminaren Kurven einem nicht mehr stabilen Zu-

<sup>1)</sup> K. Molin, Proc. Camb. Phil. Soc. 20, 23 (1920).

stand. Couette<sup>1)</sup>, dem wir mehrere Versuche verdanken, fand bei einem Zylinderradius von 14,51 cm und einer Schichtstärke der Flüssigkeit von  $\delta = 0,237$  cm und einer Reibung  $\mu = 0,01096$  g cm<sup>-2</sup>s als kritische Umdrehungszahl 56 Touren pro Minute, der eine Reynoldsschen Zahl  $\Re_k \approx 1800$  entspricht. Während der laminare Zustand durch  $\Re_l < 1800$  charakterisiert ist, wird im ausgesprochenen turbulenten Bereich  $\Re_l > 2500$

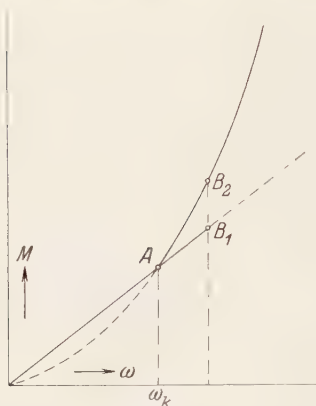


Abb. 74.

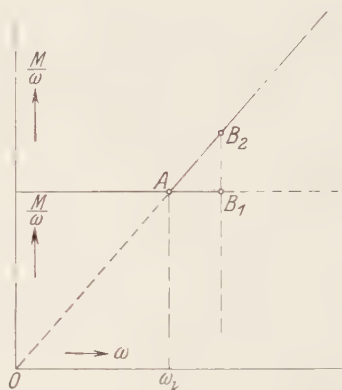


Abb. 75.

Abb. 74—75. Abhängigkeit des Reibungsmoments eines in der Flüssigkeit rotierenden Zylinders von der Drehgeschwindigkeit für den laminaren und turbulenten Fall.

Die Zahlen beziehen sich zunächst auf den Fall, daß der äußere Zylinder rotiert. Mallock<sup>2)</sup> hat auch den Fall untersucht, daß der innere Zylinder sich dreht. Ein für beide Fälle angestellter Versuch ergab folgende Werte:

Äußerer Zylinder beweglich

( $r_1 = 7,63$ ,  $r_2 = 9,94$ ,  $r_2 - r_1 = 2,31$  cm) :  $n_l < 75$  Touren/min.,  $n_t > 104$ .

Innerer Zylinder beweglich

( $r_1 = 7,63$ ,  $r_2 = 8,68$ ,  $r_2 - r_1 = 1,06$  cm) :  $n_l < 77$  Touren/min.,  $n_t > 94$ .

Trotz der verschiedenen Dicke der flüssigen Schicht stimmen die Grenzen der Kennzahlen ungefähr überein. Da aber die relative Instabilität im zweiten Falle mit der Dicke der Schicht wächst, so besitzt der Fall des rotierenden Innenzylinders jedenfalls eine größere Instabilität. Wenn man die Wirbelstärke

$$w = \frac{1}{2r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{2r} \frac{\partial(r^2\omega)}{\partial r}$$

<sup>1)</sup> M. Couette, Ann. d. chim. et phys. (6), 21, 433 (1890); J. de Phys. (2), 9, 566 (1890).

<sup>2)</sup> A. Mallock, Phil. Trans., A, 187, 41 (1896);



bildet, so ergibt sich in beiden Fällen

$$(5) \quad w = \omega_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad w = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Wenn  $\omega_1 = \omega_2$  ist, so erhält die Wirbelung in dem instabilen Falle eine wesentlich kleinere Größe als im anderen Falle.

Über die Resultate der theoretischen Stabilitätsuntersuchung soll noch später ausführlich gesprochen werden.

### § 57. Theorie des geschmierten Zapfens.

Die in § 55 gegebenen Formeln für zwei koaxiale, in der Flüssigkeit rotierende Kreiszyylinder können auf den Fall eines Zapfens angewendet werden, der sich in einer kreiszylindrischen Lagerschale dreht, während der enge Zwischenraum zwischen Zapfen und Lager mit einem zähflüssigen Schmiermittel (Öl) ausgefüllt ist. Wenn Zapfen und Lager konzentrisch sind und ihre Radien  $a, a + \delta$  sich nur um eine kleine Größe  $\delta$  unterscheiden, so ergibt sich für die Einheit der Zapfenlänge aus § 55, (6) das zur Überwindung der Reibung erforderliche Drehmoment

$$(1) \quad M = -2\pi\mu a^3 \frac{\omega}{\delta} = -2\pi\mu \frac{u a^2}{\delta},$$

wo  $u = \omega \cdot a$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens bedeutet, während die resultierende Druckkraft infolge der Kreissymmetrie verschwindet. Tatsächlich kann die konzentrische Lage von Zapfen und Lager nur bei unbelastetem Zapfen eintreten, oder aber als Grenzform für kleine Drucke und hohe Geschwindigkeiten. Jede Belastung wird zur Folge haben, daß der Zapfen sich aus seiner zentrischen Lage verschiebt, und zwar im Falle der Drehung in einer gegen die Belastung im Drehsinn geänderten Richtung.

Um die Vorgänge am Zapfen unter der Voraussetzung einer exzentrischen Lage der Zapfen- und Lagerquerschnitte, d. h. einer zylindrischen Flüssigkeitsschicht von veränderlicher Dicke, darzustellen, können wir nach Sommerfeld<sup>1)</sup> anknüpfen an den früher behandelten Fall einer ebenen, auf einer Schmierschicht ruhenden Tragfläche, die zur Unterlage um einen (kleinen) Winkel geneigt ist. Es wird durch die Rechnung bestätigt, daß entsprechend diesem ebenen Falle die exzentrische Lage die Bedingung dafür ist, daß ein endlicher Zapfendruck vom Lager aufgenommen werden kann. Um das zu zeigen, gehen wir aus von der

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld, Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, Z. f. Mathem. u. Physik, Bd. 50 (1904), S. 97—155; Z. f. techn. Phys., Bd. 2 (1921), S. 58—63; 89—93.

Gleichung (2), § 10, die wir auf ein elementares, als eben anzusehendes Stück der Schmierschicht anwenden. Beziehen wir die Polarkoordinaten auf den Mittelpunkt 0 des Zapfens und die horizontale Zentrale beider Spurkreise (Abb. 76), führen also  $ad\varphi$  statt  $dx$  ein, so haben wir

$$(2) \quad \frac{dp}{d\varphi} = 6\mu u a \frac{h-h_0}{h^3},$$

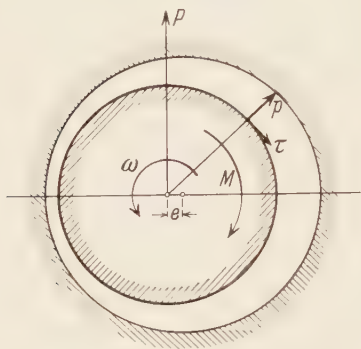
wobei die Dicke  $h$  von  $\delta$ , der Exzentrizität  $e$  und der Amplitude  $\varphi$  gemäß der Gleichung

$$h = \delta + e \cos \varphi$$

abhängt. Der Druck  $p$  ist, wenn die Schmierschicht ununterbrochen ist, eine stetige und periodische Funktion von  $\varphi$ , also

$$p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi); \quad p(2\pi) = p(0).$$

Abb. 76. Zur Theorie des geschmierten Zapfens.



Integrieren wir daher (2) von 0 bis  $2\pi$ , so erhalten wir

$$0 = p(2\pi) - p(0) = 6\mu u a \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} - h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} \right].$$

Setzen wir  $\alpha = \frac{\delta}{e}$  und benutzen die Integralformeln

$$(3) \quad \begin{cases} J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \\ J_2 = -\frac{dJ_1}{d\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2} = \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}, \\ J_3 = -\frac{1}{2} \frac{dJ_2}{d\alpha} = \frac{2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}, \end{cases}$$

so kommt für  $h_0$

$$(4) \quad h_0 = \frac{eJ_2}{J_3} = \frac{2\alpha e(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}$$

und für das entsprechende Argument des größten und kleinsten Druckes

$$(5) \quad \cos \varphi_0 = -\frac{3\alpha}{2\alpha^2 + 1}.$$

Für  $e=0$  ( $\alpha=\infty$ ) wird  $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ , für  $e=\delta$  wird  $\varphi_0 = \pm \pi$ . Im allgemeinen Falle liegen die Stellen extremen Druckes zwischen diesen Grenzen. Mit  $h_0$  ist das Druckgefälle nach (2) in völlig bestimmter Form durch die Größe  $\alpha$  dargestellt.

Für die tangentielle Reibung finden wir unmittelbar aus dem früher gegebenen Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$(6) \quad \tau_{r\varphi} = -\mu u \frac{4h - 3h_0}{h^2}.$$

2. Die genauere Behandlung des Zapfenproblems führt Sommerfeld auf die Integration der Differentialgleichung für die Stromfunktion  $\Psi$  der langsamen Strömung (vgl. § 34) zurück

$$\Delta \Delta \Psi = 0.$$

Die Grenzbedingungen sind, wie ohne weiteres verständlich ist,

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = u, & \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } r = a, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für } r = a + h. \end{cases}$$

Setzen wir  $\Psi$  in der Form an

$$(8) \quad \Psi = \frac{1}{2} A r^2 \lg r + (B - 2A) \frac{r^2}{4} + C \lg r + D,$$

so erhalten wir für die Konstanten nach (7) folgende Werte

$$(8a) \quad \begin{cases} 2A = 6 \frac{h - h_0}{h^3} a u - \frac{4h - 3h_0}{h^2} u - \frac{u}{a}, \\ B = -6 \frac{h - h_0}{h^3} a \lg a \cdot u - \frac{4h - 3h_0}{h^2} (1 - \lg a) u + \frac{u}{a} (1 - \lg a), \\ \frac{4C}{a^2} = 6 \frac{h - h_0}{h^3} a u + \frac{4h - 3h_0}{h^2} u + \frac{u}{a}. \end{cases}$$

Daraus leitet sich dann das Druckgefälle wie folgt her:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \mu r \frac{\partial}{\partial r} \Delta \Psi \\ &= 6\mu a u \frac{h - h_0}{h^3} - \mu u \frac{4h - 3h_0}{h^2} - \mu u \frac{u}{a}. \end{aligned}$$

Das erste Glied ist mit (2) identisch, und die beiden zusätzlichen Glieder sind im Verhältnis zu (2) klein von der Ordnung  $\frac{h}{r}$  und  $\frac{h}{r^2}$ , womit die Berechtigung der Näherungsrechnung nachgewiesen ist. Der Wert der tangentialen Reibung  $\tau_{r\varphi} = \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right)_{r=a}$  stimmt sogar, wie man sofort bestätigt, genau mit (6) überein.

Wenn man die Integralexpressionen (3) benutzt, erhält man als allgemeines Gesetz für die Druckverteilung und die Reibung

$$(10) \quad p(\varphi) = p_0 + \frac{6\mu a u}{\vartheta^2} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1} \cdot \frac{\sin \varphi}{\alpha + \cos \varphi} \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha + \cos \varphi} \right),$$

$$(11) \quad \tau_{r\varphi}(\varphi) = -\mu \frac{u}{e} \left[ \frac{4}{\alpha + \cos \varphi} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{(2\alpha^2 + 1)(\alpha + \cos \varphi)^2} \right].$$

Der Druck setzt sich zusammen aus einem konstanten Teil, der für den Gesamtausdruck nicht in Betracht kommt, und einem veränderlichen Bestandteil  $p_1$ , der bei der angegebenen Drehrichtung des Zapfens längs der oberen Hälfte des Umfanges positiv und längs der unteren Hälfte negativ ist, wobei die Absolutbeträge für zwei in bezug auf die Achse symmetrisch gelegene Punkte gleich ausfallen. Die Reibung wirkt im allgemeinen entgegen der Drehrichtung und wächst mit abnehmender Dicke der Schmierschicht.

Summieren wir nun die einzelnen Normal- und Tangentialkräfte, so ergibt sich nach einfachen statischen Gesetzen eine Einzelkraft  $P$ , die in  $O$  angreift und vertikal gerichtet ist, d. h. senkrecht steht zur Verschiebung des Zapfenmittelpunktes, sowie ein Reibungsmoment, das der Drehung entgegenwirkt.

Aus

$$P = a \left[ \int_0^{2\pi} p \sin \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \tau \cos \varphi d\varphi \right]$$

ergibt sich durch Benutzung der Ausdrücke für  $p$  und  $\tau$

$$P = 6\mu a^2 u \int_0^{2\pi} \frac{h - h_0}{h^3} \cos \varphi d\varphi.$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich auf (3) zurückführen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi} - \alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2} = J_1 - \alpha J_2,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2} - \alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^3} = J_2 - \alpha J_3.$$

Man erhält dann

$$(12) \quad \frac{\partial^2 P}{6\mu a^2 u} = \frac{2\pi}{|\alpha^2 - 1|} \cdot \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1}.$$

Ebenso wird

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= a^2 \int \tau d\varphi = \frac{4\pi\mu a^2 u}{\delta} \cdot \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)}{|\alpha^2 - 1|(2\alpha^2 + 1)} = 4\pi\mu a^2 u \frac{\delta^2 + 2e}{(2\delta^2 + e)\sqrt{\delta^2 - e^2}}, \\ \frac{M\delta}{\mu a^2 u} &= \frac{4\pi\alpha}{|\alpha^2 - 1|} \cdot \frac{\alpha^2 + 2}{(2\alpha^2 + 1)}. \end{aligned} \right.$$

Man sieht, daß bei verschwindender Exzentrizität ( $\alpha = \infty$ )  $P$  verschwindet, während der Ausdruck für das Moment in (1) übergeht.

In den Formeln (12) und (13) ist der wesentliche Inhalt des Sommerfeldschen Ähnlichkeitsgesetzes ausgesprochen. Durch Division der Gleichungen ergibt sich die sogenannte Reibungszahl

$$f = \frac{M}{Pa} = \frac{\delta(\alpha^2 + 2)}{a^3\alpha} = \frac{\mu a}{\delta} \frac{u}{P} F(\alpha),$$

die z. B. für  $\alpha=1$  (bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit) den Wert

$$f_0 = \frac{\delta}{a}$$

annimmt. Die physikalischen Größen gehen also in die Reibungszahl nur in der Verbindung  $\frac{u}{P}$  ein. Es ergibt sich ohne weiteres aus den Formeln, daß  $f$  und damit  $M$  minimale Werte erhalten für  $\alpha = \sqrt{2}$ , und zwar

$$f_{\min} = \frac{\delta \sqrt{2}}{3} = 0,943 f_0; \quad M_{\min} = 0,943 P \delta.$$

Beide Werte  $f_0$  und  $f_{\min}$  sind nur von den Lagerabmessungen abhängig und von  $P$  und  $u$  unabhängig. Für den dem Minimum zugeordneten Wert von  $a$  wird ferner

$$\frac{\delta^2 P}{\mu a^2 u} = 15,1.$$

Wir erhalten daraus den günstigsten Wert der Drehgeschwindigkeit (bei gegebenem  $P$ ) bzw. den günstigsten Wert des Druckes (bei gegebenem  $u$ ). Sommerfeld führt für diese Werte die Bezeichnung Übergangsgeschwindigkeit bzw. Übergangsdruck ein. Der Betrag der Übergangsgeschwindigkeit wächst mit größer werdendem Zapfendruck und mit abnehmender Zähigkeit des Schmiermittels (Abb. 77).

Für den Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$  (hinreichend großen Drehgeschwindigkeiten entsprechend) erhalten wir

$$M_{\infty} = \frac{2 \pi \mu a^2 u}{\delta}; \quad f_{\infty} = \frac{2 \pi \mu a u}{\delta P}.$$

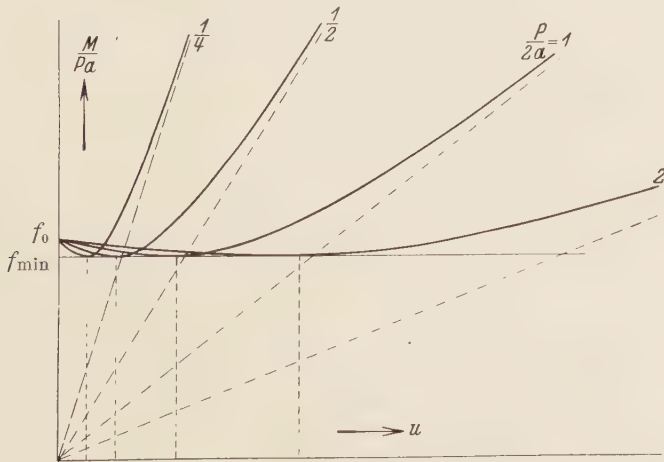


Abb. 77. Zapfenreibungszahl in Abhängigkeit vom Zapfendruck und der Drehgeschwindigkeit. (Nach Sommerfeld).

Zum Vergleich mit der Wirklichkeit beziehen wir uns etwa auf die Beobachtungen von R. Stribeck<sup>1)</sup>, deren Resultate hier in der graphischen Darstellung der  $f$ -Werte in Abhängigkeit vom Zapfendruck und der Drehzahl wiedergegeben sind (Abb. 78). Die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und Versuchskurven erstreckt sich auf den allgemeinen Verlauf (Abfall von einem Anfangswert auf ein gleiches Minimum und

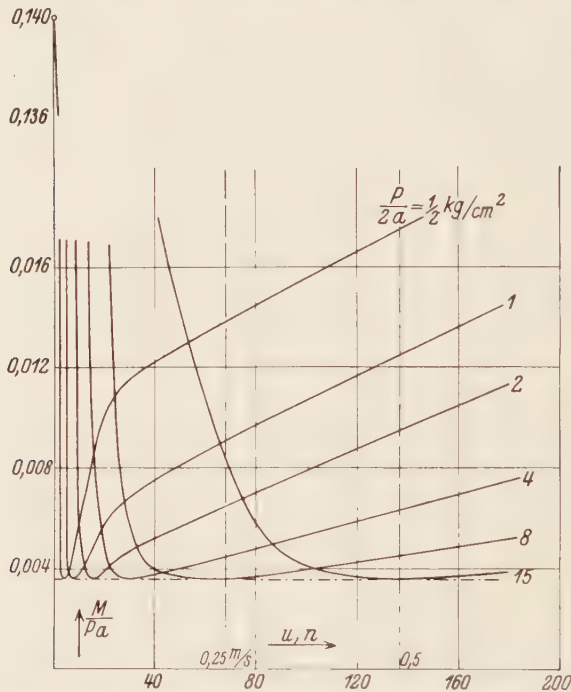


Abb. 78. Zapfenreibungszahl in Abhängigkeit vom Zapfendruck und der Drehgeschwindigkeit. (Nach Stribeck.)

nachfolgenden Anstieg), das Vorhandensein der Übergangswerte für Geschwindigkeit und Druck und die Unabhängigkeit der kleinsten Reibungszahl von  $P$  und  $u$ . Das theoretische Ähnlichkeitsgesetz erscheint jedenfalls in der Nähe des Minimums wirklich erfüllt, indem hier die zu gleichem Verhältnis  $\frac{P}{u}$  gehörenden Reibungszahlen zusammenfallen. Die immerhin recht erheblichen Abweichungen der Meßwerte von den Ergebnissen der Theorie im einzelnen mögen zum Teil in der Unvollständigkeit der mathematischen Voraussetzungen, zum Teil aber auch in der

<sup>1)</sup> R. Stribeck, Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager, Z. V. D. I. 46, 1902.



von der Theorie nur schwer erfaßbaren Änderung der Zähigkeit der verwendeten Öle infolge Temperaturschwankung und anderer physikalischer Ursachen begründet sein. Unter den Versuchen zur Verbesserung der Sommerfeldschen Theorie ist außer dem von Gumbel-Everling<sup>1)</sup> ein neuerer bisher nicht veröffentlichter von A. Schiebel zu nennen, der ein mit dem Ritzschen verwandtes Näherungsverfahren anwendet auf den Fall, daß die Flüssigkeitsschicht den Zwischenraum zwischen Zapfen und Lager nicht vollständig ausfüllt.

### § 58. Langsame Rotation eines Zylinders in der Nähe einer ebenen Wand.

1. Das Problem zweier exzentrischer mit verschiedener Geschwindigkeit rotierender Zylinder führt auf größere mathematische Schwierigkeiten und sehr umständliche Rechnungen. Bemerkenswerte Ansätze hat Frazer<sup>2)</sup> gegeben in einer Arbeit, deren methodische Gesichtspunkte wir bereits benutzt haben. Wir wollen hier auf die Behandlung des allgemeinen Falles verzichten und nur den Spezialfall behandeln, daß der eine Zylinder unendlich groß und in Ruhe sein möge, also das Bewegungsfeld einer durch eine feste ebene Wand begrenzten Flüssigkeit bestimmen, das von einem in der Nähe der Wand mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Zylinder vom Radius  $a$  erzeugt wird. Sei  $d=MO$  der Abstand des Mittelpunktes  $M$  des Kreises von der Wand, deren Spur wir als  $x$ -Achse nehmen, und sei  $b^2=d^2-a^2$  das Quadrat der von  $O$  aus an den Kreis gezogenen Tangente (vgl. Abb. 79);

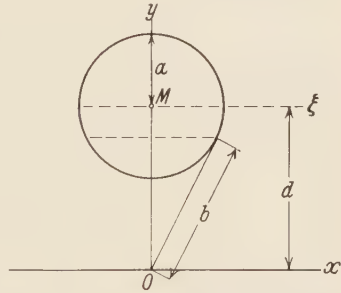


Abb. 79. Zylinder in der Nähe einer ebenen Wand.

dann können wir nach § 34 die Stromfunktion in der Form einführen

$$(i) \quad -i\psi = zF_2(\bar{z}) - \bar{z}F_1(z) + f_1(z) - f_2(\bar{z}),$$

wo  $z=x+iy$ ,  $\bar{z}=x-iy$  komplexe Hilfsvariable sind. Die Grenzbedingungen lauten dann, wenn man  $id=c$  setzt,

$$1) \text{ für den Kreisrand: } v_x - iv_y = -\frac{i\omega a^2}{z-c} = 2i \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \text{also } 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\omega a^2}{z-c},$$

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = -\frac{\omega a^2}{\bar{z}+c};$$

$$2) \text{ für die ebene Wand } (y=0): \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ für } z-\bar{z}=0.$$

<sup>1)</sup> Gumbel-Everling, Reibung und Schmierung im Maschinenbau, Berlin 1925.  
<sup>2)</sup> R. A. Frazer, Phil. Trans. R. Soc. London, Vol. 225 (1926), S. 93 ff.

Da am Kreis

$$(z - c)(\bar{z} + c) = a^2, \quad \text{also } \bar{z} = \frac{a^2}{z - c} - c = -\frac{zc + b^2}{z - c} \text{ ist,}$$

so erhalten wir daher die Funktionalbedingungen

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{i\omega a^2}{2(t-c)} = F_2 \left( \frac{-tc - b^2}{t-c} \right) + \left( \frac{tc + b^2}{t-c} \right) \cdot F_1'(t) + f_1'(t) \\ -\frac{i\omega a^2}{2(t+c)} = F_1 \left( \frac{tc - b^2}{t+c} \right) - \left( \frac{tc - b^2}{t+c} \right) \cdot F_2'(t) + f_2'(t) \\ F_1(t) - tF_1'(t) + f_2'(t) = F_2(t) - tF_2'(t) + f_1'(t) = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man  $f_1'$  und  $f_2'$ , so gelangt man zu den Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{i\omega a^2}{2(t-c)} = F_2 \left( \frac{-tc - b^2}{t-c} \right) - F_2(t) + \frac{t^2 + b^2}{t-c} F_1'(t) \\ -\frac{i\omega a^2}{2(t+c)} = F_1 \left( \frac{tc - b^2}{t+c} \right) - F_1(t) + \frac{t^2 + b^2}{t+c} F_2'(t). \end{cases}$$

Setzt man

$$F_1(t) = \frac{\alpha_1 t + \beta_1}{t^2 + b^2}, \quad F_2(t) = \frac{\alpha_2 t + \beta_2}{t^2 + b^2},$$

so ergeben die Gleichungen (3) folgende Werte für  $\alpha$  und  $\beta$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{i\omega a^2}{2}, \quad \beta_1 = \beta_2 = -\frac{ic\omega a^2}{2},$$

also

$$(4) \quad F_1(t) = \frac{i\omega a^2}{2} \cdot \frac{t-c}{t^2 + b^2}, \quad F_2(t) = \frac{-i\omega a^2}{2} \cdot \frac{t+c}{t^2 + b^2}$$

Dann ergibt sich aus (2) für die Ableitungen  $f_1'(t)$  und  $f_2'(t)$

$$f_1'(t) = \frac{i\omega a^2}{2} \cdot \frac{3t^2 c + b^2(2t+c)}{(t^2 + b^2)^2}; \quad f_2'(t) = \frac{i\omega a^2}{2} \cdot \frac{3ct^2 + b^2(c-2t)}{(t^2 + b^2)^2},$$

also durch Integration

$$(5) \quad f_1 = \frac{i\omega a^2}{2} \left[ 2 \frac{c}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{b} - \frac{ct + b^2}{t^2 + b^2} \right]; \quad f_2 = \frac{i\omega a^2}{2} \left[ 2 \frac{c}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{b} - \frac{ct - b^2}{t^2 + b^2} \right].$$

Wir erhalten daher für die Stromfunktion nach Hinzufügung einer geeigneten Konstanten

$$(6) \quad \Psi = -\frac{\omega a^2}{2} (z - \bar{z}) \left[ \frac{z - id}{z^2 + b^2} - \frac{\bar{z} + id}{\bar{z}^2 + b^2} \right] - \frac{\omega a^2 id}{b} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{b} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\bar{z}}{b} \right].$$

Wenn wir wieder gewöhnliche Koordinaten einführen und vom trigonometrischen  $\operatorname{tg}$  zum hyperbolischen  $\mathfrak{Tg}$  übergehen, entsprechend der Beziehung

$$i \operatorname{arc} \operatorname{tg} i\alpha = -\mathfrak{Ar} \mathfrak{Tg} \alpha,$$

so ergibt sich

$$(6a) \quad \Psi = \omega a^2 \left[ \frac{d}{b} \mathfrak{Ar} \mathfrak{Tg} \frac{2yb}{r^2 + b^2} - 2y \frac{y(r^2 - b^2) + d(r^2 - 2y^2 + b^2)}{(r^2 + b^2 + 2yb)(r^2 + b^2 - 2yb)} \right].$$

Führt man die Koordinaten  $\xi = x, \eta = y - d$  ein in bezug auf ein in den Punkt  $M$  parallel verschobenes System und setzt  $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$ , so hat man

$$(6b) \quad \Psi = \omega a^2 \left[ \frac{d}{b} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{2b(\eta + d)}{\rho^2 - a^2 + 2d(\eta + d)} - 2(\eta + d) \frac{2\rho^2 d + \eta(a^2 + \rho^2)}{(\rho^2 - a^2) + 4(d + \eta)(d\rho^2 + \eta a^2)} \right].$$

Wenn  $\rho = a$  wird, so kommt

$$(7) \quad (\Psi)_a = \omega a^2 \left[ \frac{d}{b} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b}{d} - 1 \right] = \text{const.}$$

Man sieht also, daß der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $a$  in der Stromlinienschar enthalten ist. Die Stromlinie  $\Psi = 0$  zerfällt in die  $x$ -Achse (Wandlinie)  $y = 0$  und in eine singuläre Stromlinie, die den Grundkreis umschließt und die  $x$ -Achse berührt. Wir haben das Strombild für den Fall  $\frac{b}{d} = \frac{8}{9}$  dadurch konstruiert, daß wir zunächst die  $\Psi$ -Werte für konstante  $y$  in Abhängigkeit von  $r$  zur Darstellung gebracht und dann die den äquidistanten Parallelen zur  $r$ -Achse entsprechenden Schnittwerte auf die  $xy$ -Ebene übertragen haben (Abb. 80). Man erkennt deutlich den Verlauf der Flüssigkeitsbewegung; insbesondere sieht man, daß die geschlossene Stromlinie  $\Psi = 0$  das gesamte Feld in zwei Gebiete teilt, das innere Feld der eigentlichen zirkulatorischen Bewegung um den Zylinder und das Feld der äußeren verhältnismäßig schwachen Strömung, in dem die Stromlinien nach beiden Seiten ins Unendliche gehen.

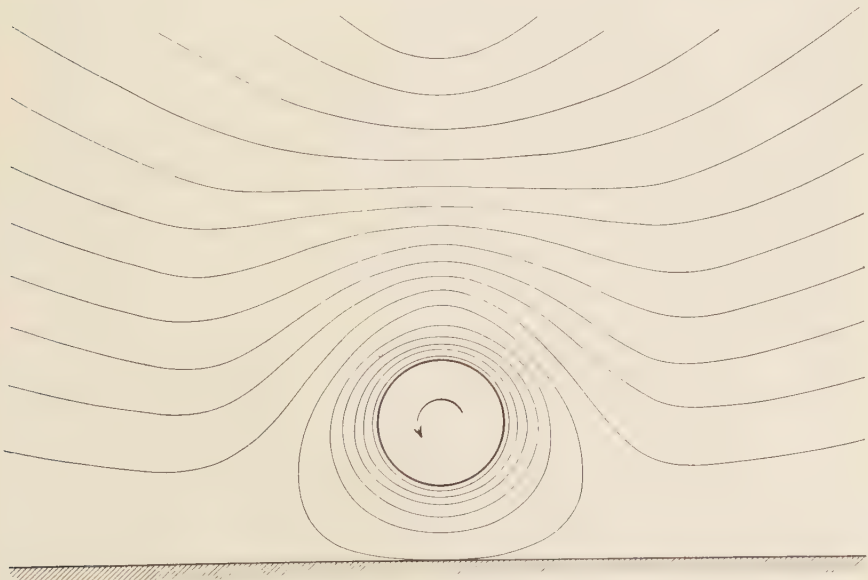


Abb. 80. Strombild in der Umgebung eines Kreiszylinders, der in der Nähe einer ebenen Wand rotiert. (Nach Frazer.)

Aus dem Ausdruck (7) erhalten wir übrigens unmittelbar als mittlere Geschwindigkeit der zirkulierenden Flüssigkeitsschicht oder des Durchflusses durch den Spalt zwischen Zylinder und Wand

$$v_m = \frac{\omega a^2}{d-a} \left( 1 - \frac{d}{b} \operatorname{Re} \operatorname{Zg} \frac{b}{d} \right).$$

Zur Bestätigung der Grenzwerte und für späteren Bedarf bestimmen wir noch die Komponenten der Feldgeschwindigkeit in der Richtung des Kreisradius und der dazu senkrechten Richtung. Durch eine einfache, wenn auch etwas umständliche Rechnung ergibt sich

$$(8) \quad v_\varphi = \frac{4\omega a^2(\eta+d)}{[(\rho^2-a^2)^2+4(\eta+d)(a^2\eta+\rho^2d)]^2} \cdot [-(\rho^2-a^2)^3 \sin \varphi + \rho(\rho^2-a^2)^2(d+\eta) - 2d\rho \cos^2 \varphi(\rho^2-a^2)^2 + 4\rho b^2(\rho^2-a^2)(d+\eta) + 4a^2\rho(\eta+d)^3],$$

$$(9) \quad v_\rho = - \frac{4\omega a^2 \cos \varphi(\eta+d)(\rho^2-a^2)^2[2d\eta+\rho^2+a^2]}{[(\rho^2-a^2)^2+4(\eta+d)(a^2\eta+\rho^2d)]^2}.$$

Setzen wir  $\rho = a$ , so erhalten wir voraussetzungsgemäß  $(v_\varphi)_{\rho=a} = \omega a$  für die Umfangsgeschwindigkeit, während beide Komponenten für  $y = \eta + d = 0$  verschwinden.

Zur Berechnung der auf den Kreiszyylinder wirkenden Flüssigkeitskräfte bedürfen wir zunächst des Ausdrucks für den Normaldruck, der unmittelbar der früher gegebenen allgemeinen Formel zu entnehmen ist

$$p = 4\mu[F'_1(z) + F'_2(\bar{z})].$$

Wenn wir die Werte für die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  einsetzen, so kommt

$$p = 2\mu\omega a^2 \left[ i \frac{d}{dz} \left( \frac{z-id}{z^2+b^2} \right) - i \frac{d}{d\bar{z}} \left( \frac{\bar{z}+id}{\bar{z}^2+b^2} \right) \right].$$

Die beiden in der Klammer stehenden Ausdrücke sind konjugiert komplex. Setzen wir daher

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z-id}{z^2+b^2} \right) = A + iB,$$

so wird

$$p = -4\mu\omega a^2 \cdot B$$

oder, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$(10) \quad p = 8\mu\omega a^2 \left\{ \frac{2xy(x^2-y^2+b^2)(b^2-x^2+y^2-2dy) + x(y-d)[(x^2-y^2+b^2)^2 - 4x^2y^2]}{[(x^2-y^2+b^2)^2 + 4x^2y^2]^2} \right\}.$$

In ähnlicher Weise läßt sich übrigens der Ausdruck für die Wirbelstärke  $w$  in einem beliebigen Feldpunkt bestimmen, und es verdient bemerkt zu werden, das die Linien gleichen Druckes und gleicher Wirbelstärke ein System orthogonaler Potentiallinien darstellen, was besonders für das zugeordnete elastische Problem von Bedeutung ist, wie ich an anderer Stelle darlegen werde.

Hier interessiert uns vor allem der Druckverlauf längs des Kreises  $\varrho = a$ , für den wir abgesehen von einer additiven Konstanten folgende Darstellung gewinnen:

$$(11) \quad p = 2\mu\omega a^2 \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2} = 2\mu\omega \frac{\xi\eta}{(d + \eta)^2}.$$

Man sieht, daß der Druck in den Schnittpunkten des Kreises mit den Achsen  $\xi, \eta$  verschwindet, im ersten und vierten Quadranten positive, im zweiten und dritten Quadranten negative Werte annimmt, ferner den größten positiven Wert im dritten und den größten negativen Wert im zweiten Quadranten erreicht.

Die tangentielle Reibungsspannung längs des Kreises berechnen wir aus den Geschwindigkeitskomponenten (8) und (9). Bilden wir ferner das Geschwindigkeitsgefälle in der radialen Richtung und setzen dann  $\varrho = a$ , so ergibt sich

$$(12) \quad \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = -\omega \left[1 + \frac{2a^2 \cos^2\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2}\right]; \quad \left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = 0.$$

Der erste Ausdruck zeigt, daß das Gefälle der zirkularen Geschwindigkeit im Punkte  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ein absolutes und im Punkte  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  ein relatives Minimum besitzt, während es in den zur  $y$ -Achse symmetrisch gelegenen Punkten  $\sin\varphi = -\frac{a}{d}$  den absolut größten Wert annimmt. Wir erhalten ferner nach § 8, (4) als Reibungsspannung am Zylinder

$$(13) \quad \tau = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varrho} - \frac{v_\varphi}{a}\right)_{\varrho=a} = -2\mu\omega \left[1 + \frac{a^2 \cos^2\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2}\right].$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (10) und (13) können wir nun die resultierende, auf den Zylinder wirkende Kraft und das widerstehende Reibungsmoment berechnen. Die Form der Ausdrücke für  $p$  und  $\tau$  läßt zunächst erkennen, daß die senkrecht zur Wand gerichtete Komponente  $P_y$  der resultierenden Kraft verschwindet. Für die vom Druck herührende Komponente parallel zur Wand haben wir

$$P_p = -a \int_0^{2\pi} p \cos\varphi d\varphi = -2\mu\omega a^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2}.$$

Die Schubkräfte dagegen liefern

$$P_\tau = 2\mu a \omega \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{a^2 \cos^2\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2}\right] \sin\varphi d\varphi.$$

Benutzt man die Integralformeln

$$(14) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2} = 2\pi \frac{d-b}{a^2 b}; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi}{(d + a\sin\varphi)^2} = -2\pi \frac{(d-b)^2}{a^3 b},$$

so kommt

$$(15) \quad P_p = 4\pi\mu\omega \frac{(d-b)^4}{a^2b}; \quad P_\tau = -4\pi\mu\omega \frac{(d-b)^4}{a^2b}$$

und daher

$$(16) \quad P = P_p + P_\tau = 0.$$

Wir erhalten also das bemerkenswerte Resultat, daß Druck und Schub entgegengesetzt gleiche Kräfte erzeugen, oder daß die Flüssigkeit keine bewegende Kraft auf den Kreiszyylinder ausübt.

Wohl aber entsteht ein Reibungsmoment, das natürlich nur von den Tangentialspannungen herrührt. Wir erhalten nämlich nach (13) mit Benutzung der Integralformel (14) den Ausdruck

$$(17) \quad M = a^2 \int \tau d\varphi = 4\pi\mu\omega a^2 \left[ 1 + \frac{d-b}{b} \right] = 4\pi\mu\omega a^2 \cdot \frac{d}{b}.$$

In der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit erfährt der Zylinder, wie wir früher gezeigt haben, das Reibungsmoment

$$M_0 = 4\pi\mu\omega \cdot a^2.$$

In der Tat geht der Ausdruck (17) in  $M_0$  über, wenn das Verhältnis  $\frac{a}{d} = \lambda = 0$  wird oder die Wand ins Unendliche rückt. Wie von vornherein zu erwarten war, hat also die Nähe der Wand eine Vergrößerung des widerstehenden Momentes zur Folge, und zwar erhalten wir als zusätzliches, von der Wand herrührendes Moment

$$M_w = 4\pi\mu\omega a^2 \frac{d-b}{b}.$$

Im Grenzfall, wo der Zylinder die Wand berührt, wird das Moment unendlich groß. Diese Resultate sind natürlich nur unter der Voraussetzung gültig, daß die Drehgeschwindigkeit klein ist.

## § 59. Rotation von Kugeln um einen Durchmesser.

Als eine weitere Anwendung der allgemeinen Gleichungen für das Drehfeld in der Umgebung eines Rotationskörpers betrachten wir zunächst den Fall, daß die Funktion  $\Psi$  nur von dem Radiusvektor  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  abhängt. Das würde der bei kleinen Geschwindigkeiten zulässigen Annahme entsprechen, daß eine zur rotierenden Kugel konzentrische Flüssigkeitsschale sich wie ein starrer Körper bewegt.

Aus den allgemeinen Formeln für sphärische Polarkoordinaten ergibt sich dann die Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \Psi) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + c.$$



Wenn man

$$v' = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{v_{\varphi}}{\sin \vartheta}$$

setzt, so erhält man aus (1) für  $v$  die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{2v'}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v'}{\partial t},$$

ferner für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{v'}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Im stationären Falle ergibt sich aus (1) das allgemeine Integral

$$(4) \quad \Psi = A r^2 + \frac{B}{r} + C$$

und daraus die Drehgeschwindigkeit einer Flüssigkeitsschale zu

$$(5) \quad \omega = -2A + \frac{B}{r^3}.$$

Wenn die Grenzen der Flüssigkeit durch zwei konzentrische Kugeln mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  gegeben sind, deren eine mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  rotiert, während die größere Kugel fest ist, so hat man

$$(6) \quad \begin{aligned} 2A &= \omega_1 \frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}; & B &= \omega_1 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}, \\ \omega &= \omega_1 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_2^3} \right); & & \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right). \end{aligned}$$

Wenn die äußere Kugel sich mit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  dreht, so wird

$$(6a) \quad \omega = \omega_2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \right); \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right).$$

Für das elementare Reibungsmoment erhalten wir im ersten Falle nach der allgemeinen Formel (§ 54, (7))

$$\begin{aligned} dM &= 2\pi\mu r_1^3 \frac{d\omega}{dr} \sin^3 \vartheta ds \\ &= 2\pi\mu r_1^4 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{r_1} \sin^3 \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

woraus

$$(7) \quad M = \frac{8}{3} \pi\mu r_1^4 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{r_1} = -8\pi\mu \omega_1 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Bei einem Kugellager mit geringem Zwischenraum  $r_2 - r_1 = \delta$  wird

$$r_2^3 - r_1^3 \approx 3r_1^2 \delta,$$

also

$$2A = \omega_1 \frac{r_1}{3\delta}, \quad B = \frac{r_1^4}{3\delta} \cdot \omega_1$$

$$(7a) \quad M = -8\pi\mu \frac{r_1^4}{3\delta} \omega_1.$$

Wenn man  $\omega_1$  durch  $\omega_2$  ersetzt, so erhält man das Reibungsmoment für den weiteren Fall, daß die äußere Kugel mit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  rotiert, während die innere in Ruhe ist.

2. Auch dieses System konzentrischer Kugeln kann man zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten benutzen. Die innere Kugel, die als Hohlkugel mit geringem Gewicht ausgebildet sei, hänge an einem Faden, der mit einer Spiegelvorrichtung zur Ablesung der Amplituden verbunden sei, während die äußere schwere Kugel in Umdrehung versetzt werden möge. Wenn  $C$  die Torsionskonstante des Fadens und  $q$  die Amplitude der Drehung bedeutet, so hat man

$$M = C \cdot q.$$

Wenn man durch einen besonderen Versuch die Schwingungsdauer  $T$  und das Trägheitsmoment  $J$  des schwingungsfähigen Systems (innere Kugel + Faden) bestimmt hat, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}, \quad M = \frac{4\pi^2 J}{T^2} q.$$

Erhält die innere Kugel durch die rotatorische Bewegung der Flüssigkeit einen Ausschlag  $q$ , so kann man das entsprechende Torsionsmoment dem Reibungsmoment gleichsetzen; man erhält dann, wenn man noch die Umdrehungsdauer  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_2}$  der äußeren Kugel einführt, für die Reibungszahl den Ausdruck

$$(8) \quad \mu = \frac{J\tau}{4T^2} \varphi \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

Bei den Versuchen von Zemplen waren die Radien der Kugeln  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 5,6$  cm. Das Gewicht der inneren Kugel betrug 300 g, die Umdrehungszeiten der äußeren Kugel 50—300 s. Dann ergab sich z. B. für trockene Luft bei  $18^\circ$  der Koeffizient

$$\mu = 1,9114 \cdot 10^{-4} \text{ g s cm}^{-2}.$$

Wie man die Schwingungen einer Kugel in einer Flüssigkeit zur Bestimmung der inneren Reibung benutzt, wird in einem späteren Abschnitt dargelegt werden.

## § 60. Langsame Rotation des Ellipsoids und der Kreisscheibe.

1. Die Darstellung für das stationäre Drehfeld in der Umgebung eines Rotationsellipsoids gewinnt man am einfachsten aus den bekannten Ausdrücken für das Newtonsche Potential<sup>1)</sup>. Bekanntlich hat ein mit

<sup>1)</sup> Vgl. G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik, I. Leipzig 1876, S. 378 (26. Vorlesung).

Masse von der Raumdichte 1 erfülltes Ellipsoid mit den Achsen  $a, b, c$  in einem äußeren Punkt  $x, y, z$  das Potential

$$(1) \quad \Phi = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}},$$

wenn  $\lambda$  den Parameter des durch den Punkt  $P$  gelegten konfokalen Ellipsoids, also die positive reelle Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

bedeutet. Die Kraft ist dann dargestellt durch die Ableitungen

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\pi x abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}} \text{ usw.}$$

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, also etwa  $a=b$ , so wird

$$(1a) \quad \Phi = \pi a^2 c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} d\lambda$$

das Potential in einem Punkt des konfokalen Ellipsoids

$$\frac{r^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Daraus folgt dann

$$(2a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= -2\pi a^2 c r \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 \sqrt{c^2 + \lambda}} \\ &= \frac{2\pi a^2 c r}{a^2 - c^2} \left[ \frac{\sqrt{c^2 + \lambda}}{a^2 + \lambda} + \frac{\text{arctg} \sqrt{\frac{c^2 + \lambda}{a^2 + c^2} - \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir  $\chi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ , also  $\chi r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ , so ergibt sich mit

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta \Phi = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)$$

für die Funktion  $\chi$

$$(3) \quad r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \chi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0,$$

d. h. also die stationäre Differentialgleichung der Winkelgeschwindigkeit.

Wir können daher setzen

$$\omega = C \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = C \left[ \sqrt{a^2 - c^2} \frac{\sqrt{c^2 + \lambda}}{a^2 + \lambda} - \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \sqrt{\frac{c^2 + \lambda}{a^2 - c^2}} \right].$$

Wenn die Bewegung im Unendlichen verschwindet und auf dem Ellipsoid ( $\lambda=0$ )  $\omega = \omega_1$  wird, so erhält man

$$(4) \quad \omega = \omega_1 \frac{a^2 \left[ \sqrt{a^2 - c^2} \sqrt{\frac{c^2 + \lambda}{a^2 + \lambda}} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c^2 + \lambda}{a^2 - c^2}} \right]}{c \sqrt{a^2 - c^2} - a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin \frac{c}{a} \right)}.$$

Das zur Erhaltung der Bewegung notwendige Moment berechnet sich auf Grund der Bemerkung, daß das Reibungsmoment wegen der stationären Bewegung einen vom Parameter  $\lambda$  unabhängigen Wert besitzt, d. h. auf allen konfokalen Flächen gleich ist, im besonderen also für  $\lambda \rightarrow \infty$  oder für die unendlich große Kugel

$$r^2 + z^2 = \lambda$$

ermittelt werden kann. Für große  $\lambda$  haben wir aber

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3} \lambda^{-\frac{3}{2}},$$

$$\omega = \omega_1 \frac{a^2 \sqrt{(a^2 - c^2)^3}}{c \sqrt{a^2 - c^2} - a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin \frac{c}{a} \right)} \cdot \frac{2}{3} \lambda^{-\frac{3}{2}},$$

also auf Grund des Ausdruckes für  $M$  bei der Kugel

$$(5) \quad M = \frac{16}{3} \pi \mu \omega_1 \frac{a^2 \sqrt{(a^2 - c^2)^3}}{c \sqrt{a^2 - c^2} - a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin \frac{c}{a} \right)}.$$

Setzt man  $c = n \cdot a$  und bestimmt den Grenzwert des Moments für  $n=1$  ( $a=c$ ), so erhält man wieder  $M = -8\pi\mu\omega_1 a^3$ .

Wenn die Flüssigkeit von zwei Ellipsoiden eingeschlossen ist, von denen das eine ( $\lambda=0$ ) sich mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  dreht, während das zweite ( $\lambda=a$ ) in Ruhe ist, so kann man, wenn man den Koeffizienten von  $\omega_1$  in (4)  $F(\lambda)$  nennt, für  $\omega$  den Ansatz machen

$$\omega = A + B \cdot F(\lambda);$$

alsdann erhält man mit Einsetzung der Grenzwerte

$$A = -\frac{\omega_1 F(a)}{1 - F(a)}, \quad B = \frac{\omega_1}{1 - F(a)},$$

also

$$(6) \quad \omega = \omega_1 \frac{F(\lambda) - F(a)}{1 - F(a)}.$$

2. Scheibe als Grenzfall des Ellipsoids. Die gegebenen Formeln gestatten gleichzeitig den Grenzfall einer langsam rotierenden Kreis-

scheibe mit dem Radius  $a$  zu ermitteln. Man braucht nur in der Formel (4)  $c=0$  zu setzen. Dann wird

$$\lambda = \frac{1}{2} (r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2 - z^2)^2 + 4r^2 z^2})$$

ferner werden die Winkelgeschwindigkeit und das Reibungsmoment

$$(7) \quad \omega = \omega_1 \left[ 1 - \frac{2a\sqrt{\lambda}}{\pi(a^2 + \lambda)} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \right],$$

$$(8) \quad M = -\frac{3^2}{3} \mu \omega_1 a^3.$$

Wenn die Scheibe in einem feststehenden Gefäß rotiert, das die Gestalt eines konfokalen Ellipsoids hat, so erhält man

$$(9) \quad \omega = \omega_1 \left[ 1 - \frac{a\sqrt{\lambda} + \arctg \frac{\sqrt{\lambda}}{a}}{a^2 + \lambda} - \frac{a\sqrt{\alpha} + \arctg \frac{\sqrt{\alpha}}{a}}{a^2 + \alpha} \right].$$

3. Scheibe zwischen zwei parallelen Ebenen. Dieser Fall läßt sich nicht mathematisch exakt behandeln. Wenn wir zunächst annehmen, daß die Scheibe unendlich ausgedehnt und die Flüssigkeit außerdem von einer in der Nähe befindlichen festen Ebene  $z = h$  begrenzt ist, so können wir näherungsweise setzen

$$(10) \quad \Psi = \frac{\omega}{2} r^2 \frac{(z+h)}{h}$$

und haben dann für das elementare, auf die untere Scheibenfläche bezogene Reibungsmoment

$$(11) \quad dM = 2\pi\mu\omega \frac{r^3}{h} dr.$$

Wir können nun in erster Näherung annehmen, daß die Bewegung und die Reibung bis zum Rand einer Scheibe vom Radius  $a$  durch die Gleichungen (10) und (11) charakterisiert werden. Dann erhält man bis zum Rand für jede Seite der Scheibe

$$(12) \quad M = \frac{\pi\mu\omega}{2} \frac{a^4}{h}.$$

In der Nähe des freien Randes haben nun aber die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit eine gegenüber dem Fall der unbegrenzten Scheibe stark abweichende Gestalt; indem sie mit starker Krümmung den Rand einhüllen, drängen sie sich gleichzeitig stark zusammen, wodurch eine wesentliche Vergrößerung der Gesamtreibung sich ergibt. Wenn der Durchmesser  $2a$  der Scheibe groß ist gegenüber der Dicke, so wird sich das Gebiet der Störungsbewegung nur bis zu einem mit  $h$  vergleichbaren Abstand erstrecken. Die Störung hat alsdann angenähert denselben Charakter wie am geradlinigen Rand einer ebenen Lamelle, die

sich in ihrer Ebene mit der translatorischen Geschwindigkeit  $\omega a$  bewegt, d. h. wir können die geradlinigen Spuren der drei Ebenen in einem Meridianschnitt als zylindrische Schnittlinien auffassen und den Kreisrand der Scheibe durch einen geraden Rand einer rechteckigen, unendlich langen, ebenen Lamelle ersetzen, die sich senkrecht zur Schnittebene bewegt. Die Frage ist damit auf ein früher behandeltes Problem zurückgeführt (§ 16). Es ergab sich damals, daß die Vergrößerung der Reibung infolge des Randeinflusses äquivalent ist einer Verlängerung der bewegten Ebene. Sei diese Verlängerung  $l_1$ , so ergibt sich das zusätzliche Moment zu

$$(13) \quad M_1 = 2\pi\mu\omega \frac{a^3 \cdot l_1}{h}.$$

Wenn man  $l_1$  nach dem früher angegebenen Verfahren bestimmt, so wird aber das Korrekturglied für das Reibungsmoment zu groß, weil der Umfang eines inneren, aus der Scheibe ausgeschnittenen Ringes  $2\pi(a-x)$ , längs dessen die Reibung wirkt, kleiner ist, als der Umfang  $2\pi a$  am Rand, und weil außerdem der Hebelarm der Kraft sich in demselben Maße verkleinert. Mit Rücksicht darauf kann man den Ausdruck für das zusätzliche Moment durch

$$(13a) \quad \begin{aligned} M_2 &= 2\pi\mu\omega \frac{(a-l_1)^3 l_1}{h} \\ &= M_1 \left(1 - \frac{3l_1}{a} - \dots\right), \end{aligned}$$

ersetzen, der den kreissymmetrischen Verhältnissen besser entspricht<sup>1)</sup>. Da wir später bei der Behandlung der Drehschwingungen eines bewegten Zylinders die Korrektur infolge des Randeinflusses von einem anderen Gesichtspunkt behandeln werden, wollen wir an dieser Stelle von weiteren Einzelheiten absehen.

### § 61. Die genaue Rechnung für die rotierende Scheibe (nach v. Kármán).

1. Bei der bisherigen Betrachtung des Bewegungszustandes einer zähen Flüssigkeit in der Umgebung eines Rotationskörpers, der eine gleichmäßige Drehung ausführt, haben wir vorausgesetzt, daß die Flüssigkeitsteilchen sich in Kreisen senkrecht zur Drehachse bewegen. Das bedeutet also, daß um einen rotierenden Kreiszyylinder eine koaxiale zylindrische Flüssigkeitsschicht, desgleichen um ein Ellipsoid eine von konfokalen Ellipsen begrenzte Schicht wie starre Gebilde um die Achse rotieren. Dieses Resultat kommt dadurch zustande, daß wir die Zusatzbeschleunigungen

<sup>1)</sup> Vgl. Brillouin, a. a. O. S. 92ff.



bzw. Zusatzkräfte bei der Rotation, also insbesondere die Zentrifugalkraft, vernachlässigt haben. In Wirklichkeit steht die Flüssigkeit in der Nähe der Wand, die ihr infolge des Haftens eine Drehbewegung erteilt, unter der Wirkung der radialen Trägheitskraft, die einen ständigen Abstrom nach außen zur Folge hat, während gleichzeitig infolge der Kontinuität ein axialer Zustrom die abgehende Menge ersetzt. Um die Bewegung darzustellen, ist es erforderlich, von den allgemeinen, auf Zylinderkoordinaten transformierten Gleichungen (§ 8) auszugehen, in denen alle Geschwindigkeiten als vom Azimut  $q$  unabhängig vorauszusetzen sind. Diese Gleichungen lassen sich nun für den Fall einer rotierenden (unendlich großen) Scheibe ohne Vernachlässigung integrieren. Indem wir im wesentlichen der Darstellung v. Kármáns folgen, werden wir gleichzeitig Gelegenheit haben, den Zusammenhang mit der Prandtlschen Grenzschichttheorie wieder aufzunehmen. Wir machen mit v. Kármán den Ansatz

$$(1) \quad v_r = rF(z), \quad v_\varphi = rG(z), \quad v_z = H(z), \quad p = p(z).$$

Dann erhalten wir für die Funktionen  $F$ ,  $G$ ,  $H$  die gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen

$$(2) \quad F^2 - G^2 + H \frac{dF}{dz} = \nu \frac{d^2 F}{dz^2}, \quad 2FG + H \frac{dG}{dz} = \nu \frac{d^2 G}{dz^2},$$

$$\frac{dH}{dz} + 2F = 0, \quad H \frac{dH}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{d^2 H}{dz^2}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, & F(\infty) &= 0, \\ G(0) &= \omega, & G(\infty) &= 0, \\ H(0) &= 0. \end{aligned}$$

Um dimensionslose Größen zu erhalten, setzen wir

$$\xi = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad f = \frac{F}{\omega}, \quad g = \frac{G}{\omega}, \quad h = \frac{H}{\sqrt{\nu\omega}}.$$

Dann gehen die Gleichungen (2) über in

$$(2a) \quad f^2 - g^2 + h \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad 2fg + h \frac{dg}{d\xi} = \frac{d^2 g}{d\xi^2}, \quad \frac{dh}{d\xi} + 2f = 0$$

mit den Bedingungen

$$f = 0, \quad g = 1, \quad h = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0; \quad f = g = 0 \quad \text{für} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Die Gleichungen können durch das von K. Pohlhausen ausgeführte Näherungsverfahren integriert werden. Nehmen wir an, daß  $f$  und  $g$  in der Entfernung  $\delta$  von der Wand, d. h. im Abstand der Grenzschichtdicke,

die konstant ist, sich bereits wenig von Null unterscheiden, und integrieren wir (2 a) zwischen  $\xi=0$  und  $\xi=\delta\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}=\xi_0$ , so ergibt sich

$$(3) \quad \int_0^{\xi_0} (f^2 - g^2) d\xi + \int_0^{\xi_0} h \frac{df}{d\xi} d\xi = \left[ \frac{df}{d\xi} \right]_0^{\xi_0},$$

$$\int_0^{\xi_0} 2fg d\xi + \int_0^{\xi_0} h \frac{dg}{d\xi} d\xi = \left[ \frac{dg}{d\xi} \right]_0^{\xi_0}$$

und durch partielle Integration mit Berücksichtigung der Beziehung  $\frac{dh}{d\xi} = -2\ddot{f}$

$$(4) \quad 3 \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi = - \left[ \frac{df}{d\xi} \right]_0^{\xi_0}, \quad 4 \int_0^{\xi_0} fg d\xi = - \left[ \frac{dg}{d\xi} \right]_0^{\xi_0}.$$

Für  $f$  und  $g$  können wir mit  $\frac{\xi}{\xi_0} = \lambda$  die Näherungswerte setzen

$$(5) \quad f = (1 - \lambda)^2 [a\lambda + 2a\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2], \quad g = \frac{1}{2}(2 + \lambda)(1 - \lambda)^2,$$

die die Bedingungen erfüllen

$$f = 0, \quad g = 1 \text{ für } \xi = 0, \quad f = \frac{df}{d\xi} = 0, \quad g = \frac{dg}{d\xi} = 0 \text{ für } \xi = \xi_0, \quad \lambda = 1.$$

Daraus ergibt sich dann durch Integration

$$(6) \quad h = -2 \int f d\xi = -2\xi_0 \lambda^2 \left[ \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}\lambda + \lambda^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4}a \right) + \left( \frac{2}{5}a - \frac{1}{10} \right) \lambda^3 \right].$$

Für die Integrale in (4) erhält man

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi = \xi_0 [0,0301a^2 - 0,00326a + 0,00159] \\ \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi = 0,2357\xi_0; \quad \int_0^{\xi_0} fg d\xi = \xi_0 [0,0607a - 0,00567]. \end{array} \right.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (4) ein, so ergeben sich zwei Gleichungen für  $a$  und  $\xi_0$ , mit der Auflösung

$$a = 1,026, \quad \xi_0 = 2,58.$$

Daraus berechnet sich z. B. die Grenzschichtdicke und die axiale Zustromgeschwindigkeit zu

$$(7) \quad \delta = \xi_0 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = 2,58 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}},$$

$$(8) \quad (v_z)_\infty = -\sqrt{\omega\nu} \int_0^{\xi_0} 2f d\xi = \sqrt{\nu\omega} h(\xi_0) = \sqrt{\nu\omega} (h)_{\lambda=1} = -0,708 \sqrt{\nu\omega}.$$

Bei der Drehzahl  $n = 600/\text{min}$ ,  $\omega = 62,8 \text{ s}^{-1}$  und  $r = 0,14 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  (Luft) findet man beispielsweise

$$\delta = 0,122 \text{ cm}, \quad (v_z)_\delta = -7,6 \text{ cm/sec.}$$

Die Strömung in der Nähe der Scheibe hat etwa den in der Abb. 81 gezeichneten Verlauf. Hier ist das System der Stromlinien in zwei Ansichten, in einer zur Scheibe parallelen Ebene und in einer Meridianebene dargestellt; im ersten Falle ist von der  $z$ -Komponente der Bewegung abgesehen, im zweiten Falle von der tangentialen Komponente  $v_\varphi$ . Die Projektionen der Stromlinien auf die Ebene  $z = \text{const}$  sind logarithmische Spiralen, da das Verhältnis der Komponenten  $\frac{v_\varphi}{v_r}$ , also der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor, konstant ist. Die Meridianströmung ist im Unendlichen bzw. am Ende der Grenzschicht eine auf die Scheibe gerichtete Parallelströmung, die in der Nähe der Scheibe in der Richtung der Scheibenradien umgelenkt wird. Im ersten Falle haben wir

$$\begin{aligned} r \frac{d\varphi}{dt} &= rG, & \frac{dr}{dt} &= rF, \\ (9) \quad \frac{dr}{r d\varphi} &= \frac{F}{G}, & r &= c e^{\frac{F}{G} \cdot \varphi}. \end{aligned}$$

Im zweiten Falle haben wir für die Stromfunktion

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = H(z), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = -rF(z),$$

daher 
$$2F = -\frac{dH}{dz},$$

(9a) 
$$\Psi_2 = \frac{1}{2} r^2 H(z).$$

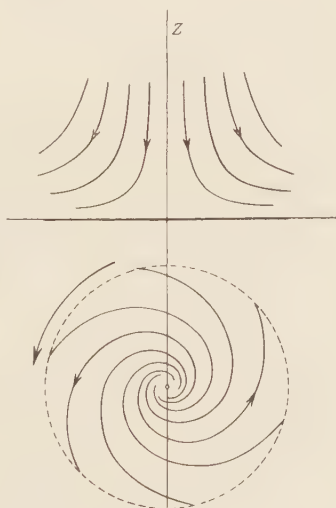


Abb. 81. Stromlinien in der Umgebung einer rotierenden Scheibe.

2. Das Widerstandsmoment für eine Scheibe vom Radius  $a$  läßt sich berechnen, wenn man den Einfluß der Randzone, der bei kleinen Geschwindigkeiten klein ausfällt, unberücksichtigt läßt. Da das Moment nur von der tangentialen Winkelgeschwindigkeit  $\omega = G$  abhängt, so haben wir auf Grund der allgemeinen Formel § 54, (7)

$$dM = 2\pi\mu r^3 \frac{dG}{dz} dr,$$

also

$$M = \frac{1}{2} \pi \mu a^4 \frac{dG}{dz} = \frac{1}{2} \pi \mu a^4 \omega_0 \left| \frac{\omega_0}{r} \left( \frac{dg}{d\xi} \right) \right|_{\xi=0}.$$

Nun ist 
$$\frac{dg}{d\xi} = -\frac{3}{2\xi_0}(1-\lambda^2); \quad \left(\frac{dg}{d\xi}\right)_0 = -\frac{3}{2\xi_0},$$

also 
$$M = -\frac{3}{4}\frac{\pi}{\xi_0}a^4\rho\nu^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{3}{2}} = -0,92a^4\rho\nu^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{3}{2}}$$

oder mit Einführung der Umfangsgeschwindigkeit  $U = a\omega$  und der Reynoldsschen Zahl  $\Re = \frac{Ua}{\nu}$

$$(10) \quad M = -\frac{1,84}{\sqrt{\Re}}a^3\frac{\rho}{2}U^2.$$

Für eine beiderseits von Flüssigkeit umgebene Scheibe ist dieser Ausdruck zu verdoppeln. Das Gesetz für das Reibungsmoment weicht also von dem früher für kleine Drehgeschwindigkeiten gefundenen ziemlich erheblich ab. Das Moment ist der Dichte, der Wurzel aus der Zähigkeitszahl und der  $\frac{3}{2}$ -Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional.

## § 62. Reibungswiderstand einer rotierenden Scheibe im turbulenten Fall.

Da die im letzten Abschnitt abgeleitete Formel für das Reibungsmoment bei höheren Drehzahlen bzw. Reynoldsschen Zahlen nicht mehr zutrifft, vielmehr ein schnelleres Anwachsen des Momentes mit der Drehgeschwindigkeit beobachtet ist, so wird es erforderlich sein, die früher gefundenen Gesetze für die turbulente Reibung auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden und eine angenäherte Ergänzungsrechnung für die Grenzschicht und den Reibungswiderstand durchzuführen. Wir können uns wieder auf die Entwicklungen von v. Kármán<sup>1)</sup> berufen, in denen vom Impulssatz Gebrauch gemacht wird. Wenn wir die Geschwindigkeiten wie früher, ferner die radiale und tangential Schubspannung mit  $\tau_{zr} = \tau_r$  und  $\tau_{z\varphi} = \tau_\varphi$  bezeichnen und den Impulssatz auf das zwischen den Zylinderflächen mit den Radien  $r$  und  $r + dr$  liegende Volumenelement mit dem Öffnungswinkel  $\varphi = 1$  und der Höhe  $\delta$  anwenden, so erhalten wir in radialer Richtung

$$(1) \quad \rho \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta v_r^2 dz \right\} - \rho \int_0^\delta v_\varphi^2 dz = -r\tau_r$$

und als Momentengleichung in tangentialer Richtung

$$(2) \quad 2\pi\rho \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^\delta v_r v_\varphi dz \right\} = -2\pi r^2 \tau_\varphi.$$

<sup>1)</sup> Th. v. Kármán, Z. a. M. M. Bd. 1 (1921), S. 245—250.

Führen wir jetzt das Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung ein

$$(3) \quad v_r = v_0 \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right); \quad v_\varphi = r\omega \left|1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\right|,$$

so erhalten wir

$$(4) \quad \int_0^\delta v_r^2 dz = 0,207 v_0^2 \delta, \quad \int_0^\delta v_r v_\varphi dz = 0,0681 r\omega v_0 \delta, \quad \int_0^\delta v_\varphi^2 dz = 0,0278 r^2 \omega^2 \delta.$$

Wenn wir ferner die Geschwindigkeitskomponenten an der Wand zusammensetzen und für die resultierende Geschwindigkeit den früher (§ 21, (8)) eingeführten Reibungsansatz anwenden, so ist zu setzen

$$(5) \quad v_r = 0,0225 \varrho \frac{v_0^{\frac{7}{4}} \nu^{\frac{1}{4}}}{\delta^{\frac{3}{4}}} \left[1 + \left(\frac{r\omega}{v_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{8}}; \quad v_\varphi = 0,0225 \varrho (r\omega)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{8}}.$$

Damit erhalten wir aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [0,207 v_0^2 r \delta] - 0,0278 r^2 \omega^2 \delta &= -0,0225 v_0^2 r \left(\frac{\nu}{v_0 \delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \left(\frac{r\omega}{v_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{8}}, \\ \frac{d}{dr} [0,0681 r^3 \omega v_0 \delta] &= 0,0225 r^4 \omega^2 \left(\frac{\nu}{r\omega \delta}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{8}}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden durch den Ansatz befriedigt

$$(6) \quad v_0 = \alpha r \omega, \quad \delta = \beta r^{\frac{3}{5}}.$$

Die daraus für  $\alpha$  und  $\beta$  resultierenden Gleichungen liefern

$$\alpha = 0,162; \quad \beta = 0,522 \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

mithin

$$(7) \quad \delta = 0,522 r \left(\frac{\nu}{r^2 \omega}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Das Widerstandsmoment läßt sich aus dem Drehimpuls berechnen, der in der Zeiteinheit an der Zylinderfläche  $z = \delta$ ,  $r = a$  austritt. Es wird

$$M = 2\pi a^2 \varrho \int_0^\delta v_r v_\varphi dz = 0,0364 a^5 \omega^2 \varrho \left(\frac{\nu}{a^2 \omega}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Bei Berücksichtigung der doppelseitigen Reibung erhalten wir

$$(8) \quad M = 0,0728 a^5 \omega^2 \varrho \left(\frac{\nu}{a^2 \omega}\right)^{\frac{1}{5}}$$

oder mit Einführung der Umfangsgeschwindigkeit

$$(8a) \quad M = 0,146 \frac{\varrho}{2} U^2 a^3 \left(\frac{\nu}{Ua}\right)^{\frac{1}{5}},$$

$$(9) \quad c_w = 0,146 \Re^{-\frac{1}{5}}.$$

Das Reibungsmoment ist also nach dieser Rechnung der  $\frac{9}{5}$ -Potenz der Umfangsgeschwindigkeit, der Widerstandsbeiwert der fünften Wurzel aus dem reziproken Wert der Reynoldsschen Zahl proportional.

Die Abb. 82, die der Arbeit von G. Kempf<sup>1)</sup> entnommen ist, enthält die Darstellung der laminaren und der turbulenten Widerstandsziffer sowie verschiedene Versuchswerte von G. Kempf und W. Schmidt, die

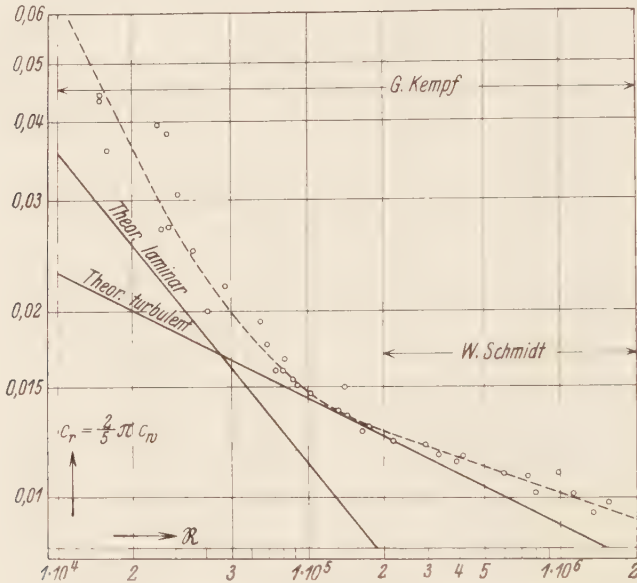


Abb. 82. Widerstand einer rotierenden Scheibe.

sich damit in guter Übereinstimmung befinden. Der Schnitt beider Kurven ergibt sich durch Gleichsetzung der entsprechenden Beiwerte

$$(c_w)_l = \frac{3,68}{\sqrt[5]{R}} = (c_w)_t = 0,146 \frac{1}{\sqrt[5]{R}},$$

woraus

$$R \approx 4,7 \cdot 10^4$$

folgt. Man sieht in der Tat, daß die auf kleinere Reynoldssche Zahlen sich beziehenden Werte gerade in das Übergangsgebiet zwischen laminar- und turbulenter Strömung fallen.

<sup>1)</sup> G. Kempf, Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Berlin 1924, S. 168.



### § 63. Die wirkliche Strömung in der Umgebung rotierender Körper.

Die Grundformeln der vorigen Abschnitte sind unter besonderen vereinfachenden Annahmen abgeleitet worden. Haben wir zunächst die Drehgeschwindigkeit, insbesondere beim Kreiszyylinder und der Kugel, als klein vorausgesetzt und daher die Trägheitsglieder vernachlässigt, so ist auch der genauere laminare Strömungsverlauf in der Umgebung einer Scheibe unter der Voraussetzung bestimmt worden, daß der Radius der Scheibe unendlich groß und das Flüssigkeitsgebiet wie in den vorigen Fällen nach außen unbegrenzt ist. Wenn die Scheibe und die Flüssigkeit begrenzt sind, so haben die auf die Meridianebene projizierten Stromlinien, wie der Versuch ergibt, einen geschlossenen Verlauf, so daß sich auf beiden Seiten der Scheibe zwei entgegengesetzt drehende Wirbelringe herausbilden, deren Hauptebenen der Scheibe parallel sind. Berücksichtigt man die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit, so sieht man, daß die Stromlinien im ganzen räumliche Spiralen darstellen. Das Stromliniensystem ändert sich natürlich nicht wesentlich, wenn die Scheibe eine merkliche Dicke hat. Der daraus durch weitere Vergrößerung der Dicke (Höhe) zu gewinnende Fall des in einer begrenzten Flüssigkeit rotierenden begrenzten Kreiszyinders besitzt im Hinblick auf die praktische Verwendung als Rotor besonderes Interesse. Die Strömungsverhältnisse werden in erster Linie durch die rotierende Mantelfläche des Zylinders bestimmt, die das Feld in der Umgebung der Endflächen wesentlich beeinträchtigt. Was die entsprechenden Versuche angeht, so erwähnen wir die älteren Arbeiten von Freund<sup>1)</sup>, die sich auf einen in Luft mit einigen Umdrehungen in der Sekunde um seine vertikale Achse rotierenden Zylinder von 160 cm Höhe und 50 cm Durchmesser beziehen. Zur Messung der Geschwindigkeiten wurde ein kleiner Papierschirm am Ende eines Hebels benutzt, der in der Mitte an einem kleinen, dünnen, gespannten Metallfaden befestigt ist. Durch eine besondere Vorrichtung konnte das Gestell, das den Faden trägt, verstellt und damit auch der Papierschirm an verschiedene Stellen des Drehfeldes gebracht werden. Das Wesen des Apparates besteht darin, daß die Kraft des Luftstromes durch das Torsionsmoment des Fadens aufgehoben wird, wobei man annehmen kann, daß die Torsion dem Quadrat der Komponente der Stromgeschwindigkeit normal zur Papierfläche proportional ist. Es zeigt sich, daß der Ort gleicher Geschwindigkeit in der Meridianebene keine Parallele zur Zylinderachse, sondern eine gekrümmte Kurve ist,

<sup>1)</sup> Vgl. H. Bouasse, *Hydrodynamique générale*, Paris 1928, S. 221.

die sich an beiden Enden dem Zylinder nähert und in der Mitte den größten Abstand hat. Nur in der äquatorialen Mittelebene senkrecht zur Achse befolgt die Strömungsgeschwindigkeit mit großer Annäherung das von der Theorie gelieferte Gesetz, während außerhalb dieser Ebene der Einfluß der beiden Endflächen das Stromfeld stark verändert. Später hat Ahlborn (Hamburg) bei Verwendung größerer Drehgeschwindigkeiten die Verhältnisse dadurch noch weiter geklärt, daß er photographische Aufnahmen in der Umgebung eines im Wasser rotierenden

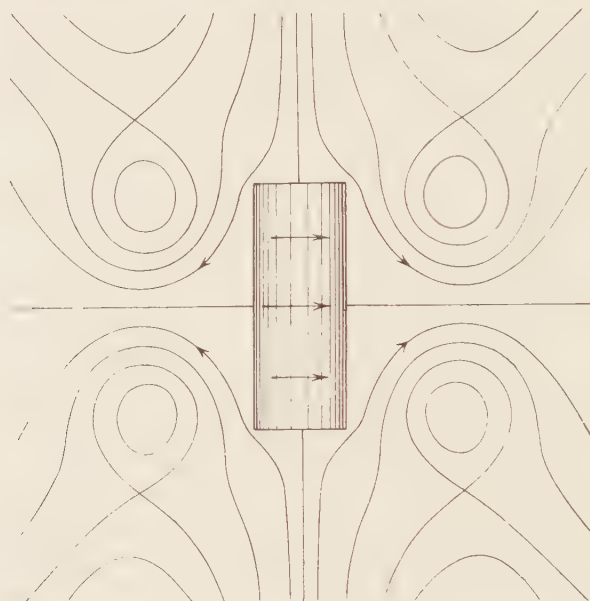


Abb. 83. Strömung in der Umgebung eines rotierenden Zylinders.  
(Nach Ahlborn.)

Zylinders hergestellt hat<sup>1)</sup>. Das auf diese Weise gewonnene Bild entspricht etwa der Abb. 83. Die Bewegung der Flüssigkeit ist im wesentlichen wieder durch zwei entgegengesetzte, symmetrisch zur Mittelebene auftretende „Passatzirkulationen“ bzw. spiralförmige Wirbelwalzen charakterisiert, die dadurch zustande kommen, daß in den Reibungsschichten ein gegen das äquatoriale Minimum gerichtetes Druckgefälle entsteht, dem gleichzeitig eine gegen die Symmetrieebene gerichtete Strömung folgen muß. Zur Steigerung des Magnus-Effektes hat man einer Anregung von L. Prandtl zufolge den im Windstrom rotierenden Zylinder mit

<sup>1)</sup> Fr. Ahlborn, Der Magnuseffekt in der Theorie u. Wirklichkeit, Z. f. M., 1929, S. 642—651.

Endscheiben von doppeltem Durchmesser versehen. Die Versuche von Ahlborn scheinen zu beweisen, daß diese Wirkung in erster Linie auf die Reibung der Flüssigkeit an den mit größerer Umfangsgeschwindigkeit rotierenden Scheiben zurückzuführen ist. Das Stromfeld zeigt eine wesentliche Veränderung gegenüber dem eben betrachteten Fall. Während an jeder Endscheibe ein Paar starker Passatwirbel entsteht, die den Raum um den Zylinder einhüllen, werden die ursprünglichen Zirkulationen des Zylindermantels auf einen engen äquatorialen Raum zusammengedrängt (Abb. 84). Ahlborn bemerkt, daß man durch eine geeignete Verteilung

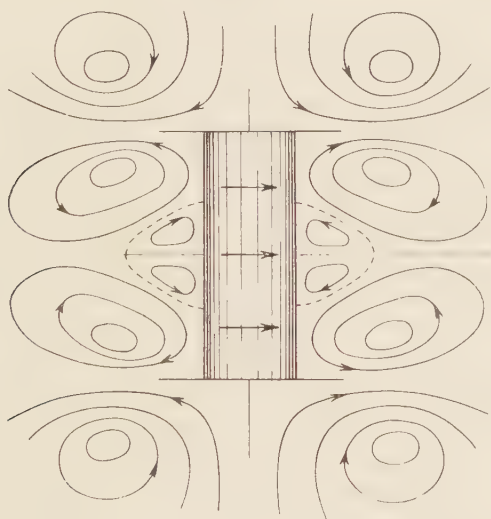


Abb. 84. Strömung in der Umgebung eines rotierenden Zylinders mit Endscheiben. (Nach Ahlborn.)

solcher Scheiben über die Länge des Zylinders die Reibung und damit die Ursache der Magnus-Kraft ebenso vergrößern kann, wie durch Anwendung eines größeren Zylinderdurchmessers.

2. Von besonderem meteorologischen Interesse ist ferner die Kenntnis der Strömungsvorgänge in der Umgebung einer rotierenden Kugel. Denn es zeigt sich, daß die auch hier beiderseits der Äquatorebene entstehenden Zirkulationen mit den Passatwinden der Erdatmosphäre übereinstimmen. Das ist von Ahlborn durch eingehende Versuche in Wasser bestätigt worden<sup>1)</sup>. Wenn man statt des Wassers atmosphärische Luft ver-

<sup>1)</sup> Fr. Ahlborn, Die drei großen Zirkulationen der Atmosphäre, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, XI. Bd., Heft 4, S. 117 ff.

wenden wollte, so müßte man nach dem Ähnlichkeitsgesetz die gleichen Bewegungsvorgänge bei einer etwa 14fachen Umdrehungsgeschwindigkeit erhalten, während bei gleicher Geschwindigkeit der Umfang der Zirkulation beträchtlich abnehmen und die Zirkulationsachsen näher an das Modell heranrücken würden. Natürlich kann zwischen den Versuchsvorgängen und den atmosphärischen Erscheinungen keine vollkommene mechanische Ähnlichkeit bestehen, da die Erde nur mit einer verhältnismäßig dünnen und nach unten an Dichte zunehmenden Lufthülle umgeben ist,

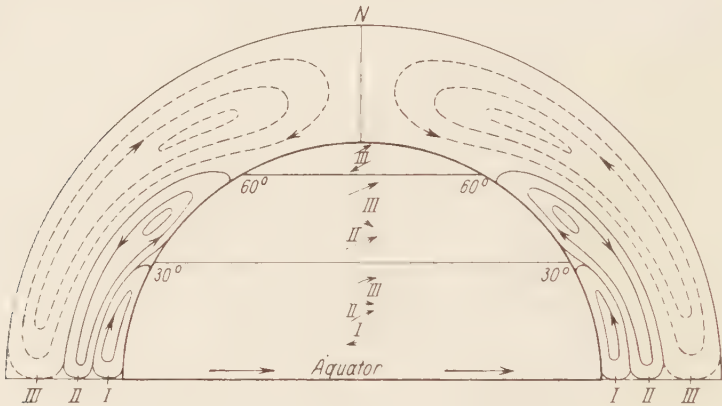


Abb. 85. System der Zirkulationen in der Erdatmosphäre.  
(Nach Ahlborn.)

die in den Passaten nur mit einem kleinen Geschwindigkeitsunterschied hinter der Erddrehung zurückbleibt. Ferner treten noch weitere Abänderungen hinzu, die sich aus thermischen Ursachen herleiten lassen. Im ganzen ergibt sich, wie Ahlborn näher begründet hat, ein System von drei atmosphärischen Zirkulationen von zunehmender Ausdehnung, die primäre, etwa bis zum 30. Breitengrad reichende tropische Zirkulation der Passate, die sekundäre oder gemäßigte Zirkulation über den Passaten und den mittleren Breiten bis etwa zum 60. Grad und die tertiäre oder polare Zirkulation, die über der zweiten am Äquator beginnt und bis zu den Polen reicht (vgl. Abb. 85). Nähere Einzelheiten sind in der erwähnten Arbeit von Ahlborn nachzulesen.

ZEHNTES KAPITEL.

**Instationäre Drehbewegungen von Rotationskörpern in zähen Flüssigkeiten.**

§ 64. Drehschwingungen einer Kugel um einen Durchmesser.

1. Wenn wir die bereits früher aufgestellte Differentialgleichung für die nur vom Radiusvektor  $r$  abhängige Stromfunktion der langsamen, instationären Drehung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

auf die Form bringen

$$(1a) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial (r \psi)}{\partial t},$$

so sieht man, daß die Lösungen des entsprechenden Problems der geradlinigen Bewegung (§ 27) ohne weiteres verwendet werden können; man hat nur  $v$  durch  $r \psi$  und  $z$  durch  $r$  zu ersetzen. So gewinnen wir z. B. die beiden partikulären Lösungen

$$r \psi_1 = e^{-k'r} \cos(\vartheta t - k'r); \quad r \psi_2 = e^{-k'r} \sin(\vartheta t - k'r),$$

wobei zwischen  $k'$  und  $\vartheta$  die Gleichung besteht

$$k' = \sqrt{\frac{\vartheta}{2\nu}}.$$

Wir wollen hier einen etwas allgemeineren Ansatz machen und zunächst

$$\psi = e^{-\vartheta t} \cdot \chi(r)$$

setzen, wo  $\vartheta = \vartheta_1 + i \vartheta_2$  als komplexe Größe vorausgesetzt wird. Führt man  $k^2 = \frac{\vartheta}{\nu}$  ein, so läßt sich die Gleichung (1a) auf die Form bringen

$$(2) \quad \frac{d^2}{dr^2} (r \chi) + k^2 (r \chi) = 0,$$

und wir erhalten dann

$$\chi = \frac{1}{r} (c_1 e^{kr} + c_2 e^{-kr}),$$

also für die Winkelgeschwindigkeit einer Flüssigkeitsschale im Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt

$$(3) \quad \omega = \frac{e^{\vartheta t}}{r^3} [c_1 e^{kr} (kr - 1) - c_2 e^{-kr} (kr + 1)].$$

Führen wir die Trennung des Reellen und Imaginären durch mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 + i \vartheta_2 = \nu [k_1^2 - k_2^2 + 2i k_1 k_2], & c_1 &= A e^{i\alpha}, \\ c_2 &= B e^{i\beta}, & k &= \kappa e^{i\eta}, & \omega &= \omega_1 + i \omega_2, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Lösungen

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{e^{\vartheta_1 t}}{r^3} \{A e^{k_1 r} [r \chi \cos(\vartheta_2 t + \alpha + k_2 r + \vartheta_1) - \cos(\vartheta_2 t + \alpha + k_2 r)] \\ &\quad - B e^{-k_1 r} [r \chi \cos(\vartheta_2 t + \beta - k_2 r + \vartheta_1) + \cos(\vartheta_2 t + \beta - k_2 r)]\}, \\ \omega_2 &= \frac{e^{\vartheta_1 t}}{r^3} \{A e^{k_1 r} [r \chi \sin(\vartheta_2 t + \alpha + k_2 r + \vartheta_1) - \sin(\vartheta_2 t + \alpha + k_2 r)] \\ &\quad - B e^{-k_1 r} [r \chi \sin(\vartheta_2 t + \beta - k_2 r + \vartheta_1) + \sin(\vartheta_2 t + \beta - k_2 r)]\}. \end{aligned}$$

Die Bewegung der Flüssigkeit setzt sich also zusammen aus zwei Wellenzügen mit der Wellenlänge  $\frac{2\pi}{k_2}$ , die nach außen bzw. nach innen mit abnehmender Amplitude sich fortpflanzen, und mit einer Geschwindigkeit  $\frac{\vartheta}{k_2} = 2\nu k_1$ . Wenn wir nun annehmen, daß die Bewegung hervorgerufen wird durch eine pendelnde Drehschwingung einer Kugel vom Halbmesser  $a$  um einen Durchmesser, so können wir  $\vartheta_1 = 0$  setzen und erhalten dann

$$k = k_1 = k_2 = \left| \frac{\vartheta_2}{2\nu} \right| = \frac{\vartheta}{2\nu}; \quad k(1+i) = \alpha e^{i\eta}, \quad \alpha = k\sqrt{2}, \quad \eta = \frac{\pi}{4}.$$

Nehmen wir weiter an, daß die Flüssigkeit den ganzen Raum um die Kugel ausfüllt, und die Geschwindigkeit für  $r > \infty$  verschwindet, so ist die Konstante  $A=0$  zu setzen. Wir haben dann nach (4) die beiden partikulären Lösungen

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{B e^{-kr}}{r^3} [(kr+1)\cos(\vartheta t + \beta - kr) - kr\sin(\vartheta t + \beta - kr)], \\ \omega_2 &= \frac{B e^{-kr}}{r^3} [(kr+1)\sin(\vartheta t + \beta - kr) + kr\cos(\vartheta t + \beta - kr)], \end{aligned}$$

die sich in der Tat aus den oben angeschriebenen Funktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  ableiten lassen. Wir nehmen jetzt an, daß die Schwingung der Kugel durch die Gleichung

$$(6) \quad \omega = \omega_0 \cos \vartheta t$$

gegeben sei. Nehmen wir als Drehgeschwindigkeit die lineare Verbindung der Werte (5), also

$$\omega = \omega_1 + \gamma \omega_2,$$

so ist zu verlangen, daß dieser Ausdruck für  $r = a$  und für jedes  $t$  in den Ausdruck (6) übergeht. Wir haben also die Identität

$$\begin{aligned} \omega_0 \cos \vartheta t &= \frac{B e^{-ka}}{a^3} \{ [ka(1+\gamma) + 1] \cos \vartheta t \cos(\beta - ka) - [ka(1-\gamma) \\ &\quad - \gamma] \cos \vartheta t \sin(\beta - ka) - [ka(1+\gamma) + 1] \sin \vartheta t \sin(\beta - ka) - [ka(1-\gamma) \\ &\quad - \gamma] \sin \vartheta t \cos(\beta - ka) \}. \end{aligned}$$



Die Glieder mit  $\sin \vartheta t$  rechts verschwinden, wenn man setzt

$$\beta = ka, \quad \gamma = \frac{ka}{1+ka};$$

dann wird aber

$$\omega_0 = \frac{B e^{-ka}}{a^3} \frac{(1+2ka+2k^2a^2)}{1+ka}; \quad B = \frac{\omega_0 a^3 (1+ka) e^{-ak}}{1+2ka+2k^2a^2}.$$

Man erhält also

$$(7) \quad \omega = \frac{\omega_0}{1+2ka+2k^2a^2} \cdot \frac{a^3}{r^3} e^{-k(r-a)} \{ [1+k(r+a) + 2k^2ra] \cos[\vartheta t - k(r-a)] - k(r-a) \sin[\vartheta t - k(r-a)] \}.$$

Wenn man die Schwingungsdauer der Kugel mit  $T = \frac{2\pi}{\vartheta}$  bezeichnet, so erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  der Flüssigkeitswellen und für die Wellenlänge  $\lambda$  die Ausdrücke

$$c = 2 \sqrt{\nu \cdot \pi}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2 \sqrt{\nu \pi T}.$$

Die Wellenlänge ist also der Wurzel aus  $T$  direkt und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wurzel umgekehrt proportional.

Bei Flüssigkeiten mit kleiner Zähigkeit ( $\nu$  klein, also  $k$  sehr groß) geht der Ausdruck (7) für  $\omega$  über in

$$(7a) \quad \omega = \omega_0 \frac{a^2}{r^2} e^{-k(r-a)} \cdot \cos[\vartheta t - k(r-a)].$$

Berechnung des Drehmomentes. Wenn wir den in § 59 gewonnenen allgemeinen Ausdruck für das Reibungsmoment benutzen

$$M = \frac{8}{3} \pi \mu a^4 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{r=a},$$

so erhalten wir nach Einsetzung des Wertes  $\omega$

$$(8) \quad M = \frac{8}{3} \pi \mu a^3 \frac{3+6ka+6k^2a^2+2k^3a^3}{1+2ka+2k^2a^2} \omega_0 \cos \vartheta t - \frac{16}{3} \pi \mu a^5 \frac{k^2(1+ka)}{1+2ka+2k^2a^2} \omega_0 \sin \vartheta t.$$

Wegen  $\vartheta = 2\nu k^2$  können wir  $M$  auch in der Form schreiben

$$(8a) \quad M = \frac{8}{3} \pi \mu a^3 \frac{3+6ka+6k^2a^2+2k^3a^3}{1+2ka+2k^2a^2} \omega + \frac{8}{3} \pi \varrho a^5 \frac{(1+ka)}{1+2ka+2k^2a^2} \frac{d\omega}{dt} = c_1 \omega + c_2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Das Reibungsmoment der Kugel setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, von denen der erste der Drehschwingung proportional ist, während der andere mit der Drehbeschleu-

nigung wächst, also mit einer Vergrößerung des Trägheitsmomentes der Kugel gleichbedeutend ist. Wenn die Schwingungsdauer  $\frac{2\pi}{\vartheta}$  unendlich groß wird, so geht der Ausdruck für das Reibungsmoment über in den früher bestimmten Ausdruck

$$M = 8\pi\mu a^3 \omega.$$

Bei kleiner Zähigkeit wird

$$(8b) \quad M = \frac{8}{3}\pi\mu a^4 k \cdot \omega + \frac{8}{3}\pi\varrho a^4 \frac{1}{2k} \frac{d\omega}{dt} = \frac{8}{3}\pi a^4 \left[ \frac{\varrho\mu}{2} \left( \omega + \frac{1}{\vartheta} \frac{d\omega}{dt} \right) \right].$$

Das ursprüngliche Trägheitsmoment  $J_0$  der Kugel erfährt also die scheinbare Vergrößerung

$$J = J_0 + \frac{8}{3}\pi a^4 \left[ \frac{\varrho\mu}{2\vartheta} \right] = J_0 + \Delta J_0.$$

Die entsprechende relative Vergrößerung der Periode bestimmt sich aus

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta J_0}{J_0}$$

zu

$$(9) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{3} \frac{a^4}{J_0} \sqrt{\pi\mu\varrho T}.$$

Während einer Schwingungsperiode wird die Arbeit geleistet

$$A = \int_0^T M \omega dt = \frac{4}{3}\pi a^4 \left[ \frac{\varrho\mu}{2} \right] \omega_0^2 T,$$

die vom Beschleunigungsglied unabhängig ist. Bedeutet  $f$  den Dämpfungsfaktor der Schwingung, so ist das logarithmische Dekrement

$$\delta = \frac{fT}{2J},$$

daher die Dämpfungsarbeit während einer Periode

$$A = \int f \omega d\varphi = \frac{2\pi^2 f \varrho_0^2}{T} = \frac{2\pi^2 f \omega_0^2}{\vartheta^2 T}.$$

Setzen wir diese Arbeit der Reibungsarbeit gleich, so kommt

$$(10) \quad f = \frac{8}{3}\pi a^4 \sqrt{\frac{\varrho\mu}{2}}$$

und daraus für das Dekrement

$$(11) \quad \delta = \frac{4}{3}\pi \frac{a^4}{J} \sqrt{\pi\varrho\mu} T,$$

das also der Wurzel aus der Schwingungsdauer und der Reibung direkt und dem Trägheitsmoment umgekehrt proportional ist. Diese Formel ist geeignet, um aus den Schwingungsdaten die Reibungszahl der verwendeten Flüssigkeit zu bestimmen.

### § 65. Drehschwingung einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel.

1. Wir gehen wieder aus von dem allgemeinen, im vorigen Abschnitt aufgestellten Integral unserer Grundgleichung, also

$$(1) \quad \omega = \frac{e^{\vartheta t}}{r^3} [c_1 e^{kr} (kr - 1) - c_2 e^{-kr} (kr + 1)],$$

und haben für die besondere Lösung des vorliegenden Problems zu fordern, daß die Drehgeschwindigkeit in jedem Punkt des Kugellinnern endlich bleibt und das Reibungsmoment im Mittelpunkt verschwindet. Die erste Bedingung wird erfüllt durch

$$c_1 + c_2 = 0, \quad A = -B, \quad \alpha = \beta.$$

Dann wird bei Berücksichtigung des Realteils, wenn wir  $-\vartheta_1$  statt  $\vartheta_1$  einführen,

$$(2) \quad \omega_1 = \frac{A e^{-\vartheta_1 t}}{r^3} \{ e^{k_1 r} [r \chi \cos(\vartheta_2 t + k_2 r + \alpha + \eta) - \cos(\vartheta_2 t + k_2 r + \alpha)] \\ + e^{-k_1 r} [r \chi \cos(\vartheta_2 t - k_2 r + \alpha + \eta) + \cos(\vartheta_2 t - k_2 r + \alpha)] \}.$$

Die beiden ersten Glieder entsprechen einem Wellenzug, der sich von der Peripherie nach innen, die beiden letzten Glieder dagegen einem Wellenzug, der sich von innen nach der Peripherie zu fortpflanzt. Eine zweite mögliche und im wesentlichen gleich geartete Bewegung ergibt sich aus dem imaginären Bestandteil

$$(2a) \quad \omega_2 = \frac{A e^{-\vartheta_1 t}}{r^3} \{ e^{k_1 r} [r \chi \sin(\vartheta_2 t + k_2 r + \alpha + \eta) - \sin(\vartheta_2 t + k_2 r + \alpha)] \\ + e^{-k_1 r} [r \chi \sin(\vartheta_2 t - k_2 r + \alpha + \eta) + \sin(\vartheta_2 t - k_2 r + \alpha)] \}.$$

Die Grenzbedingungen sind in ähnlicher Weise zu verwerten wie im vorigen Fall. Nehmen wir z. B. an, daß die Zähigkeit klein sei, so können wir  $e^{-k_1 r}$  gegen  $e^{k_1 r}$  vernachlässigen und uns im übrigen auf die höchsten Potenzen von  $k$  beschränken. Wenn wir dann  $\vartheta_1 = 0$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta$  setzen und für die Kugel das Bewegungsgesetz  $\omega = \omega_0 \cos \vartheta t$  annehmen, so erhalten wir für eine beliebige Stelle in der Flüssigkeit

$$(2b) \quad \omega = \omega_0 \frac{a^2}{r^2} e^{-k(a-r)} \cdot \cos(\vartheta t - k(a-r)).$$

Das Reibungsmoment an der Kugel ergibt sich daraus nach der allgemeinen Formel zu

$$(3) \quad M = \frac{8}{3} \pi \mu a^4 \omega_0 k [\cos \vartheta t - \sin \vartheta t] \\ = \frac{8}{3} \pi \mu a^3 (ka) \cdot \omega + \frac{4}{3} \pi \rho a^4 (ka)^{-1} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

2. Um den Einfluß der Reibung sowohl der das Kugellinnere erfüllenden Flüssigkeit als auch der äußeren Luft genauer zu ermitteln, werden

wir den Ansatz etwas allgemeiner gestalten, und zwar nach dem klassischen Vorbild von H. v. Helmholtz, der sich eingehend sowohl versuchsmäßig wie theoretisch mit dem Problem beschäftigt hat<sup>1)</sup>. Bei den auf seine Veranlassung von G. v. Piotrowski durchgeführten Versuchen mit einer bifilar aufgehängten Kugel zeigte sich eine merkwürdige Verkleinerung der Schwingungsdämpfung (bzw. des Dekrements) in dem Fall, daß die aus Glas gebildete Oberfläche der Kugel mit einer Silberschicht bedeckt war, woraus Helmholtz den Schluß zog, daß im letzteren Fall die Flüssigkeit nicht an der Oberfläche haftet. Der von Helmholtz durchgeführten Theorie wird ein von Null verschiedener Gleitkoeffizient zugrunde gelegt, der sich für Wasser—Gold etwa zu 0,235 ergab. Die Versuche wurden später unter ganz ähnlichen Bedingungen von R. Ladenburg<sup>2)</sup> wiederholt, der nicht nur den Nachweis erbrachte, daß die Versilberung bzw. Vergoldung keinen Einfluß auf die Schwingungsdauer und das Dekrement ausübt, sondern auch bei Annahme des Haftens der Flüssigkeit an der Oberfläche einen Reibungskoeffizienten für Wasser ermitteln konnte, der mit dem von Poiseuille u. a. gefundenen Werten bis auf wenige Promille übereinstimmte, während der aus der Helmholtzschen Theorie resultierende Wert um 40%, größer ausfiel als der Poiseuillesche. Wir können daher im folgenden an den Ladenburgschen Voraussetzungen festhalten.

Um die Bewegungsgleichungen der Kugel aufzustellen, gehen wir von dem Ansatz (2a) aus und setzen  $\alpha=0$  sowie  $r=a$ . Dann ergibt sich für die Oberfläche der Kugel, wenn wir die mit  $e^{-k_1 a}$  behafteten Glieder vernachlässigen,

$$\omega = \frac{Az}{a^2} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a + \eta) - \frac{A}{a^3} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a)$$

und daraus für den Drehwinkel und die Drehbeschleunigung

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{Az}{a^2 |\vartheta_1|} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a - \eta) - \frac{A}{a^3 |\vartheta_1|} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \\ \quad \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a - 2\eta), \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Az}{a^2} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a + 3\eta) - \frac{A |\vartheta_1|}{a^3} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \\ \quad \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a + 2\eta); \end{array} \right.$$

dabei ist wieder zu setzen

$$\vartheta = -\vartheta_1 + i\vartheta_2 = |\vartheta| e^{2i\eta} = \nu k^2 = \nu z^2 e^{2i\eta}, \quad |\vartheta| = \nu z^2.$$

<sup>1)</sup> H. v. Helmholtz (u. G. v. Piotrowski), Abhandlungen, Bd. 1, Leipzig 1882, S. 172—222, insbes. S. 196ff.

<sup>2)</sup> R. Ladenburg, Über den Einfluß der Reibung auf die Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel, Annalen d. Physik, 4. Folge, Bd. 27 (1908), S. 157—185.

Als äußere Momente haben wir zu berücksichtigen das mit der Winkelamplitude  $\varphi$  proportionale Moment der bifilaren Aufhängung und der Torsion

$$(5) \quad M_A = C\varphi = (\gamma G + b) \cdot \varphi$$

sowie das Drehmoment  $M_F$  der Oberflächenreibung der Flüssigkeit. Für  $M_F$  erhalten wir nach der allgemeinen Formel

$$(6) \quad M_F = \frac{8}{3} \pi \mu a^4 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_a = \frac{8}{3} A \pi \mu a^4 \left[ \frac{z}{a^2} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a + 2\eta) - \frac{3z}{a^3} e^{k_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a + \eta) + \frac{3}{a^4} e^{\eta_1 a - \vartheta_1 t} \cdot \cos(\vartheta_2 t + k_2 a) \right].$$

Der Luftwiderstand setzt sich, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine Teil denselben Einfluß hat wie eine Vergrößerung des Trägheitsmomentes. Da bei den Versuchen das Trägheitsmoment der schwingenden Teile durch die Schwingungsdauer bestimmt wird, so enthält es bereits diesen Einfluß der mitschwingenden Luft. Den übrigbleibenden Teil können wir in Anbetracht der langsamen Bewegung proportional der Drehgeschwindigkeit annehmen, also setzen

$$(7) \quad M_L = K\omega.$$

Die vollständige Bewegungsgleichung der Kugel lautet dann

$$(8) \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi + M_F + M_L = 0.$$

Setzen wir die Ausdrücke (4) bis (7) in (8) ein, so erhalten wir eine Gleichung, die für alle Werte von  $t$  identisch erfüllt sein muß. Daraus entstehen dann durch Nullsetzen der Koeffizienten von  $\cos(\vartheta_2 t + k_2 a - \eta)$  und  $\sin(\vartheta_2 t + k_2 a - \eta)$  die beiden Bestimmungsgleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} J|\vartheta| \left( z \cos 4\eta - \frac{1}{a} \cos 3\eta \right) + C \left( \frac{z}{|\vartheta|} - \frac{1}{a|\vartheta|} \cos \eta \right) \\ = -\frac{8}{3} \pi \mu a^4 \left( z^2 \cos 3\eta - \frac{3z}{a} \cos 2\eta + \frac{3}{a^2} \cos \eta \right) - K \left( z \cos 2\eta - \frac{1}{a} \cos \eta \right), \\ J|\vartheta| \left( z \sin 4\eta - \frac{1}{a} \sin 3\eta \right) + \frac{C}{|\vartheta|a} \sin \eta \\ = -\frac{8}{3} \pi \mu a^4 \left( z^2 \sin 3\eta - \frac{3z}{a} \sin 2\eta + \frac{3}{a^2} \sin \eta \right) - K \left( z \sin 2\eta - \frac{1}{a} \sin \eta \right), \end{cases}$$

die in Verbindung mit dem Versuch zur Ermittlung des Reibungskoeffizienten ausreichen. Die Größen  $\vartheta = -\vartheta_1 + i\vartheta_2 = |\vartheta| e^{2i\eta}$  und damit  $k = \frac{\vartheta}{\nu} e^{i\eta}$  entnimmt man aus der Beobachtung der Schwingungsdauer  $T$  und des logarithmischen Dekrementes  $\delta$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichgerichteten Maxima der Auslenkung nach den Gleichungen

$$(10) \quad \vartheta_2 = \frac{2\pi}{T}, \quad \delta = \vartheta_1 T, \quad \operatorname{tg} 2\eta = -\frac{2\pi}{\delta}.$$

Die Größe  $K$  wurde von Helmholtz-Piotrowski und Ladenburg dadurch bestimmt, daß der entsprechende Versuch an der mit Luft gefüllten Kugel angestellt wurde. Wenn man die auf Luft bezüglichen Größen durch horizontale Striche auszeichnet und auf die Kleinheit von  $\frac{1}{k_1 a}$  Rücksicht nimmt, so erhält man für diesen Fall

$$(11) \quad \omega = \frac{A\bar{z}}{a^2} e^{\bar{k}_1 a - \bar{\nu}_1 t} \cdot \cos(\bar{J}_2 t + \bar{k}_2 a + \bar{\eta})$$

und daraus schließlich nach einer einfachen Rechnung

$$(12) \quad K = - \frac{\bar{C}}{\bar{J}} \frac{\sin 4\bar{\eta}}{\sin 2\bar{\eta}} - \frac{8}{3} \pi \varrho |\bar{\nu}| \bar{J} a^4 \frac{\sin \bar{\eta}}{\sin 2\bar{\eta}}$$

oder nach Vernachlässigung des zweiten Gliedes wegen

$$(12a) \quad \frac{\sin 4\bar{\eta}}{\sin 2\bar{\eta}} = 2 \cos 2\bar{\eta} = - \frac{\bar{d}}{\pi}$$

$$K = \frac{\bar{d}}{\pi} \frac{\bar{C}}{\bar{J}}$$

Eliminiert man ferner  $J$  aus den Gleichungen (9) und vernachlässigt die mit  $\nu^2$  und  $\nu^{\frac{3}{2}}$  multiplizierten Glieder, so ergibt sich schließlich eine quadratische Gleichung für  $|\nu|$ , aus der man den Wert berechnet

$$(13) \quad \sqrt{|\nu|} = \frac{1}{P} [Q - \sqrt{Q^2 + P(C \sin 4\eta + K \cdot |\mathcal{J}| \sin 2\eta)}],$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(13a) \quad \begin{cases} P = 8\pi\varrho |\mathcal{J}| a^3 \sin 2\eta - \frac{C \sin 4\eta}{|\mathcal{J}| a^2} - \frac{K}{a^2} \sin 2\eta, \\ Q = \frac{4}{3} \pi \varrho a^2 |\mathcal{J}|^{\frac{3}{2}} \sin \eta - \frac{C}{|\mathcal{J}|^{\frac{1}{2}} a} \sin 4\eta \cos \eta - K \frac{|\mathcal{J}|^{\frac{1}{2}}}{a} \sin 2\eta \cos \eta. \end{cases}$$

Die Größe  $C$  kann man aus den Konstanten der Aufhängung oder versuchsmäßig aus der Schwingungsdauer ermitteln, worüber in den angeführten Arbeiten das nähere nachgelesen werden kann.

Bei den Versuchen von Ladenburg war der Kugelradius  $a$  etwa 5 cm. Durch Vergrößerung des Trägheitsmomentes nach Anbringung von Zusatzgrößen (Ringern) wurde erreicht, daß die Schwingungsdauer nicht unter 100 s herabsank. Bei einer Beobachtung, die etwa bei einer Temperatur von 18° gemacht wurde, ergaben sich die folgenden Werte für die maßgebenden Größen:

$T$	$d$	$\vartheta$	$C$	$K$
146,9	0,0539	0,048	204,4	12,49



Daraus berechnet sich der Reibungskoeffizient zu  $\mu = 0.01028 \text{ cm}^2/\text{s}$ , der mit den von Poiseuille, J. E. Thorpe und J. W. Rodger, W. König und Mützel gefundenen Werten gut übereinstimmt. Damit hat gleichzeitig die grundlegende Annahme des Haftens der Flüssigkeit an den Gefäßwänden eine experimentelle Bestätigung erfahren.

### § 66. Aperiodische Drehung einer Kugel um einen Durchmesser.

1. Wenn wir wie oben (§ 64, S. 237) für die Stromfunktion  $\Psi$  den Ansatz machen

$$\Psi = e^{-\vartheta t} \chi(r),$$

so haben wir für die Funktion  $\chi$  mit  $k^2 = \frac{\vartheta}{\nu}$  die dazu gehörige Partikularlösung in der Form

$$\chi = \frac{c \cos(kr + \beta)}{r}$$

und für die Winkelgeschwindigkeit den Ausdruck

$$(1) \quad \omega = \frac{1}{r} e^{-\vartheta t} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c \cos(kr + \beta)}{r} \right).$$

Wenn  $\vartheta$  negativ wird, so treten wie früher im translatorischen Fall an Stelle der trigonometrischen die hyperbolischen Funktionen auf, woraus sich ein Unterschied zwischen der beschleunigten und der verzögerten Drehung ergibt, der im wesentlichen darin besteht, daß die verzögerte Drehung eine Rückdrehung der äußeren Flüssigkeit im Gefolge hat, also eine Art oszillatorischer Verteilung der Geschwindigkeit im umgebenden Felde, während im anderen Fall eine asymptotische Verteilung entsteht.

2. Wir können nun zur Verallgemeinerung der Betrachtung die Fouriersche Methode heranziehen und Lösungen für andere Beschleunigungsgesetze aufstellen. Das Verfahren besteht zunächst darin, eine Variation der Größe  $\vartheta$  vorzunehmen und die Lösung als eine Reihe von Elementarlösungen mit verschiedenem  $\vartheta$  anzusetzen, deren Koeffizienten den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen anzupassen sind. Im Grenzfall entsteht dann ein Integralausdruck als eine kontinuierliche Folge von partikulären Lösungen, in den  $\vartheta$  als Integrationsvariable eingeht. So läßt sich im besonderen die Bewegung in der umgebenden Flüssigkeit untersuchen, die entsteht, wenn die Kugel vom Radius  $a$  plötzlich aus der Ruhe in gleichmäßige (langsame) Rotation versetzt wird. Die im Zusammenhang mit diesem Problem auftretenden Integrale haben dann

wieder eine vollständige Analogie zu den entsprechenden Integralen der Wärmeleitungsgleichung. Setzt man

$$\vartheta = \lambda^2 \nu,$$

so wird  $k = \lambda$  und wir erhalten dann eine Lösung für  $\omega$  in der Form

$$(1a) \quad \omega = \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e^{-\lambda^2 \nu t}}{r} \cos \lambda(r - a + \alpha) \right].$$

Multipliziert man nun mit  $d\lambda$  und integriert zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$ , wie in dem entsprechenden Beispiel des § 44, so ergibt sich als weitere Lösung

$$(2) \quad \omega = \frac{c}{2r} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} \right).$$

Setzt man ferner zur Variation der Konstanten  $c$

$$c = F(\alpha)$$

und integriert nochmals zwischen denselben Grenzen, so kommt

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{F(\alpha)}{r} e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Man kann nun leicht nachweisen, daß die Oberflächenbedingungen erfüllt sind für

$$F(\alpha) = -2a^3 \omega_0 \pi^{-1} (1 - e^{-\frac{\alpha^2}{a}}).$$

Dann ergibt sich (vgl. § 44, S. 163)

$$(3a) \quad \omega = \frac{a^3 \omega_0}{r^2 \sqrt{\pi \nu t}} \int_0^\infty \left\{ \frac{a}{r} + \left( 1 - \frac{a}{r} \right) e^{-\frac{\alpha}{a}} \right\} e^{-\frac{(r-a+\alpha)^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Ist  $t$  von Null verschieden und  $r = a$ , so wird in der That

$$\omega = \frac{a^2 \omega_0}{r^2 \sqrt{\pi \nu t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{4\nu t}} d\alpha = \omega_0.$$

Ist ferner  $r > a$ , so wird  $\omega = 0$ , wenn  $t$  verschwindet. Wenn  $r = a$  und  $t = 0$  ist, so wird die untere Grenze unbestimmt. Aber da in diesem Falle  $\omega = \omega_0$  wird, so folgt, daß, wenn  $\delta = r - a$  gesetzt wird, die Größen  $\delta$  und  $t$  so verschwinden müssen, daß  $\frac{\delta^2}{2\nu t} = 0$  wird. Für  $t \rightarrow \infty$ , also praktisch nach einer hinreichend langen Zeit, wird die Drehgeschwindigkeit einer Flüssigkeitsschale im Abstand  $r$

$$\omega = \frac{a^3 \omega_0}{r^3}.$$

Die in (3a) vorkommenden Integrale können wieder durch das Fehlerintegral ausgedrückt werden. Setzt man nämlich

$$r - a + \alpha = 2u\sqrt{\nu t},$$

so erhält man mit  $u_0 = \frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}}$  den Ausdruck

$$\omega = \frac{2a^2\omega_0}{r^2\pi} \left\{ \frac{a}{r} \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{r-a}{r} e^{-\frac{r-a}{a}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-\left(u^2 + \frac{2u\sqrt{\nu t}}{a}\right)} du \right\}.$$

Wenn man im zweiten Integral die Variable  $u + \sqrt{\frac{\nu t}{a}} = u'$  einführt, so ergibt sich

$$\int_{u_0}^{\infty} e^{-\left(u^2 + \frac{2u\sqrt{\nu t}}{a}\right)} du = e^{\frac{\nu t}{a^2}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-u'^2} du'.$$

Im ganzen entsteht also mit Einführung des Fehlerintegrals folgender Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{a^2}{r} \omega_0 \left\{ \frac{a}{r} \left[ 1 - E_e \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] + \frac{r-a}{r} e^{\frac{\nu t}{a^2}} \left[ 1 - E_e \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}} + \frac{\sqrt{\nu t}}{a} \right) \right] \right\}.$$

Wenn man das Verhältnis  $\frac{\omega}{\omega_0}$  etwa für  $\frac{\nu t}{a^2} = 1$  und  $\nu t \rightarrow \infty$  in Abhängigkeit vom Radienverhältnis  $\frac{r}{a}$  aufträgt, so zeigt der Vergleich der beiden Kurven, daß bereits nach verhältnismäßig kurzer Zeit der zur gleichmäßigen Rotation gehörige Grenzwert  $\frac{\omega}{\omega_0}$  erreicht wird.

### § 67. Beschleunigte (oder verlangsamte) Drehung eines Zylinders.

Um die auf Zylinderkoordinaten transformierte Gleichung für die Drehung eines Kreiszylinders, also

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

zu integrieren, setzen wir zunächst ebene Verhältnisse, also Unabhängigkeit der Bewegung von der axialen Koordinate  $z$ , voraus. Dann geht mit der Substitution

$$(2) \quad \Psi = e^{-\nu t} \cdot \chi(r)$$

die Gleichung für  $\Psi$  über in die Gleichung für  $\chi$

$$(3) \quad \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \frac{\nu}{\nu} \chi = 0,$$

die von der Besselschen Funktion nullter Ordnung erfüllt wird.

Mit  $k = \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}}$  haben wir

$$(4) \quad \chi = aJ_0(kr) + bN_0(kr).$$

Die Geschwindigkeit  $v_\varphi = v = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}$  genügt der Gleichung

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t},$$

und es ergibt sich ohne weiteres aus dem Wert (4) von  $\chi$  in Übereinstimmung mit den früheren Ausführungen, daß sich  $v$  in der Form darstellen läßt

$$(6) \quad v = e^{-\vartheta t} [cJ_1(kr) + dN_1(kr)].$$

Wenn  $\vartheta$  negativ ist, was dem Fall beschleunigter Drehung entspricht, treten die Besselschen Funktionen mit imaginärem Argument auf. Führen wir nach englischer Bezeichnung ein

$$J_0(ikr) = I_0(kr); \quad -iJ_1(ikr) = I_1(kr)$$

und an Stelle der Funktionen zweiter Art  $N_0(ikr)$  und  $N_1(ikr)$

$$K_0(kr) = \frac{\pi}{2} [iJ_0(ikr) - N_0(ikr)],$$

$$K_1(kr) = -\frac{1}{k} \frac{dK_0(kr)}{dr} = -\frac{\pi}{2} [J_1(ikr) + N_1(ikr)],$$

so können wir  $\chi$  als lineare Kombination von  $I_0(kr)$  und  $K_0(kr)$  sowie  $v$  als Linearverbindung von  $I_1(kr)$  und  $K_1(kr)$  darstellen.

Soll z. B. der Zylinder vom Radius  $r = a$  mit der Geschwindigkeit  $v_0 e^{-\vartheta t}$  rotieren, während die Flüssigkeit an dem konzentrischen Zylinder  $r = r_0 > a$  haften soll, so lassen sich die Konstanten ohne weiteres bestimmen. Man erhält z. B. im ersten Fall der verzögerten Drehung

$$(7) \quad v = v_0 e^{-\vartheta t} \begin{vmatrix} J_1(kr) & J_1(kr_0) \\ N_1(kr) & N_1(kr_0) \\ J_1(ka) & J_1(kr_0) \\ N_1(ka) & N_1(kr_0) \end{vmatrix}.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Fällen  $\vartheta > 0$  zeigt sich in Analogie zu dem früher behandelten Fall der linearen Bewegung wieder darin, daß im Fall der exponentiell beschleunigten Drehung die Geschwindigkeit der Flüssigkeit vom Rande  $r = a$  bis zum (äußeren) Rand  $r = r_0$  kontinuierlich auf den Wert Null herabsinkt, während im Fall

der Verzögerung eine Art stehender Wellenbewegung vom Zylinder sich ausbreitet, wobei die Knotenpunkte den Nullstellen der Funktion

$$J_1(kr) N_1(kr_0) - J_1(kr_0) N_1(kr) = 0$$

entsprechen<sup>1)</sup> (vgl. Abb. 86 und 87).

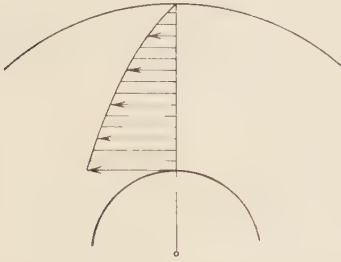


Abb. 86.

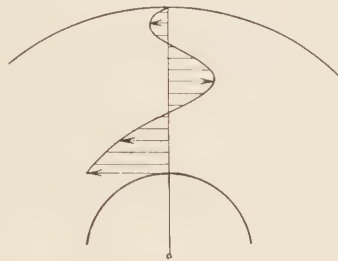


Abb. 87.

Abb. 86—87. Laminare Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei konzentrischen Zylindern bei beschleunigter und verzögerter Drehung des Innenzylinders.

Für beschleunigte Drehung eines Zylinders in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit haben wir

$$(8) \quad v = v_0 e^{\vartheta t} \frac{K_1\left(r \left| \begin{smallmatrix} \vartheta \\ \nu \end{smallmatrix} \right.\right)}{K_1\left(a \left| \begin{smallmatrix} \vartheta \\ \nu \end{smallmatrix} \right.\right)}$$

2. Allgemeinere Lösungen, die man einem beliebigen Geschwindigkeitsgesetz der Drehung anpassen kann, gewinnen wir dadurch, daß wir eine Summe oder unendliche Reihe von Lösungen von der Form (6) mit verschiedenem  $\vartheta$  ansetzen. Setzt man  $\vartheta = \lambda^2 \nu$ , so läßt sich  $v$  auf die Form bringen

$$v = \sum_i e^{-\lambda_i^2 \nu t} \cdot c_i J_1(\lambda_i r).$$

Wenn das Geschwindigkeitsgesetz zur Zeit  $t=0$  gegeben ist, so lassen sich die zunächst noch unbestimmten Koeffizienten wie bei der Fourierschen Entwicklung durch bestimmte Integrale ermitteln. Der Grenzfall, daß die Summe in ein Integral übergeht, wird beherrscht durch den bereits früher benutzten Bessel-Fourierschen Integralsatz

$$\int_0^{\infty} d\lambda \int_{r_1}^{r_2} \lambda \varrho F(\varrho) J_1(\lambda \varrho) J_1(\lambda r) d\varrho \begin{cases} = F(r) & \text{für } r_2 > r > r_1 \\ = 0 & \text{für } r_1 > r > r_2. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Die Wurzeln dieser Gleichung finden sich in dem Tabellenwerk von Jahnke-Emde, S. 162; vgl. auch A. Kälähne, Z. f. Math. u. Physik, Bd. 54 (1907), S. 55—86.

Inbesondere läßt sich mit Hilfe dieses Satzes das Problem der momentan einsetzenden gleichmäßigen Drehung eines Kreiszylinders in einer zähen Flüssigkeit behandeln, das unmittelbar mit der Ausbreitung einer kreiszylindrischen Wirbelschicht zusammenhängt.

### § 68. Drehschwingungen eines Zylinders in der Flüssigkeit.

1. Wenn wir unter Voraussetzung einer periodischen Drehbewegung eines Zylinders für die Stromfunktion den Ansatz machen

$$\psi = e^{-\tau} i^{\theta t} \cdot \chi,$$

so erhalten wir für  $\chi$  die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} \pm i \frac{\theta}{\nu} \chi = 0,$$

der die Lösung entspricht

$$(2) \quad \chi(r) = c_1 I_0(\sqrt{\pm i k r}) + c_2 K_0(\sqrt{\pm i k r}).$$

Die beiden Funktionen  $I_0$  und  $K_0$  lassen sich in je einen reellen und imaginären Bestandteil zerlegen. Man setzt nach Kelvin

$$(3) \quad \begin{aligned} I_0(\sqrt{\pm i k r}) &= \text{ber}(kr) \pm i \text{bei}(kr), \\ K_0(\sqrt{\pm i k r}) &= \text{ker}(kr) \pm i \text{kei}(kr). \end{aligned}$$

Für die hier auftretenden Funktionen gelten die Entwicklungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \dots, \\ \text{bei } x &= \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \dots, \\ \text{ker } x &= -\lg \frac{1}{2} \gamma x \cdot \text{ber } x + \frac{1}{4} \pi \text{ bei } x - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots, \\ \text{kei } x &= -\lg \frac{1}{2} \gamma x \cdot \text{bei } x - \frac{1}{4} \pi \text{ ber } x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots, \end{aligned} \right.$$

während für große Argumente die Näherungsformeln gelten

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0(\sqrt{\pm i x}) &\approx \frac{e^{1/2}}{2\pi x} e^{-i \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right)}, \\ K_0(\sqrt{\pm i x}) &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2x} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-i \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun die beiden Fälle, daß die Flüssigkeit entweder das Innere des schwingenden Kreiszylinders oder den unbegrenzten Raum außerhalb des Zylinders erfüllt.



2. Flüssigkeit im Innern des oszillierenden Kreiszylinders. Da in diesem Fall zu fordern ist, daß  $\Psi$  und  $\omega$  im Mittelpunkt, d. h. für  $r=0$ , nicht unendlich werden, so ist hier der Gebrauch der Funktion  $K_0(|ikr|)$ , die im Nullpunkt logarithmisch unendlich wird, auszuschließen, mithin das Integral allein mit  $I_0(|ikr|)$  zu bilden. Wenn wir beide Zeichen von  $\vartheta$  berücksichtigen und die entsprechenden Integrale linear kombinieren, so erhalten wir die Lösung in der reellen Form

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi &= (A + iB) e^{i\vartheta t} [\text{ber}(kr) + i \text{bei}(kr)] \\ &+ (A - iB) e^{-i\vartheta t} [\text{ber}(kr) - i \text{bei}(kr)] \\ &= 2A [\cos \vartheta t \text{ber}(kr) - \sin \vartheta t \text{bei}(kr)] \\ &- 2B [\cos \vartheta t \text{bei}(kr) + \sin \vartheta t \text{ber}(kr)]. \end{aligned} \right.$$

Führt der Zylinder ( $r=a$ ) eine Drehung

$$\omega = \omega_0 \sin \vartheta t$$

aus, so muß infolge des Haftens der Flüssigkeit an den Wänden für (6) die Grenzbedingung

$$\frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=a} = \omega_0 \sin \vartheta t$$

mit jedem Wert von  $t$  erfüllt sein. Daraus fließen dann die beiden Gleichungen

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A \text{ber}'(ka) - B \text{bei}'(ka) &= 0, \\ a\omega_0 &= -2Ak \text{bei}'(ka) - 2Bk \text{ber}'(ka), \end{aligned} \right.$$

wo die Striche die Ableitungen nach dem Argument bedeuten.

Es ergibt sich daher

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi &= -\frac{a\omega_0}{k} \cos \vartheta t \left\{ \frac{\text{ber}(kr) \text{bei}'(ka) - \text{bei}(kr) \text{ber}'(ka)}{\text{ber}'^2(ka) + \text{bei}'^2(ka)} \right\} \\ &+ \frac{a\omega_0}{k} \sin \vartheta t \left\{ \frac{\text{ber}(kr) \text{ber}'(ka) + \text{bei}(kr) \text{bei}'(ka)}{\text{ber}'^2(ka) + \text{bei}'^2(ka)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Betrachten wir im besonderen den Fall kleiner Zähigkeit, der durch große Werte von  $k$  bzw.  $kr$  charakterisiert ist, so lassen sich die Besselschen Funktionen in erster Annäherung gemäß (5) durch Exponential- und trigonometrische Funktionen darstellen. Wenn man die aus (5) sich ergebenden, für große  $kr$  brauchbaren Werte

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{ber}'(kr) &\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{\frac{kr}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{kr}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{bei}'(kr) &\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{\frac{kr}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{kr}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \right.$$

in (8) einführt, so ergibt sich die Stromfunktion

$$(10) \quad \Psi = \frac{a\omega_0}{k} \left| \frac{a}{r} e^{\frac{k}{\sqrt{2}}(r-a)} \cdot \sin \left[ \vartheta t + \frac{k}{\sqrt{2}}(r-a) - \frac{\pi}{4} \right] \right|$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$(11) \quad \omega = \left( \frac{a}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \omega_0 e^{\frac{k}{\sqrt{2}}(r-a)} \cdot \sin \left[ \vartheta t + \frac{k}{\sqrt{2}}(r-a) \right].$$

Das widerstehende Reibungsmoment wird

$$M = -4\pi\mu\omega_0 a^3 \frac{k}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta t + \sin \vartheta t).$$

3. Flüssigkeit außerhalb des Kreiszyinders. In dem Fall, daß die Flüssigkeit das Außengebiet des Kreiszyinders erfüllt, haben wir in dem Integral (2) statt der Funktion  $I_0(kr \sqrt{i}) = \text{ber}(kr) + i \cdot \text{bei}(kr)$ , die für  $r > \infty$  unbegrenzt wächst, die Funktion  $K_0(\sqrt{i}kr)$  allein zu verwenden. Wenn die Grenzbedingung wieder

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=a} = a\omega_0 \sin \vartheta t$$

lautet, so erhalten wir die Lösung dadurch, daß wir in (8) die Funktionen ber und bei durch ker und kei ersetzen; es wird also

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = -\frac{a\omega_0}{k} \cos \vartheta t \cdot \left| \frac{\text{ker}(kr) \text{kei}'(ka) - \text{kei}(kr) \text{ker}'(ka)}{\text{ker}'^2(ka) + \text{kei}'^2(ka)} \right| \\ \quad + \frac{a\omega_0}{k} \sin \vartheta t \cdot \left| \frac{\text{ker}(kr) \text{ker}'(ka) + \text{kei}(kr) \text{kei}'(ka)}{\text{ker}'^2(ka) + \text{kei}'^2(ka)} \right|. \end{array} \right.$$

Bei kleiner Zähigkeit können wir in Analogie zu (10) die Näherungsrelationen

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ker}'(kr) \infty \left| \frac{\sqrt{\pi}}{2kr} e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \left( \frac{kr}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right), \right. \\ \text{kei}'(kr) \infty \left| \frac{\sqrt{\pi}}{2kr} e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}} \cdot \sin \left( \frac{kr}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right| \end{array} \right.$$

benutzen, mithin statt (12)

$$\Psi = -\frac{a\omega_0}{k} \left| \frac{a}{r} e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}(r-a)} \cdot \sin \left( \vartheta t - \frac{k}{\sqrt{2}}(r-a) - \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

und

$$\omega = \omega_0 \left( \frac{a}{r} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}(r-a)} \cdot \sin \left( \vartheta t - \frac{k}{\sqrt{2}}(r-a) \right)$$

schreiben, woraus dann für das Reibungsmoment, das an der Oberfläche des Zylinders wirkt, derselbe Näherungsausdruck wie im vorhergehenden Fall folgt.

### § 69. Drehschwingungen eines begrenzten Zylinders.

Wenn man bei der Lösung der Differentialgleichung (1) des § 67 die Abhängigkeit von  $z$  berücksichtigt und als Zeitkoeffizienten wieder  $e^{-\vartheta t}$  wählt, so erhält man mit dem Ansatz

$$\chi = R(r) \cdot Z(z)$$

die Gleichung

$$(1) \quad \ddot{R} \cdot Z + \frac{1}{r} \dot{R} \dot{Z} + R \ddot{Z} + \frac{\vartheta}{\nu} R Z = 0.$$

Setzen wir

$$(2) \quad \ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} - k^2 R = 0,$$

so ist  $R$  eine Besselsche Funktion, und es bleibt die Gleichung

$$(3) \quad \ddot{Z} + \left( \frac{\vartheta}{\nu} + k^2 \right) Z = 0;$$

mit  $(\alpha^2 + k^2)\nu = \vartheta$  erhalten wir alsdann das Integral

$$(4) \quad \Psi = (A \cos \alpha z + B \sin \alpha z) \cdot B_0(kr) e^{-\vartheta t}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

erhalten wir wegen

$$\frac{dB_0(r)}{dx} = -B_1(x)$$

einen Ausdruck von der Gestalt

$$(5) \quad \omega = (A \cos \alpha z + B \sin \alpha z) \frac{B_1(kr)}{r} e^{-\vartheta t} = (A \cos \alpha z + B \sin \alpha z) F(r) e^{-\vartheta t}.$$

Diese Lösung ist von O. E. Meyer<sup>1)</sup> auf den Fall des beiderseits durch ebene Flächen senkrecht zur Achse begrenzten Zylinders angewendet worden. Meyer benutzt dabei die Darstellung der Besselschen Funktionen durch bestimmte Integrale. Die Funktion  $B_1(kr)$  läßt sich linear zusammensetzen aus zwei Funktionen erster und zweiter Art,  $J_1(kr)$  und  $G_1(kr)$ , für die die Integralformeln gelten

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{J_1(kr)}{kr} = \int_{-1}^{+1} e^{ikr\xi} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi = S(kr), \\ \frac{G_1(kr)}{kr} = - \int_1^{\infty} e^{ikr\xi} (\xi - 1)^{\frac{1}{2}} d\xi = -Q(kr). \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Bestimmung der inneren Reibung nach Coulombs Verfahren, Ann. der Physik, Bd. 32 (1887) S. 624—659; O. E. Meyer, Ein Verfahren zur Bestimmung der inneren Reibung der Flüssigkeiten, Ann. d. Physik, Bd. 43 (1891), S. 1—4.

Wir können also setzen

$$(7) \quad F(r) = \frac{B_1(kr)}{r} = S(kr) + CQ(kr).$$

Wenn wir insbesondere die Bewegung einer Flüssigkeit im Innern eines Kreiszylinders bestimmen wollen, so haben wir bei Unterdrückung der Funktion  $Q$ , die für  $r=0$  unendlich wird

$$(8) \quad F(r) = S(kr) = \int_{-1}^{+1} d\xi \sqrt{1 - \xi^2} \cos kr d\xi.$$

Wir nehmen nun mit O. E. Meyer an, daß der Zylinder sich mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, die durch die Gleichung

$$\omega = \omega_0 e^{-\vartheta t}$$

gegeben sein möge, wo  $\vartheta$  als eine komplexe Größe anzusehen ist. Wenn ferner der Zylinder den Radius  $a$  und die Höhe  $2h$  hat, so ist zu fordern, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowohl für  $r=a$  als auch für  $z=h$  in den Ausdruck (9) übergeht. Die Erfüllung dieser Randbedingungen ist nur möglich, wenn wir eine unendliche Reihe von partikulären Integralen verwenden. Für das erste Integral setzen wir  $k=0$ ; dann wird  $S(kr)$  eine Konstante. Für die anderen Integrale setzen wir

$$\alpha^2 = \frac{\vartheta}{\nu}, \quad k_n^2 = \alpha^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{h}\right)^2.$$

Die dadurch entstehende Reihe

$$(9) \quad \omega = \left\{ C \frac{\cos \alpha z}{\cos \alpha h} + \sum A_n \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{h-z}{h} \pi\right) S_n(k_n r) \right\} e^{-\vartheta t}$$

genügt bereits der Bedingung, für  $z=h$  von  $r$  unabhängig zu werden. Um auch die entsprechende Bedingung für  $r=a$  zu erfüllen, setzt man

$$A_n = \frac{4C}{2n-1} \frac{\alpha^2}{\pi k_n^2} \frac{1}{S_n(ka)}.$$

Der endgültige Ausdruck für  $\omega$  wird dann

$$(9a) \quad \omega = \omega_0 \left\{ \frac{\cos \alpha z}{\cos \alpha h} + \sum \frac{4\alpha^2}{(2n-1)\pi k_n^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \frac{(h-z)}{h} \pi\right) \frac{S_n(kr)}{S_n(ka)} \right\} e^{-\vartheta t}.$$

Als Bewegungsgleichung des Zylinders haben wir ferner

$$(10) \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f^2 \varphi + M = 0.$$

Das Reibungsmoment  $M$  setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen, die von der Reibung längs des Zylindermantels und längs der Begrenzungsebenen des zylindrischen Hohlraumes herrühren. Man hat dann nach den allgemeinen Formeln

$$(11) \quad J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f^2 \varphi = -2\pi \mu \left\{ a^3 \int_{-h}^{+h} dz \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_a + \int_0^a r^3 dr \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z=h} - \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z=-h} \right] \right\}.$$

Den Parameter  $\vartheta$  erhält man durch Einsetzen von  $\omega$  und  $q = \frac{\omega_0}{\vartheta} e^{-\vartheta t}$ . Berücksichtigt man die Differentialgleichung für  $\omega$  oder  $S(rk)$ , nämlich

$$(12) \quad \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dS}{dr} + k^2 S = 0,$$

so ergibt sich nach einer einfachen Rechnung

$$(13) \quad J \vartheta + \frac{f^2}{\vartheta} + \mu a a^4 \operatorname{tg} \alpha h - 2 \pi \mu a^3 \sum \left( \frac{4}{2n-1} \frac{\alpha^2}{\pi k_n^2} \right)^2 S(ka) = 0,$$

wobei

$$S(kr) = \frac{1}{S(kr)} \frac{dS(kr)}{dr}$$

gesetzt wurde. Bei den Versuchen von Mützel u. a. war die Höhe  $2h$  des zylindrischen Gefäßes gering im Vergleich zum Halbmesser  $a$ . Es ergibt sich dann, wie Meyer gezeigt hat, daß die Gleichung (13) unendlich viele reelle Wurzeln und im allgemeinen auch vier komplexe Wurzeln

$$\sqrt{\vartheta} = m_1 \pm i m_2, \quad \sqrt{\vartheta} = -m_1 \pm i m_2$$

besitzt. Mit Einführung der Schwingungsdauer  $T$  und des Dekrementes  $\delta$  haben wir

$$\vartheta = \frac{\delta + 2i\pi}{T}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{\nu} \frac{\delta + 2i\pi}{T}.$$

Die Funktion  $S(kr)$  wird mit wachsendem  $r$ , wie die Differentialgleichung erkennen läßt, mit  $\cos kr$  proportional. Man kann daher für große Werte von  $a$  angenähert setzen

$$S(ka) = -k \operatorname{tg}(ka).$$

Führen wir noch zur Abkürzung ein

$$H = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{h} \sqrt{\nu},$$

$$v^2 - w^2 = \frac{H^2 T - \delta}{2}, \quad 2vw = \pi,$$

so läßt sich die Gleichung für  $\vartheta$  angenähert auf die Form bringen

$$(13a) \quad J \frac{\delta + 2i\pi}{T} + f^2 T \frac{\delta - 2i\pi}{4\pi^2 + \delta^2} + \pi \sqrt{\mu \varrho} a^4 \sqrt{\vartheta}$$

$$- 8 \left| \frac{2\mu \varrho}{T} h a^3 \sum \frac{(\delta + 2i\pi)(\delta - 2i\pi - H^2 T)(v + iw)}{\pi(2n-1)^2(v^2 + w^2)^3} \right. = 0.$$

Daraus entstehen durch Zerlegung in den reellen und imaginären Teil zwei Gleichungen, die nach Elimination von  $f^2$  auf eine endgültige Bestimmungsgleichung für den Reibungskoeffizienten  $\mu$  führen. Wenn man noch die Größe

$$K = \sum \left( \frac{8}{2n-1} \right)^2 \frac{(2\pi^2 - \delta H^2 T)w - \pi(2\delta + H^2 T)v}{(v^2 + w^2)^3}$$

einführt, so ergibt sich für  $\mu$  bei Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen von  $\delta$  der Ausdruck

$$(14) \quad \mu = \frac{1}{\varrho T} \left[ \frac{8J\delta}{a^4(2\pi - \delta)^{\frac{3}{2}} + Kh a^3} \right].$$

Die angegebenen Formeln hat K. Mützel<sup>1)</sup> benutzt, um die innere Reibung von Salzlösungen zu bestimmen. Er verwendete dabei einen Hohlzylinder mit dem inneren Durchmesser  $2a = 19,79$  cm und der Höhe  $2h = 2,46$  cm. Das Trägheitsmoment der festen schwingenden Teile war  $J = 76052$  g cm s<sup>2</sup>. Die Werte von  $K$  unterscheiden sich nur wenig bei den verschiedenen Flüssigkeiten und können daher aus einigen Spezialwerten durch Interpolation gefunden werden. Für das größte logarithmische Dekrement, das der Normallösung von  $BaCl_2$  zukommt, ergibt sich  $\frac{\delta}{2} = 0,19255$ ; ferner wird  $\frac{K}{8} = 3,7375$  (bei Meyer mit  $K$  bezeichnet). Für Wasser ergibt sich  $\frac{\delta}{2} = 0,15622$ ,  $\frac{K}{8} = 3,8508$ . Wir stellen im folgenden einige von Mützel gefundenen Werte des Reibungskoeffizienten zusammen, die alle einer Temperatur von 20° entsprechen. Die unter  $P$  angegebenen Werte beziehen sich auf den Prozentgehalt der Salzlösung.

Flüssigkeit	$P$	$\mu$
Chlornatrium NaCl	2,925	0,01062
	5,85	0,011225
Chlorkalium KCl	3,73	0,010116
	7,46	0,010085
Natriumnitrat NaNO <sub>3</sub>	4,245	0,010583
	8,489	0,011200
Kaliumnitrat KNO <sub>3</sub>	5,046	0,010104
	10,092	0,010056
Wasser H <sub>2</sub> O		0,010141

Es ergibt sich unter anderem aus den Mützelschen Bestimmungen, daß die Reibung der Chloride stets größer ist als die der entsprechenden Nitrates, mit Ausnahme der Magnesiumsalze. Ferner ist die Reihe der zweiwertigen Metalle hinsichtlich ihrer Reibungsgrößen (*Ba*, *Zr*, *Ca*, *Mg*) umgekehrt wie die nach den Molekulargewichten geordnete Reihenfolge.

<sup>1)</sup> K. Mützel, Über innere Reibung von Flüssigkeiten, Ann. der Physik, Bd. 43 (1891), S. 15.



## § 70. Schwingungen einer Scheibe.

1. Die von der Drehschwingung einer Scheibe hervorgerufene Flüssigkeitsbewegung läßt sich in ganz ähnlicher Weise bestimmen wie die im vorigen Paragraphen betrachtete Drehschwingung. Wir wollen zunächst annehmen, daß die unendliche Ebene der Scheibe eine Drehung um die  $z$ -Achse mit der veränderlichen Drehgeschwindigkeit

$$(1) \quad \omega = \omega_0 \cos \vartheta t$$

ausführt. Dann kann die erzwungene Drehung der Flüssigkeit als eine Funktion von  $z$  und  $t$  angesehen werden. Die allgemeine Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

reduziert sich daher auf

$$(2a) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial t},$$

und die Behandlung schließt sich unmittelbar an die Bewegungsfälle der §§ 27, 28 an. Man erhält als partikuläre Lösung

$$(3) \quad \begin{cases} \omega = \omega_0 e^{-kz} \cos(\vartheta t - kz), \\ \varphi = \frac{\omega_0}{\vartheta} e^{-kz} \sin(\vartheta t - kz), \end{cases}$$

wobei  $k = \sqrt{\frac{\vartheta}{2\nu}} = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{\mu T}}$  zu setzen ist.

Um die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um den vom Kreis um 0 mit dem Radius  $R$  begrenzten Teil der Ebene zu bewegen, benutzen wir die bekannte Grundformel § 54, (7c). Wir erhalten daraus

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^3 \cdot \mu \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z=0} = 4\pi r^3 \mu k \omega_0 (\cos \vartheta t - \sin \vartheta t)$$

und damit

$$(4) \quad \begin{aligned} M &= \int_0^R \frac{dM}{dr} dr = -\pi \mu k R^4 \omega_0 (\cos \vartheta t - \sin \vartheta t) = \\ &= -\omega_0 \sqrt{\frac{2\pi^3 \mu \varrho}{T}} R^4 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Aus der augenblicklichen Leistung

$$\frac{dA}{dt} = M\omega = M\omega_0 \cos \vartheta t$$

ergibt sich daher die während einer Periode geleistete Arbeit

$$(5) \quad A = \int_0^{2\pi} \frac{dA}{dt} dt = \pi^2 R^4 \omega_0^2 \vartheta^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mu \varrho}{2}}.$$

Diese Formel können wir mit einer gewissen Annäherung anwenden auf die zuerst von Coulomb untersuchte Bewegung einer Scheibe, die an einem verdrehbaren Metallfaden aufgehängt ist und in eine Flüssigkeit hineintaucht. Bei einem Trägheitsmoment  $J$  der Scheibe, einem Elongationswinkel  $\varphi$  und einem Torsionsmoment  $f^2 \varphi$ , ferner einem Dämpfungsfaktor  $b$  haben wir

$$(6) \quad J \ddot{\varphi} + b \dot{\varphi} + f^2 \varphi = 0,$$

mithin

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\vartheta_1 t} \sin \vartheta_2 t \quad \vartheta_1 = \frac{b}{2J}.$$

Mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{f} \sqrt{J}$$

erhält man das Verhältnis zweier phasengleicher Amplituden und das Dekrement zu

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = e^{\vartheta_1 T}, \quad \delta = \lg \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \vartheta_1 T = \frac{bT}{2J}.$$

Für die Dämpfungsarbeit, die während einer Periode geleistet wird, ergibt sich dann mit der für kleine  $\vartheta_1$  zulässigen Substitution

$$\varphi = \varphi_0 \sin \vartheta_2 t = \frac{\omega_0}{\vartheta_2} \sin \vartheta_2 t$$

der Ausdruck

$$(7) \quad \int_0^T b \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{2\pi^2 b \varphi_0^2}{T}.$$

Wenn wir von dem Einfluß der Scheibenbegrenzung und der Gefäßwände absehen und dann diese Arbeit gleich dem oben berechneten Wert  $A$  setzen, so ergeben sich die Näherungswerte

$$(8) \quad b = R^4 \sqrt{\frac{\pi^3 \mu \varrho}{T}}, \quad \delta = \frac{R^4}{2J} \sqrt{\pi^3 \varrho \mu T}.$$

2. Die nach den gegebenen Formeln berechneten Werte für den Reibungskoeffizienten fallen etwas zu groß aus. W. König<sup>1)</sup> und O. E. Meyer<sup>2)</sup> haben daher eine genauere Näherungsrechnung angegeben, in der die vom Scheibenrand und den äußeren Grenzen des Gefäßes übertragene Reibung berücksichtigt werden. Um kurz den Gedankengang der Meyerschen Theorie wiederzugeben, können wir anknüpfen an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, in dem bereits der mathematische Charakter des Ansatzes charakterisiert ist.

<sup>1)</sup> W. König, Über die Bestimmung des Reibungskoeffizienten tropfbarer Flüssigkeiten mittels drehender Schwingungen. Ann. d. Physik, 32, 1887, S. 193.

<sup>2)</sup> O. E. Meyer, Über die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulombs Verfahren. Ann. d. Physik, 32, 1887, S. 642—659.

Die Dicke  $2h_1$  der Scheibe möge als klein im Verhältnis zur Höhe  $2h_2$  des Gefäßes vorausgesetzt werden. Der in horizontaler Richtung unbegrenzt gedachte Flüssigkeitsraum läßt sich in zwei Gebiete zerlegen, die von dem durch den Scheibenrand gelegten Zylinder (Radius  $R$ ) voneinander getrennt sind. Innerhalb des Zylinders ( $r < R$ ) kann man annehmen, daß die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für die Punkte einer horizontalen Flüssigkeitsschicht von der Höhe  $dz$  konstant bleibt; außerhalb ( $r > R$ ) soll die Übertragung von Geschwindigkeit durch Reibung nur in horizontaler Richtung möglich sein. Die Differentialgleichung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für  $r > R$  wird durch die einfache Gleichung

$$(9) \quad \nu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

ersetzt, wobei aber  $\omega$  auch von der horizontalen Koordinate  $z$  abhängig sein soll. Für  $r < R$  stellen wir eine neue Gleichung auf, die sich bezieht auf die ohne innere Verschiebung vorausgesetzte Bewegung einer flüssigen Scheibe vom Radius  $R$  und der Höhe  $dz$  unter dem Einfluß einer dreifachen Reibung, nämlich an der unteren und oberen ebenen Grenzfläche, sowie an dem kreiszylindrischen Rande. Man erhält wie für eine feste Scheibe unmittelbar

$$(10) \quad \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{4}{R} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} \right].$$

Zur Lösung von (10) für die Gebiete  $z > h_1$  bzw.  $z < -h_1$  setzen wir

$$(11) \quad \omega = C \frac{\sin \alpha (h_2 \mp z)}{\sin \alpha (h_2 - h_1)} e^{-\vartheta t} \quad (r < R).$$

Bei der Lösung von (9) haben wir mit Rücksicht darauf, daß  $\omega$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden soll, die früher eingeführte Funktion  $S(kr)$  zu unterdrücken und erhalten dann

$$(12) \quad \omega = C \frac{\sin \alpha (h_2 \mp z)}{\sin \alpha (h_2 - h_1)} \frac{Q(kr)}{Q(kR)} e^{-\vartheta t} \quad (r > R),$$

wo

$$Q = \int_1^{\infty} d\xi \sqrt{\xi^2 - 1} e^{ikr\xi}$$

und

$$\frac{\vartheta}{\nu} = k^2 = \alpha^2 - \frac{4}{R} \left( \frac{dQ}{dr} \right)_{r=R} = \alpha^2 - \frac{4}{R} \cdot P(kR)$$

zu setzen ist, während die Geschwindigkeit der Scheibe durch

$$\omega = C e^{-\vartheta t}$$

gegeben sein möge. Für die Bewegung der Scheibe gilt dann entsprechend dem früher behandelten Falle des Kreiszyllinders

$$(13) \quad J\ddot{\vartheta} + f^2\vartheta = 2\pi\mu \left\{ R^3 \int_{-h_1}^{+h_1} dz \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_R + \int_0^R r^3 dr \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{h_1} - \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{-h_1} \right] \right\}.$$

Setzen wir die Ausdrücke (11) und (12) in (13) ein, so finden wir die Gleichung

$$(14) \quad J\vartheta^2 + f^2 - \pi\mu\vartheta \{ \alpha R^4 \operatorname{ctg} \alpha (h_2 - h_1) - 4h_1 R^3 P(kR) \} = 0$$

für die komplexe Größe  $\vartheta$ , deren Bestandteile näherungsweise durch Vermittlung der Versuchsgrößen

$$\frac{2}{\vartheta_2} = T, \quad \delta = \vartheta_1 T$$

bestimmt werden können.

Unter der Voraussetzung, daß  $h_2 - h_1$  und  $R$  genügend groß sind, können wir bei hinreichend kleiner Zähigkeit angenähert setzen

$$P(kr) = ik,$$

also

$$\alpha^2 = k^2 + 4i \frac{k}{R}, \quad \alpha = k + 2i \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} + 2i \frac{1}{R},$$

$$(15) \quad \operatorname{ctg} \alpha (h_2 - h_1) = -i.$$

Danach wird die Bestimmungsgleichung für  $\vartheta$  angenähert

$$(16) \quad 0 = \left( \vartheta - \pi\mu \frac{R^3}{J} \right)^2 + \frac{f^2}{J} - \left( \pi\mu \frac{R^3}{J} \right)^2 + \pi \frac{R^4 + 4h_1 R^3}{J} \sqrt{\mu \varrho} \vartheta^{\frac{3}{2}} i.$$

Daraus ergibt sich angenähert mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $\mu$

$$(17) \quad \begin{aligned} \delta &= \frac{R^4}{2J} \sqrt{\pi^3 \mu \varrho} T + \pi \frac{R^3}{J} \mu T \\ &= \pi \frac{R^4}{2J} \sqrt{\pi \varrho \mu T} \left( 1 + \frac{2}{R} \sqrt{\frac{T \cdot \nu}{\pi}} \right). \end{aligned}$$

Der oben in erster Annäherung ermittelte Wert (8) des Dekrementes erscheint also hier mit dem Korrekturfaktor  $1 + \frac{2}{R} \sqrt{\frac{T \cdot \nu}{\pi}}$  multipliziert. Wir können mit der Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{R^4}{4J} \sqrt{\pi \varrho \mu T}$$

die aus (16) sich ergebende Reihe für das Drehmoment auch in die Form setzen

$$\delta = 2\pi\varepsilon \left[ 1 - \left( 1 - \frac{8J}{\pi \varrho R^5} \right) \varepsilon + \dots \right].$$

Die Umkehrung dieser Reihe ergibt

$$\varepsilon = \frac{R^4}{4J} \sqrt{\pi \varrho \mu T} = \frac{\delta}{2\pi} + \left( 1 - \frac{8J}{\pi \varrho R^5} \right) \left( \frac{\delta}{2\pi} \right)^2 + \dots,$$

woraus dann der genauere Wert des Reibungskoeffizienten  $\mu$  sich errechnen läßt.

Nach dem geschilderten Verfahren hat Meyer die Werte von  $\mu$  für Wasser, verschiedene Salzlösungen und Öle bei mehreren Temperaturen ermittelt und gute Übereinstimmung der aus mehreren Messungen stammenden Zahlen untereinander sowie mit den aus Strömungsbeobachtungen gewonnenen Resultaten erhalten. Namentlich erwies sich bei Flüssigkeiten von großer Zähigkeit, wie Öl, der Betrag der Korrektion als ziemlich erheblich, so daß die neuen Reibungswerte fast die Hälfte der nach dem älteren Verfahren<sup>1)</sup> berechneten Werte ausmachten. Für die Bestimmung der Luftreibung mußte die Coulombsche Versuchseinrichtung wesentlich abgeändert werden, worüber in der Meyerschen Arbeit das Nähere nachgelesen werden möge.

## ELFTES KAPITEL.

### Elemente der Oseenschen asymptotischen Theorie des Widerstandes.

#### § 71. Allgemeines.

Wenn man die Ergebnisse der in den vorigen Abschnitten dargelegten Grenzschichttheorie kritisch überblickt, so wird man nicht sagen können, daß damit eine vollständige Widerstandstheorie geschaffen wurde. Unzweifelhaft liegt die Bedeutung der Theorie in einer physikalisch richtigen Erkenntnis, die durch viele Einzelversuche gestützt wird. Ebenso wird man anerkennen müssen, daß auch die rechnerischen Resultate mit der Erfahrung im wesentlichen im Einklang stehen. Diese Resultate beziehen sich allerdings zunächst nur auf das erste unmittelbar nach Beginn der Bewegung einsetzende Umbildungsstadium der reinen Potentialströmung oder, konkreter gesagt, auf die Lage der Ablösungsstelle als den Ursprung der Wirbelbildung. Über den Zusammenhang des mittleren Kielwasserstromes mit der Form des sich gleichmäßig bewegenden Körpers vermag die Theorie nichts auszusagen, weil sie im Grunde nur die Vorgänge in der laminaren Grenzschicht zu erfassen vermag. Und eine solche Aussage wäre für die vollständige Bestimmung des Widerstandes erforderlich. Ferner bringt die Annahme von gewöhnlicher Potentialströmung außerhalb der Grenzschicht eine Unbestimmtheit in die Theorie hinein, die den Mathematiker unbefriedigt läßt. Da nämlich die sekundär

<sup>1)</sup> Vgl. auch O. E. Meyer, Pogg. Ann. 113 (1861), S. 74 f.



mit der Grenzschicht verbundene Wirbelbildung, insbesondere hinter der Ablösungsstelle, auch die Verteilung der Geschwindigkeiten und Drucke im Potentialgebiet beeinflussen wird, so müßte man, um den wirklichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, ein neues Potentialfeld einführen, das einer im hinteren (an der Ablösungsstelle beginnenden) Teil veränderten Kontur entspricht, bzw. ein durch Potentialwirbel ergänztes Feld substituieren. Durch diese Ergänzung würde aber zugleich die Ablösungsstelle eine Verschiebung erfahren, so daß schließlich die widerstandstheoretische Frage darauf hinausliefe zu entscheiden, ob die Reihe der auf diese Weise auseinander entwickelten Zustände einem mittleren quasistationären Grenzzustand zustrebt, der z. B. für den Formwiderstand der Körperkontur allein entscheidend sein würde. Daß die Einsetzung eines versuchsmäßig gefundenen Druckverlaufes in die Grenzschichtgleichung, wie es gelegentlich zwecks Vergleich der so ermittelten Ablösungsstelle mit der Erfahrung versucht wurde, keinen wirklichen theoretischen Fortschritt bedeutet, liegt auf der Hand.

Es bleibt daher das bisher noch nicht endgültig gelöste Problem bestehen, die Widerstandsbestimmung auf Grundlage der vollständigen Randwertaufgabe zu behandeln, d. h. die Druckverteilung am Rande eines geschlossenen Körpers organisch aus den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen herzuleiten, und es fragt sich im besonderen, wie sich die Theorie gestaltet, wenn gleichzeitig auf die durch die Kleinheit der Reibung gekennzeichneten Grenzschichtverhältnisse Rücksicht genommen wird. Mathematisch muß man von dem Eingeständnis seinen Ausgang nehmen, daß die ungekürzte Bewegungsgleichung (vgl. § 4)

$$(1) \quad -\mathcal{F}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \nu \mathcal{A} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

bisher noch nicht soweit gelöst werden konnte, daß man hoffen darf, besondere Randwertbedingungen zu erfüllen. Wenn man in dieser Gleichung  $\text{rot } \mathbf{v} = 2 \mathbf{w} = 0$  setzt, so entsteht die Eulersche Gleichung der reibungslosen Bewegung. Eine reibungsbehaftete Strömung ohne Wirbelbildung ist daher nicht möglich. Wenn man dagegen  $\mu = 0$  setzt, so bleibt trotzdem noch ein Wirbelglied übrig. Die durch die Gleichung beherrschten reibungsfreien Bewegungen mit Wirbelgebieten lassen sich auf synthetischem Wege in beliebiger Zahl konstruieren, wenn man auf die Bedingung des Haftens an der Körperoberfläche verzichtet. So kann man z. B. mit Hilfe des Spiegelungsprinzips eine ideale Strömung um eine Kreiskontur herstellen, die einzelne Wirbel enthält, und es ist auch möglich, den Einfluß dieser Wirbel auf den theoretischen Widerstand genau anzugeben. Aber trotz der erreichbaren Annäherung an die wirk-



lichen Kraftverhältnisse und trotz mancher Beweiskraft im einzelnen kann diese konstruktive Methode nicht als Widerstandstheorie gewertet werden, weil sie willkürlich bleibt und keine zwingenden Folgerungen aus den Grundgleichungen verarbeitet, ganz abgesehen von dem Widerspruch mit der physikalischen Erfahrung.

Weit vollständiger und mehr nach allgemeinen Gesichtspunkten ist die Bewegungsgleichung zu behandeln, falls man unter der Voraussetzung schwacher Wirbelung das quadratische Glied  $\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}$  streicht. Wenn der Körper sich in der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit  $u_0$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse bewegt, so erhält man die Strömungsgleichung

$$(2) \quad -\mathcal{F} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + u_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \nu \Delta \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

in der wir zum Unterschied gegen früher das Glied  $v^2$  beibehalten wollen, also  $\frac{p}{\rho}$  durch  $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$  ersetzen. Wir wollen sie die erweiterte Oseensche Gleichung nennen. Diese Gleichung hat nun eine bemerkenswerte Eigenschaft, die Oseen veranlaßte, den Grenzübergang zu kleiner Reibung oder großer Reynoldsscher Zahl nicht an der Differentialgleichung, sondern an der allgemein angebbaren Lösung durchzuführen. Da wegen

$$\mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \Delta \mathbf{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

wird, so ergibt sich, daß jede der beiden in (2) ausgeführten Substitutionen  $\mu=0$  und  $\mathbf{v}=0$  zu demselben Ergebnis führt. In beiden Fällen nämlich geht die Gleichung in die Eulersche Gleichung für die reibungslose Flüssigkeit über. Wenn man also von vornherein in der Gleichung (2)  $\mu=0$  setzt, so kann der Fall, daß  $\mu$  sich der Null nähert und doch Rotation in der Flüssigkeit vorhanden ist, keine Berücksichtigung mehr finden, und gerade dieser Fall ist der eigentlich entscheidende. Diese zunächst mathematische Erwägung wird ferner gestützt durch das grundlegende Resultat der Grenzschichttheorie, das sich in den bereits früher ausgesprochenen Satz zusammenfassen läßt, daß die Abweichung von der reibungslosen Strömung in der Umgebung eines bewegten Körpers um so größer ausfällt, je kleiner die Reibung wird. Es erhebt sich daher die wichtige Frage, ob diese Abweichung oder, anders ausgedrückt, die für das Auftreten eines Widerstandes maßgebende Unsymmetrie der Strömung aus der Lösung der Differentialgleichung (2) auch mathematisch erschlossen werden kann. Die Untersuchungen von Oseen<sup>1)</sup>, die von dieser Frage ihren Ausgang nehmen, bestätigen nun in überraschender

<sup>1)</sup> Vgl. C. W. Oseen, Hydrodynamik, S. 211 ff.; ferner Beiträge zur Hydrodynamik, Annalen d. Physik, Bd. 46, 1915, S. 231, 623, 1130; Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck), Berlin 1924, S. 123—135.

Weise die anfängliche Erwartung und führen in der Tat zu einer „asymptotischen“ Lösung der Differentialgleichung, die sich wesentlich unterscheidet von der Lösung der mit  $\mu = 0$  gebildeten Eulerschen Gleichung.

## § 72. Die asymptotische Lösung von Oseen.

Im Hinblick auf den Zweck dieser Einführung und auf die ausführliche Darstellung, die Oseen selbst von seiner Theorie in einem Bande dieser Sammlung gegeben hat, wollen wir hier auf die allgemeinen Entwicklungen und die strenge Durchführung des Grenzüberganges zu verschwindender Reibung verzichten und uns auf eine einfache spezielle Darstellung, in der das Anschauliche und das Physikalische der Theorie deutlicher zutage tritt, beschränken.

Wenn wir dabei die Grundgleichung

$$(1) \quad -Fq + \nu \mathcal{A} \mathbf{v} + u_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

bzw. mit  $k = \frac{u_0}{2\nu}$  die Gleichung

$$(1a) \quad \left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho\nu} Fq; \quad \left( q = p + \frac{\rho}{2} v^2 \right)$$

zugrunde legen und ebene Verhältnisse voraussetzen, so können wir an die frühere Betrachtung anknüpfen (§ 35), die sich auf kleine Reynoldssche Zahlen bezog. Ersetzen wir  $p$  durch  $q$ , so kann die dort gefundene Lösung auch hier verwendet werden. Wir hatten die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  der Störungsströmung in der Umgebung des gleichmäßig sich bewegenden zylindrischen Körpers in der Form dargestellt

$$(2) \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad q = \rho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

wobei die Funktionen  $\Phi$  und  $\chi$  den Differentialgleichungen

$$(3) \quad \mathcal{A} \Phi = 0, \quad \left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi = 0$$

genügen. Wenn man den Rotor der beiden Seiten der ursprünglichen Differentialgleichung (1a) bildet, so ergibt sich

$$(4) \quad \left( \mathcal{A} + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) w = 0.$$

Die Wirbelfunktion  $w = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$  genügt also formal derselben Differentialgleichung wie die Funktion  $\chi$ . Um das Wesen der asymptotischen Strömung zu zeigen, erscheint es zweckmäßig, nach dem Vorgang von F. Noether<sup>1)</sup> und Fr. Eisner<sup>2)</sup> zunächst die Wirbelverteilung ins

<sup>1)</sup> F. Noether, Integrationsprobleme der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. 5, S. 786.

<sup>2)</sup> Fr. Eisner, Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern, Berlin 1929, S. 50f.

Auge zu fassen. Mit Rücksicht auf das Verschwinden im Unendlichen können wir, wie oben dargelegt wurde, eine partikuläre Lösung in der Form angeben

$$(5) \quad w = c e^{-kx} \cdot K_0(kr),$$

wo  $K_0$  die bekannte Hankelsche Funktion nullter Ordnung darstellt.

Wie man sieht, hat  $w$  nur im Punkt  $r = 0$  eine logarithmische Singularität. Ferner verhalten sich die  $w$ -Werte an zwei symmetrisch zur  $y$ -Achse gelegenen Punkten wie  $1 : e^{2kx}$ . Es wird sich nun weiterhin ergeben, daß die dadurch zum Ausdruck kommende Unsymmetrie in bezug auf die  $y$ -Achse im Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  sich dahin verstärkt, daß nur der „Stromschatten“ hinter dem Körper Rotation enthält, während das übrige Gebiet wirbelfrei ist. Bevor wir dieses asymptotische Verhalten an der Lösung von (4) aufzeigen, wollen wir eine Folgerung aus der Gleichung (1) ziehen unter der Voraussetzung, daß  $k$  gegen  $\infty$  und  $\mu$  gegen Null gehen. Wenn dann  $\Delta v$  nicht unendlich groß wird, also keine Singularität im Stromfeld vorhanden ist, so erhält man für die Wirbelfunktion die Grenzeigenschaft

$$(6) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Der Rotor oder die Wirbelstärke wird also auf Parallelen zur  $x$ -Achse denselben Wert besitzen; die Wirbelkonvektion trägt demnach einen rein translatorischen Charakter. Da aber weder im Unendlichen noch in der Strömung, vielmehr nur an der Oberfläche des zylindrischen Körpers Wirbel entstehen können, so ergibt sich, daß Rotation nur innerhalb desjenigen Gebietes vorhanden sein kann, das von den beiden an die Kontur gelegten Endtangentialen parallel zur Translationsgeschwindigkeit begrenzt wird. Wir können nun den allgemeinen Ausdruck für die Wirbelverteilung aus dem partikulären Ansatz (5) dadurch gewinnen, daß wir an Stelle von  $x$  und  $r$  schreiben  $x - x_0$  und  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  und mit Einführung einer Belegungsfunktion  $\gamma(x_0 y_0)$  das längs der Berandung  $(x_0 y_0)$  erstreckte Integral bilden

$$(7) \quad w = C \int \gamma(x_0 y_0) e^{-k(x - x_0)} \cdot K_0(kr) ds_0,$$

wo noch der konstante Faktor  $C$  aus Dimensionsgründen hinzugefügt ist.

Der an diesem Ausdruck durchgeführte Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  wird die in bezug auf die Wirbelverteilung ausgesprochene Vermutung durchaus bestätigen.

Nun ist bekannt, daß für sehr große Werte  $k$ , also große Reynoldssche Zahlen, die asymptotische Beziehung gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_0(kr) \Big/ \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{-kr} \right\} = 1.$$

Wir können daher bei kleiner Reibung statt des Ausdruckes (7) setzen

$$(8) \quad w = C' \int \gamma(x_0 y_0) \sqrt{\frac{k}{r}} e^{-k(x-x_0+r)} ds_0.$$

Wenn man mit  $l$  irgendeine Längenabmessung des Profils bezeichnet, so kann man mit Einführung der Reynoldsschen Zahl  $\Re$  auch schreiben

$$(8a) \quad w = C'' \int \gamma(x_0 y_0) \sqrt{\frac{\Re}{r}} e^{-\frac{\Re}{l}(x-x_0+r)} ds_0.$$

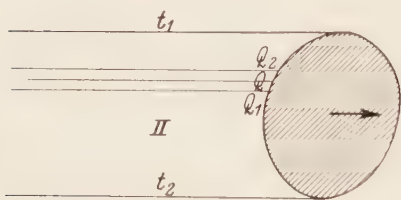
Da sich nun  $x_0$  auf einen Punkt  $Q$  des Randes bezieht, so gilt in jedem Falle

$$x - x_0 + r \geq 0,$$

während für alle Punkte  $P$  in dem Gebiete I außerhalb der Kontur und des von den Endtangenten  $t_1$  und  $t_2$  begrenzten und nach hinten (gegen die Bewegungsrichtung) sich erstreckenden Streifens II  $x - x_0 + r > 0$  ist. Da unter dieser Voraussetzung

$$\lim_{\Re \rightarrow \infty} \sqrt{\Re} \cdot e^{-\frac{\Re}{l}(x-x_0+r)} = 0$$

wird, so sieht man, daß die Rotation im gesamten Gebiete I verschwindet. Wenn dagegen der Punkt  $P$  im Gebiet II auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse durch den



I Randpunkt  $Q$  liegt, so wird  $x - x_0 + r = 0$ , und umgekehrt kann dieser Gleichung nur ein Punkt in II entsprechen. Nur für Punkte dieser Art wird daher das Integral einen von Null verschiedenen Wert annehmen, und man sieht auch, daß es genügt, das Integral zwischen zwei Punkten

Abb. 88. Zur Theorie des asymptotischen Widerstandes.

$Q_1$  und  $Q_2$  zu berechnen, die beiderseits, d. h. unterhalb und oberhalb von  $Q$  auf zwei um die kleine Größe  $\varepsilon$  von  $Q$  abstehenden Parallelen zur  $x$ -Achse liegen. Man erhält also

$$w \propto \sqrt{\Re} \int_{Q_1}^{Q_2} \gamma(x_0 y_0) e^{-\frac{\Re}{l}(x-x+r_0)} \frac{ds_0}{\sqrt{r}},$$

wobei  $\varepsilon$  gegen Null konvergieren soll. Benutzt man nun die Entwicklungen

$$r \infty |x - x_0| + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{|x - x_0|},$$

$$\sqrt{r} \infty \sqrt{|x - x_0|} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{(y - y_0)^2}{(x - x_0)^2} + \dots \right],$$

$$e^{-\frac{\Re}{l}(x - x_0 + r)} = e^{-\frac{\Re}{2l} \frac{(y - y_0)^2}{|x - x_0|}},$$

wo im Kielwassergebiet  $x - x_0 = -|x - x_0|$  zu setzen ist, und berücksichtigt, daß bei der Integration  $\gamma(x_0, y_0)$  und  $(x - x_0)$  als konstant angesehen werden können, so ergibt sich

$$w \infty \sqrt{\frac{\Re}{(x - x_0)^2}} \cdot \gamma(x_0, y_0) \int_{y - \varepsilon}^{y + \varepsilon} e^{-\frac{\Re}{2l} \frac{(y - y_0)^2}{|x - x_0|}} \cdot \frac{dy}{\cos(s_0, y_0)}.$$

Setzt man  $\frac{\Re}{2l} \frac{(y - y_0)^2}{|x - x_0|} = q^2$ , so hat man das transformierte Integral zwischen den Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  zu nehmen, wenn  $\Re$  über alle Grenzen wächst. Mit

$$dy = dq \sqrt{\frac{2l|x - x_0|}{\Re}}$$

erhalten wir also

$$w \infty \frac{\sqrt{2} \cdot \gamma(x_0, y_0)}{\cos(s_0, y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq.$$

Da das Integral, das wir bereits früher benutzt haben, den Wert  $\sqrt{\pi}$  hat, so kommt

$$(9) \quad w \infty \frac{\sqrt{2} \pi \gamma(x_0, y_0)}{\cos(s_0, y_0)}.$$

Das Resultat unserer Betrachtung läßt sich also dahin zusammenfassen, daß die Elementarrotation der Flüssigkeit außerhalb des oben definierten idealen Kielwassergebietes verschwindet, während sie im Kielwassergebiet einen nur von  $y$  abhängigen, d. h. auf je einer Parallelen zur Bewegungsgeschwindigkeit unveränderlichen, Wert hat, der im Innern endlich ist und an der Kielwassergrenze unbegrenzt groß wird. Wir haben also außerhalb des Kielwassers eine gewöhnliche, aus einem Potential ableitbare reibungslose Strömung, die daher naturgemäß am vorderen Rand der Kontur gleitet, während das Kielwassergebiet kontinuierlich mit Elementarrotation behaftet ist und die Eigenschaften einer zähen Strömung zeigt, von der wir also insbesondere Haften voraussetzen können. Nach den Ansätzen (2) muß also außerhalb des Kielwassers die Funktion  $\chi(y)$  verschwinden. Das läßt sich aber auch direkt in derselben Weise zeigen, wie oben das Verschwinden der Rotation abgeleitet



wurde, da  $\chi$  derselben Differentialgleichung genügt wie  $w$ , also denselben funktionentheoretischen Charakter zeigt, d. h. durch ein Integral von der Art (7) darstellbar ist. Im Kielwassergebiet ergibt sich die Wirbel-funktion  $w$  als Ableitung der „Kielwasserfunktion“  $\chi$  zu

$$(10) \quad w = -\frac{1}{2} \frac{d\chi}{dy}.$$

Wenn wir für die in (2) auftretende Potentialfunktion  $\Phi + \frac{1}{2k} \chi(k \rightarrow \infty)$  wieder  $\Phi$  setzen, so haben wir im Gebiet I

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

im Kielwassergebiet II dagegen

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \chi, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Die Potentialfunktion  $\Phi$  bzw. das entsprechende komplexe Potential oder die komplexe Geschwindigkeit, die wir mit  $V = v_1 - i v_2$  bezeichnen wollen, ist jetzt eindeutig im ganzen Gebiet außerhalb der geschlossenen Kontur festgelegt, wenn wir verlangen, daß am vorderen Rand  $C_1$  der Kontur die Randbedingungen zweiter Art erfüllt sind, d. h.

$$v_1 \cos(nx) + v_2 \cos(ny) = u_0 \cos(nx)$$

gilt, am hinteren Rand dagegen die Geschwindigkeit  $v_2$  verschwindet, während im Unendlichen  $v_1 = v_2 = 0$  wird. Die erste Bedingung ist bereits die endgültige „vordere“ Randbedingung für die resultierende Strömung, die im Gebiet I mit der Potentialströmung identisch ist

$$v_x = v_1, \quad v_y = v_2.$$

Die zweite Bedingung dagegen liefert erst durch Vermittelung der zusätzlichen Funktion  $\chi(y)$  die endgültige hintere Randbedingung

$$v_y = 0, \quad v_x = u_0.$$

Da längs  $C_h$

$$u_0 = (v_x)_h = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_h + \chi(y)$$

gilt, so ergibt sich

$$(11) \quad \chi(y) = u_0 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_h = u_0 - (v_1)_h.$$

Wenn wir also die Potentialfunktion  $\Phi$  im ganzen Außengebiet kennen, bzw. die Geschwindigkeitswerte

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$



so ist die Strömung im Kielwassergebiet als Überlagerung der Potentialströmung und der (inhomogenen) Parallelströmung  $v_k = \chi(y)$  von der Form

$$(12) \quad \begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_h = v_1 + u_0 - (v_1)_h, \\ v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_2. \end{cases}$$

Man sieht in der Tat, daß diese Geschwindigkeiten der Störungsbewegung des Zylinders  $C$  entsprechen, die gleichzeitig die Eigenschaft hat, am hinteren Rande zu haften.

Indem wir uns die genaue Ermittlung des Stromfeldes für einige einfache Fälle für die nächsten Paragraphen vorbehalten, wollen wir hier nur die einleitenden allgemeinen Gesichtspunkte durch einige Bemerkungen ergänzen, die sich insbesondere auf den Vergleich mit der Prandtlschen Theorie beziehen. Während Prandtl von der ersten Entstehung der Kielwasserwirbel aus der Grenzschicht ausgeht, gibt Oseen mit seiner Lösung gleichsam das letzte Resultat in einem extremen, physikalisch nicht mehr realisierbaren Grenzfall: der Ablösungspunkt der Strömung, wenn man ihn so nennen darf, rückt in der Grenze in den höchsten und tiefsten Punkt des Profils, also dahin, wo im Falle der idealen Strömung das Druckminimum liegt; die ganze Grenzschicht ist auf die Rückseite gedrängt und bildet hier mit dem Kielwasser eine Einheit. Man muß aber bei dieser Gegenüberstellung im Auge behalten, daß man an die Oseensche Theorie keinen strengen physikalischen Maßstab anlegen darf. Die Prandtlsche Hydrodynamik hat ihren Ursprung in einem physikalischen, auf Versuche gegründeten Gedanken, der einer vollständig befriedigenden theoretischen Bearbeitung nur sehr schwer zugänglich ist, während Oseen einen rein mathematischen Grenzübergang unter einigen nicht ganz unbedenklichen Grundvoraussetzungen durchführt. Trotz mancher Bedenken physikalischer Art ist aber das Resultat Oseens besonders insofern überraschend, als damit zum ersten Male das bekannte d'Alembertsche Paradoxon eine gewisse Aufklärung erfahren hat, und als es gelungen ist, auf mathematischem Wege der Berechnung des Formwiderstandes näherzukommen. Auch rein qualitativ findet man den theoretischen Verlauf der Strömung, wie wir noch an einem Beispiel zeigen werden, etwa durch die von F. Ahlborn für größere Reynoldssche Zahlen hergestellten Strombilder in mancher Beziehung bestätigt. Im wesentlichen zeigen die Stromlinien auch in der Wirklichkeit vor dem Körper nahezu den Charakter von Potentiallinien, und auch auf der hinteren Seite treffen sie ungefähr in Richtung der Bewegung auf den Rand und bilden erst an der Grenze des Kielwassers

größere zusammengesetzte und nicht mehr stationäre Wirbelgebilde, die natürlich von der Theorie nicht mehr erfaßt werden können.

Zur Bestätigung des Gesagten werden wir jetzt einige Folgerungen aus der Theorie ableiten, insbesondere die Druckverhältnisse näher untersuchen und dann für einige bemerkenswerte Spezialfälle das asymptotische Stromfeld wirklich aufbauen und die Widerstandsberechnung numerisch durchführen.

### § 73. Allgemeine Formeln für die Berechnung der Kräfte.

Die Druckkräfte am Profilrand sind bis auf eine Konstante durch die dritte der Gleichungen (2) des § 72 bekannt. Da das Geschwindigkeitsquadrat am vorderen Rand  $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ , am hinteren Rand  $v^2 = u_0^2$  ist, so haben wir bis auf eine additive Konstante

$$(1) \quad \begin{cases} p_v = \rho u_0 v_1 - \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2), \\ p_h = \rho u_0 v_1 - \frac{1}{2} \rho u_0^2 = p_v - \frac{1}{2} \rho (u_0^2 - v_1^2 - v_2^2). \end{cases}$$

Die erste Beziehung stimmt im wesentlichen mit der Bernoullischen Gleichung überein. Wenn man nämlich der Potentialströmung die Parallelströmung  $v_j = -u_0$  überlagert, so erhält man die Relativströmung um die Kontur, der die Geschwindigkeitswerte entsprechen

$$\begin{aligned} v'_x &= v_1 - u_0, \\ v'_y &= v_2. \end{aligned}$$

Wir haben daher

$$v'^2 = v_1^2 + v_2^2 + u_0^2 - 2u_0 v_1,$$

mithin auf Grund der Bernoullischen Gleichung

$$p_v + \frac{1}{2} \rho v'^2 = p_v + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2) - \rho u_0 v_1 = \text{const.}$$

Bemerkenswert ist, daß der Druck nach dieser vorläufigen Bestimmung beim Übergang in das Kielwassergebiet einen endlichen Sprung macht. Andererseits muß bemerkt werden, daß die aus den linearisierten Gleichungen resultierende Druckbestimmung nicht eindeutig ist. Man könnte daher, um einen stetigen Übergang in das Kielwassergebiet zu erzielen, eine additive Konstante hinzufügen. Setzen wir etwa

$$p_h = \rho u_0 v_1 - \frac{1}{2} k \rho u_0^2,$$

so ist  $k$  so zu bestimmen, daß an der Übergangsstelle ( $v = v_g$ )

$$k u_0^2 = (v_1^2 + v_2^2)_g = v_g^2$$

wird, woraus

$$k = \frac{v_g^2}{u_0^2}$$

folgt. Wir werden zunächst die Kräftebestimmung ohne Rücksicht auf diese Konstante durchführen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Vgl. C. W. Oseen, Hydrodynamik, S. 292 ff.

Dann erhält man für die Druckresultierende in der  $x$ -Richtung, wenn  $C$  die Kontur,  $C_v$  den vorderen und  $C_h$  den hinteren Rand bezeichnet,

$$P_x = - \oint_C p_v dy + \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} (u_0^2 - v_1^2) dy,$$

da  $v_2$  längs  $C_h$  verschwindet. Wenn wir

$$J = \rho \int_C v_1 (v_1 dy - v_2 dx) = \rho \int_C v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

subtrahieren und addieren, so kommt

$$P_x = - \rho u_0 \int_C v_1 dy + \rho \int_C v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + R \frac{i \rho}{2} \int_C (v_1 - i v_2)^2 dz + \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} (u_0^2 - v_1^2) dy,$$

wobei  $R$  den Realteil des nachfolgenden Ausdrucks bedeutet.

Der dritte Ausdruck verschwindet, da  $v_1 - i v_2$  eine außerhalb  $C$  reguläre Funktion von  $z$  ist. Beachten wir ferner, daß  $\frac{d\Phi}{dn}$  längs  $C_v$  durch  $u_0 \cos(nx)$  zu ersetzen ist und daß  $v_2$  längs  $C_h$  verschwindet, so heben sich sämtliche längs  $C_v$  erstreckten Integrale auf, und es bleibt schließlich mit  $dz > 0$

$$(2) \quad P_x = - \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} (u_0 - v_1)^2 dy.$$

Es entsteht also jedenfalls nur ein positiver Widerstand. Daß er wesentlich von der Energie der Wirbelschlepe abhängt, sieht man sofort, wenn man berücksichtigt, daß

$$u_0 - (v_1)_h = \chi(y).$$

Es ergibt sich also der Ausdruck

$$(2a) \quad P_x = - \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} \chi^2 dy.$$

Der Widerstand ist also verhältnismäßig dem über den Querschnitt des Kielwassers erstreckten Integral des Quadrats der Kielwasserfunktion  $\chi(y)$ .

In derselben Weise kann man den „Auftrieb“, d. h. die senkrecht zur Bewegung gerichtete Druckkomponente, berechnen. Man hat zunächst

$$P_y = - \oint_C p_v ds \cos(ny) = - \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} (u_0^2 - v_1^2) dx.$$

Addiert und subtrahiert man

$$\rho \int v_2 (v_2 dx - v_1 dy) = - \rho \int v_2 \frac{d\Phi}{dn} ds,$$

so ergibt sich, wenn man wieder bedenkt, daß

$$\oint (v_1 - i v_2)^2 dz = 0$$

wird, und wenn man die Zirkulation

$$\oint (v_1 dx + v_2 dy) = \Gamma$$

einführt,

$$(3) \quad P_y = \rho u_0 \Gamma - \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} (u_0^2 - v_1^2) dx.$$

Der erste Bestandteil ist der Joukowskysche, mit der Zirkulation  $\Gamma$  und der Geschwindigkeit  $u_0$  verhältnismäßige Auftrieb. Der zweite Bestandteil rührt von der Saugwirkung im Kielwassergebiet her. Er läßt sich wieder durch die charakteristische Funktion  $\chi(y)$  darstellen. Denn wir haben auf der Rückseite der Kontur

$$u_0^2 - v_1^2 = (u_0 - v_1)(u_0 + v_1) = \chi(y)[2u_0 - \chi(y)];$$

setzen wir also  $dx = \frac{dy}{y'}$ , so erhalten wir

$$(3a) \quad P_y = \rho u_0 \Gamma - \rho u_0 \int_{C_h} \frac{\chi(y) dy}{y'(y)} + \frac{1}{2} \rho \int_{C_h} \chi^2(y) \frac{dy}{y'(y)}.$$

Die beiden letzten Integrale erhalten besonders dann eine einfache Form, wenn  $y'$  konstant ist, d. h. im Falle der ebenen Platte.

Hat der zylindrische Querschnitt oder die Kontur eine zur Bewegungsrichtung parallele Symmetrielinie, die dann als  $x$ -Achse angesehen werden kann, so verschwinden offenbar sämtliche Ausdrücke auf der rechten Seite, also auch die resultierende Seitenkraft.

## § 74. Charakterisierung des asymptotischen Potentialproblems. Das Poissonsche Integral.

Unsere nächste Aufgabe wird darin bestehen, das im § 72 charakterisierte Potential für einige Spezialfälle wirklich aufzustellen. Wie bei der gewöhnlichen Potentialströmung läuft die dabei anzuwendende Methode darauf hinaus, das außerhalb der Kontur  $C = C'_i + C'_h$  gelegene Gebiet der Ebene auf das Gebiet außerhalb des Einheitskreises  $z = 1$  konform abzubilden, so daß die Grenzpunkte zwischen  $C'_i$  und  $C'_h$  den beiden Punkten  $z = \pm i$  entsprechen. Es handelt sich zunächst darum, eine außerhalb  $C$  reguläre analytische Funktion

$$v_1 - i v_2 = V(z)$$

zu finden, die folgende Randbedingungen erfüllt:

$$(1) \quad \begin{cases} 1) \text{ an } C_v: v_1 \cos(nx) + v_2 \cos(ny) = u_0 \cos(nx) \\ 2) \text{ an } C_h: v_2 = 0 \\ 3) \text{ für } z \rightarrow \infty: v_1 = v_2 = 0. \end{cases}$$

Durch eine konforme Abbildung der geschilderten Art können dabei die Richtungskosinus als Funktion der Kreispunkte  $e^{i\vartheta}$ , d. h. als Funktion der Amplitude  $\vartheta$ , dargestellt werden.

Setzen wir

$$\cos(nx) = b(\vartheta), \quad \cos(ny) = a(\vartheta), \quad u_0 \cos(nx) = c(\vartheta)$$

und führen statt  $v_1 - i v_2$  die mit  $i$  multiplizierte Funktion

$$i(v_1 - i v_2) = v_2 + i v_1 = F(z) = A + i B$$

ein, so kann die Potentialaufgabe jetzt folgendermaßen formuliert werden: Gesucht ist eine außerhalb des Kreises  $z = 1$  reguläre analytische Funktion  $F(z) = A + i B$ , die auf dem Kreisrand der Bedingung genügt

$$(1a) \quad a(\vartheta)A(\vartheta) + b(\vartheta)B(\vartheta) = c(\vartheta),$$

wobei für  $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$  die Größen  $a, b$  und  $c$  die Bedeutung (2) haben,

ferner für  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$  die Beziehungen

$$a(\vartheta) = 1, \quad b(\vartheta) = c(\vartheta) = 0$$

gelten, während im Unendlichen  $A$  und  $B$  verschwinden.

Dieses Randwertproblem läßt sich auf folgende Hilfsaufgabe zurückführen. Es soll eine analytische Funktion gesucht werden, die innerhalb bzw. außerhalb des Einheitskreises regulär ist, und deren Realteil bzw. Imaginärteil auf dem Kreis bestimmte Werte annimmt<sup>1)</sup>.

Wir setzen für die Funktion eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots = \sum (\alpha_n + i \beta_n) z^n$$

an, die für  $|z| < 1$  konvergieren möge, und lassen die Möglichkeit zu, daß  $f(z)$  auf dem Kreise Unstetigkeitsstellen besitzt. Dann wird mit

$$z = e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

$$f(e^{i\vartheta}) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) + i \left[ \beta_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_n \sin n\vartheta + \beta_n \cos n\vartheta) \right].$$

Ist nun der Realteil  $\varphi(\vartheta)$  gegeben, so haben wir bekanntlich für die Koeffizienten dieser Entwicklung die Beziehungen

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta,$$

$$\beta_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta,$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa H. Villat, Leçons sur L'Hydrodynamique, Paris 1929, S. 9—12.

daher

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) d\vartheta + i\beta_0; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta.$$

Die Funktion  $f(z)$  kann daher in der Form dargestellt werden

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sum_1^{\infty} z^n e^{-in\vartheta} d\vartheta.$$

Für  $|z| < 1$  hat man aber

$$\sum_1^{\infty} z^n e^{-in\vartheta} = \frac{ze^{-i\vartheta}}{1 - ze^{-i\vartheta}},$$

also

$$(2) \quad f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \frac{1 + ze^{-i\vartheta}}{1 - ze^{-i\vartheta}} d\vartheta.$$

Die im Innern des Kreises definierte Funktion  $f(z)$  ist also durch den festgelegten Verlauf des Realteiles auf dem Kreis bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt. Wenn  $\varphi$  denselben Wert annimmt für zwei in bezug auf die reelle Achse symmetrische Punkte, so ergibt sich das Poissonsche Integral<sup>1)</sup>

$$(2a) \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\vartheta) \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \vartheta + z^2} d\vartheta.$$

Um die entsprechenden Sätze zunächst formal für den Fall aufzustellen, daß die Funktion im Gebiet außerhalb  $K$  regulär ist, können wir den reziproken Wert von  $z$  als neue Variable  $z' = \frac{1}{z}$  einführen und  $-\vartheta'$  statt  $\vartheta$  setzen. Wir erhalten dann in

$$(3) \quad F(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta') \frac{1 + ze^{-i\vartheta'}}{1 - ze^{-i\vartheta'}} d\vartheta'$$

den Ausdruck für diejenige Funktion, die für  $|z| > 1$  definiert ist, und deren Realteil auf  $K$  den Wert  $\varphi(\vartheta)$  annimmt.

Multipliziert man ferner mit  $i$ , so gibt

$$(4) \quad G(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta') \frac{1 + ze^{-i\vartheta'}}{1 - ze^{-i\vartheta'}} d\vartheta'$$

diejenige Funktion  $G(z)$ , deren Imaginärteil für  $z = e^{i\vartheta}$  den Wert  $\psi(\vartheta)$  annimmt.

<sup>1)</sup> Vgl. auch Riemann-Weber-Frank-v. Mises, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1, 2. Aufl. Braunschweig 1931, S. 532.



Wir werden im folgenden von der Voraussetzung ausgehen, daß die Lösung unserer Randwertaufgabe durch den Ausdruck von der Form (3) bzw. (4) darstellbar ist und verweisen im übrigen auf die einschlägige mathematische Literatur<sup>1)</sup>.

**§ 75. Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis.**

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir jetzt die gesuchte Geschwindigkeitsfunktion  $v_1 - i v_2$  für den Kreiszyylinder aufbauen. Zunächst bilden wir eine Funktion  $G(z)$ , deren Imaginärteil auf dem vorderen Rand  $C_r$  des Kreises den Wert

$$(1) \quad i\psi = -\frac{1}{2} \lg \frac{a - ib}{a + ib} = -\frac{1}{2} \lg \frac{\sin \vartheta - i \cos \vartheta}{\sin \vartheta + i \cos \vartheta} = -\frac{1}{2} \lg(-e^{2i\vartheta}) = i\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

annimmt, während längs des Hinterrandes  $\psi(\vartheta) = 0$  sein möge. Dann erhalten wir nach § 74, (4)

$$(2) \quad G(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right) \frac{1 + ze^{-i\vartheta'}}{1 - ze^{-i\vartheta'}} d\vartheta' = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right) \left(\frac{1}{z'} - z - \frac{1}{2z'}\right) dz'.$$

Setzt man  $z = e^{i\vartheta}$ , so findet man für den Realteil dieser Funktion

$$(3) \quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'\right) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} d\vartheta'.$$

Nun ist

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} d\vartheta' = 2 \lg \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

Daher erhalten wir

$$(3a) \quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2} \lg \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \vartheta' \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} d\vartheta'.$$

Führen wir die transzendente Funktion

$$f(\tau) = \int_0^{\tau} \tau \operatorname{ctg} \tau d\tau$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. Villat, a. a. O., und H. Schmidt, Aerodynamik des Fluges, Leipzig 1929, S. 88 ff.

ein, so läßt sich der Ausdruck für  $\varphi(\vartheta)$  auf die Form bringen

$$(3b) \quad \varphi(\vartheta) = \left( \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{\pi} \right) \lg \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{\pi} \left[ f \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) + f \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) \right].$$

Bilden wir jetzt die Funktion

$$I(z) = e^{Gz},$$

so sieht man, daß  $I(z)$  auf dem Randteil  $C_v$  des Kreises die Werte annimmt

$$I(e^{i\vartheta}) = e^{\varphi + i \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta \right)} = i e^{\varphi - i\vartheta},$$

also die mit  $i$  multiplizierte Funktion  $iI$  die Werte  $-e^{\varphi - i\vartheta}$ . Setzen wir  $iI = A_0 + iB_0$ , so genügen  $A_0 = -e^{\varphi} \cos \vartheta$  und  $B_0 = e^{\varphi} \sin \vartheta$  im Intervall  $\frac{\pi}{2} > \vartheta > +\frac{\pi}{2}$  der Relation

$$aA_0 + bB_0 = 0.$$

Für den Randteil  $C_h$ , d. h. für  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$ , nimmt  $I$  dagegen den Wert  $e^{\varphi}$  an, oder es wird hier  $A_0 = 0$ .

Um die Lösung der homogenen Relation

$$(4) \quad aA_0 + bB_0 = 0$$

zu erweitern, kann man  $iI$  mit einer Funktion  $H(z)$  multiplizieren, die die Eigenschaft hat, auf  $K$  reell zu sein. Wenn  $H$  auf  $K$  stetig ist und der Imaginärteil überall verschwindet, so reduziert sich  $H$  auf eine Konstante. Dieser Schluß ist dagegen ungültig, wenn eine Diskontinuität vorhanden ist. Verlegen wir diese in den Punkt  $z = -i$ , so können wir die konforme Abbildung

$$\zeta = i \frac{z - i}{z + i} = r_1 e^{i \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \varphi_2 \right)}$$

ausführen, durch die das Äußere des Kreises auf die positive  $\zeta$ -Halbebene und der Kreis selbst auf die reelle Achse abgebildet wird. Denn für einen Punkt des Kreises ist  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ . Eine analytische Funktion von  $\zeta$

$$K(\zeta) = K \left( i \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right) = H(z)$$

hat dann in der Tat die Eigenschaft, für die Kreispunkte reelle Werte zu geben.

Dann genügt aber die Funktion

$$iI(z) \cdot H(z)$$

der homogenen Relation (4).

Die verlangte Lösung der inhomogenen Gleichung  $Aa + Bb = c$  gewinnen wir nun, wenn wir zu der Lösung der homogenen Gleichung eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung hinzufügen, in der Form

$$F_1 + i\Gamma \cdot H.$$

Eine solche Lösung der inhomogenen Gleichung ist aber, wie man sofort erkennt,

$$F_1 = iu_0.$$

Wenn wir jetzt noch

$$H(z) = k_1 + ik_2 \frac{z-i}{z+i}$$

setzen, so haben wir nach Division mit  $i$  als Ausdruck für die komplexe Geschwindigkeit der gesuchten Potentialströmung

$$V = v_1 - iv_2 = u_0 + e^{G(z)} \left( k_1 + ik_2 i \frac{z-i}{z+i} \right),$$

der nur noch der Bedingung im Unendlichen angepaßt werden muß. Nun ist aber

$$G(\infty) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \mathcal{G}' - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dz'}{z'} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \mathcal{G}' - \frac{\pi}{2} \right) d\mathcal{G}' = i \frac{\pi}{4}.$$

Da  $V$  für  $z = \infty$  verschwinden muß, so ergibt sich

$$u_0 + e^{i \frac{\pi}{4}} (k_1 + ik_2) = 0$$

oder

$$k_1 + ik_2 = -\frac{u_0}{\sqrt{2}} (1-i),$$

also

$$k_1 = -\frac{u_0}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = \frac{u_0}{\sqrt{2}}.$$

Es entsteht daher die endgültige Lösung

$$(5) \quad V = v_1 - iv_2 = u_0 \left[ 1 - \frac{e^{G(z)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - i \frac{z-i}{z+i} \right) \right],$$

die zuerst von Zeilon<sup>1)</sup> unter Benutzung von Hilberts Theorie der Integralgleichungen angegeben wurde. Wenn der Radius des Kreises gleich  $a$  ist, so erhalten wir

$$(5a) \quad V = u_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{G\left(\frac{z}{a}\right)} \left( 1 - i \frac{z-a}{z+a} \right) \right].$$

Daraus läßt sich dann durch Hinzufügung der Kielwasserströmung die endgültige asymptotische Strömung konstruieren.

<sup>1)</sup> N. Zeilon, On Potential Problems in the Theory of Fluid Resistance, Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Bd. I (1924), S. 27f.

## § 76. Widerstand eines Kreiszylinders.

Wenn wir unter  $G(\vartheta)$  den im vorigen Paragraphen angegebenen Realteil von  $G\left(\frac{z}{a}\right)$  verstehen und beachten, daß der Imaginärteil am vorderen Rand gleich  $i\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$  und am hinteren Rand gleich Null wird, so finden wir für den Vorderrand  $\left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$  des Kreises die komplexe Geschwindigkeit

$$(1) \quad v_1 - i v_2 = u_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \vartheta + i \cos \vartheta) e^{G(\vartheta)} \left( 1 + \frac{\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \right],$$

also

$$(1a) \quad \begin{cases} v_x = v_1 = u_0 \left[ 1 - \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{G(\vartheta)} \cdot \left( 1 - \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right], \\ v_y = v_2 = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{G(\vartheta)} \left( 1 - \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right); \end{cases}$$

für den Hinterrand  $\left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}\right)$  dagegen

$$(1b) \quad \begin{cases} v_x = u_0 \left[ 1 - \frac{e^{G(\vartheta)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \\ v_y = v_2 = 0. \end{cases}$$

Für die Kielwasserfunktion haben wir daher nach § 72, (11)

$$(2) \quad \chi(y) = u_0 - (v_1)_h = \frac{u_0}{\sqrt{2}} e^{G(\vartheta)} \left[ 1 - \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Der Widerstand kann mit Hilfe dieser Formeln und der in § 73 gegebenen allgemeinen Ausdrücke für die Drucke an  $C_v$  und  $C_h$  nur auf graphischem Wege ermittelt werden. Mit Hilfe der von Zeilon berechneten Werte für die Funktionen

$$f(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\vartheta} \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta d\vartheta \quad \text{und} \quad \operatorname{ctg} \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{G(\vartheta)}$$

erhalten wir dann die in der Tabelle 2 angegebenen Verhältniszahlen

$$\frac{v_x}{u_0}, \quad \frac{\chi}{u_0}, \quad \frac{p}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}, \quad \beta.$$

Um den an der Wirbelgrenze mit den Oseenschen Werten eingeführten unstetigen Druckverlauf zu vermeiden, hat Zeilon für den Kielwasserdruck, für den sich aus den linearisierten Gleichungen keine eindeutige Bestimmung ergibt, den Wert eingeführt

$$p_h = \rho u_0 v_x(\vartheta) - 0,086 \rho u_0^2,$$

der sich von dem früher gegebenen Oseenschen Wert nur durch eine Konstante unterscheidet. Um einen übersichtlichen Vergleich mit der

Tabelle 2.

$\vartheta^\circ$	$\frac{v_1}{u_0}$	$\frac{\chi}{u_0}$	$\beta = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}$	$\beta_{\text{korr}}$
0	1,000		1,000	1,000
9	0,954		0,914	0,914
18	0,836		0,720	0,720
27	0,635		0,358	0,358
31,5	0,512		0,120	0,120
36	0,387		-0,086	-0,086
45	0,127		-0,524	-0,524
54	-0,130		-0,948	-0,948
63	-0,344		-1,270	-1,270
72	-0,493		-1,450	-1,450
81	-0,531		1,390	1,390
90	-0,414		-1,000	-1,000
			-1,832	
99	-0,275	1,275	-1,550	-0,722
108	-0,216	1,216	-1,432	-0,604
117	-0,181	1,181	-1,362	-0,534
126	-0,159	1,159	-1,318	-0,490
135	-0,144	1,144	-1,288	-0,460
144	-0,131	1,131	-1,262	-0,434
153	-0,126	1,126	-1,252	-0,424
162	-0,120	1,120	-1,240	-0,412
180	-0,117	1,117	-1,234	-0,406

Erfahrung zu ermöglichen, haben wir in der Abb. 89 den Druckverlauf am Zylinder in Abhängigkeit von  $\vartheta$  aus verschiedenen Messungen, und zwar

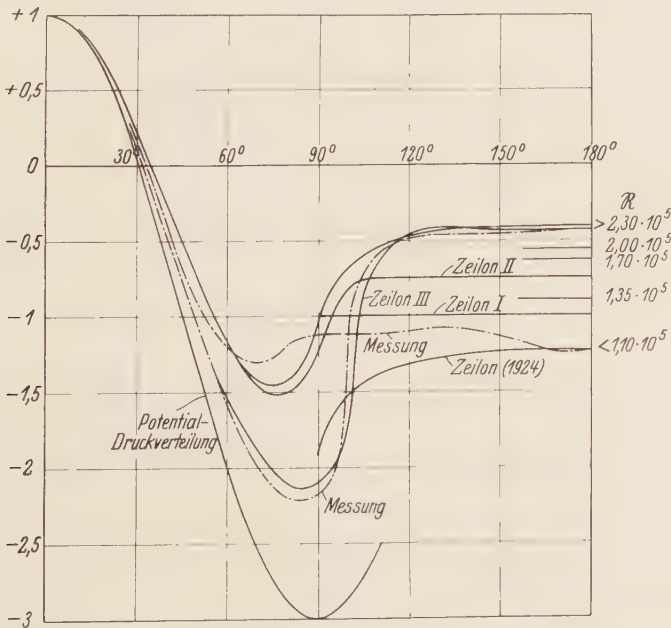


Abb. 89. Druckverteilung an der Oberfläche eines umströmten Kreiszyinders.

sowohl nach der Potential- wie nach der asymptotischen Oseenschen Theorie graphisch dargestellt. Auf die in dieser Zeichnung aufgenommenen Druckwerte, die im Anschluß an Fr. Eisner mit Zeilon I, II, III bezeichnet sind, werden wir an späterer Stelle noch zurückkommen. Ferner ist der Verlauf der versuchsmäßig bestimmten Widerstandsbeiwerte

$$c_w = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot \pi a^2}$$

in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl in logarithmischer Auftragung in der Abb. 90 wiedergegeben, und zwar für mittlere und große Reynoldssche Zahlen, nachdem bereits an früherer Stelle (§ 35, S. 132) der Bereich kleiner Reynoldsscher Zahlen berücksichtigt worden ist.

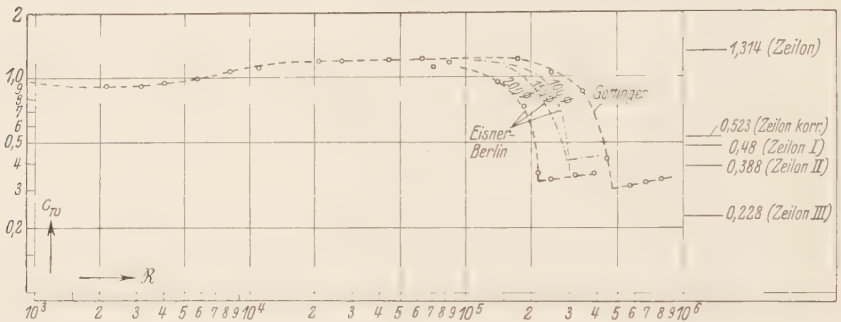


Abb. 90. Widerstandsbeiwerte eines Kreiszyinders bei mittleren und großen Reynoldsschen Zahlen.

Der Abfall der Widerstandskurve erstreckt sich von  $R = 0$  bis zu dem bei  $R = 2 \cdot 10^3$  liegenden Minimum  $c_w \approx 0,92$ , das etwa dem Wert entspricht, den v. Kármán unter der Annahme eines aus einer doppelten Wirbelstraße bestehenden Kielwassers bestimmt hat. Bis zu  $R \approx 2 \cdot 10^4$  findet dann ein Anstieg des Beiwertes bis  $c_w \approx 1,2$  statt, dem sich ein plötzlicher, etwa bei  $2 \cdot 10^5$  beginnender Abfall auf einen Wert  $c_w \approx 0,34$  anschließt. Bei weiter wachsender Reynoldsscher Zahl vergrößert sich der Beiwert langsam und angenähert linear. Wenn man bei der theoretischen Berechnung den zunächst von Oseen angenommenen unstetigen Druckverlauf zugrunde legt, so ergibt sich der Widerstandsbeiwert

$$c_{w0} = 1,314,$$

der erheblich zu groß ausfällt. Der von Zeilon auf stetigen Übergang an der Kielwassergrenze korrigierte Druckverlauf ( $\beta_{\text{KORR}}$ ) liefert den Beiwert

$$(c_{w0})_{\text{KORR}} = 0,48,$$



der bereits den für hohe Reynoldssche Zahlen gemessenen Werten sehr nahe kommt. Über die weiteren Verbesserungen, die auch von Zeilon herrühren, soll an späterer Stelle berichtet werden.

### § 77. Bewegung einer ebenen Platte.

1. Das Problem der translatorischen Bewegung einer ebenen Platte in einer Richtung, die mit der Ebene der Platte den Winkel  $\alpha$  bildet, kann durch die konforme Abbildung

$$(1) \quad z = \frac{ae^{i\alpha}}{2i} \left( Z - \frac{1}{Z} \right), \quad \frac{z - ae^{i\alpha}}{z + ae^{i\alpha}} = \left( \frac{Z - i}{Z + i} \right)^2$$

auf die entsprechende Randwertaufgabe für den Einheitskreis in der  $Z$ -Ebene zurückgeführt werden<sup>1)</sup>. Die für das erzeugende Potential maßgebende Funktion  $G$  lautet in diesem Falle nach § 75

$$(2) \quad G(Z) = \frac{\alpha - \pi}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{Z' - Z} - \frac{1}{2Z'} \right) dZ',$$

und wir erhalten daraus

$$(3) \quad \Gamma(Z) = e^{G(Z)} = i e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{Z + i}{Z - i} \right)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}.$$

Man sieht dann, daß die Funktion

$$F(Z) = iu_0 + i\Gamma(Z) \left( k_1 + ik_2 \frac{Z - i}{Z + i} \right)$$

die geforderten Randbedingungen erfüllt. Damit im Unendlichen  $F(Z)$  verschwinde, muß

$$k_1 = -u_0 \sin \frac{\alpha}{2}; \quad k_2 = u_0 \cos \frac{\alpha}{2}$$

werden. Daraus entsteht dann als komplexe Geschwindigkeit für die primäre Potentialströmung in der Umgebung der Platte, dargestellt in den Koordinaten der  $Z$ -Ebene, der Ausdruck

$$v_1 - iv_2 = u_0 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left[ \sin \frac{\alpha}{2} - i \cos \frac{\alpha}{2} \frac{Z - i}{Z + i} \right] e^{G(Z)} \right\}.$$

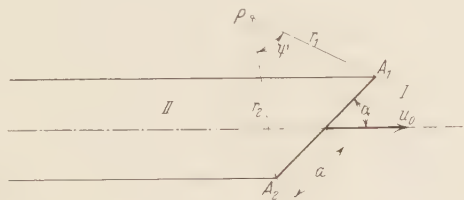


Abb. 91. Zur Theorie der Strömung um eine ebene Platte.

<sup>1)</sup> Vgl. N. Zeilon, a. a. O. S. 19f.

Wenn wir wieder  $z$  einführen, so erhalten wir

$$(4) \quad v_1 - i v_2 = u_0 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{ae^{i\alpha} - z}{ae^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{ae^{i\alpha} - z}{ae^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] \right\}$$

oder

$$(4a) \quad v_1 - i v_2 = u_0 \left\{ 1 - e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{z - ae^{i\alpha}}{z + ae^{i\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} + i \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{z - ae^{i\alpha}}{z + ae^{i\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Um das Verhalten der Geschwindigkeitsfunktion im Unendlichen zu untersuchen, entwickeln wir nach Potenzen von  $\frac{1}{z}$ . Wir erhalten dann für die ersten Glieder

$$\left( \frac{\Gamma}{u_0} \right)_{z \rightarrow \infty} = 1 - e^{-i\frac{\alpha}{2}} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{ae^{i\alpha}}{z} + \dots \right) + i \sin \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{ae^{i\alpha}}{z} + \frac{ae^{i\alpha}}{z} + \dots \right) \right].$$

Die konstanten Glieder heben sich fort, und es bleibt

$$(5) \quad \left( \frac{\Gamma}{u_0} \right)_{z \rightarrow \infty} \approx \frac{\alpha \left( \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - i\alpha \left( \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \sin \alpha \right)}{z} = \frac{A - iB}{z}.$$

Das Strömungsfeld hat also im Unendlichen den Charakter einer Spiralströmung, die als von einer Quell- und Wirbelverteilung auf der Platte erzeugt gedacht werden kann. Die Gesamtergiebigkeit der Quellen ist  $Q = 2\pi A$ , die der Wirbel  $\Gamma = 2\pi B$ . Die Zirkulation hat den normalen Drehsinn, wie er in der Tragflügeltheorie benutzt wird. Bei kleinen Anstellwinkeln  $\alpha$  nimmt die Zirkulation angenähert den Wert  $\Gamma = \pi \sin \alpha$ , also die Hälfte des von Kutta-Joukowsky benutzten Zirkulationswertes an. Da die aus den Auftriebswerten zu entnehmende wirkliche Zirkulation etwa 70%, der Kuttaschen Zirkulation ausmacht, so beträgt die von Oseen berechnete Zirkulation etwa  $\frac{5}{7}$  des wirklichen Wertes, sie kommt also der wahren Zirkulation jedenfalls um  $\frac{1}{7}$  ihres Betrages näher als der Kuttasche Wert.

Wenn der Anstellwinkel wächst, so wird auch die Zirkulation größer, bis sie bei dem Winkel  $\alpha = 40^\circ 45'$ , der der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} - \alpha$$

genügt, ihr Maximum erreicht. Von da an fällt die Zirkulation bis auf den Wert Null, der dem symmetrischen Fall  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  entspricht.

2. Um das gesamte Stromfeld zu konstruieren, können wir entweder von dem Vektorfeld der Geschwindigkeit ausgehen oder aber die Stromfunktion berechnen. Indem wir uns im allgemeinen Fall auf die erste

Methode beschränken<sup>1)</sup>, wollen wir zur Trennung der Real- und Imaginärteile die Substitution machen

$$\frac{z - a e^{i\alpha}}{z + a e^{i\alpha}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \lambda e^{i\psi},$$

wo  $\lambda$  das Verhältnis der Radienvektoren nach den Endpunkten der Plattenspur und  $\psi$  den von ihnen eingeschlossenen Winkel bedeuten. Dann erhalten wir

$$(4b) \begin{cases} \frac{v_1}{u_0} = 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \lambda^{\frac{\alpha}{2\pi}} \cos \left( \frac{\psi \cdot \alpha}{2\pi} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \lambda^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \right) \\ \frac{v_2}{u_0} = \cos \frac{\alpha}{2} \lambda^{\frac{\alpha}{2\pi}} \sin \left( \frac{\psi \cdot \alpha}{2\pi} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \lambda^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \right). \end{cases}$$

Für alle Feldpunkte, die auf der „Vorderseite“ der Platte bzw. deren Verlängerung liegen, ist  $\psi$  negativ; für alle Punkte der Kielwasserseite dagegen ist  $\psi$  positiv zu nehmen; für die Punkte der Plattenspur  $z = \pm \eta e^{i\alpha}$  wird  $\psi = 0$ . Insbesondere erhalten wir für die vorderen Randpunkte mit  $\psi = -\pi$  und  $|\eta| = \frac{|y|}{\sin \alpha} < a$

$$(4c) \begin{cases} (v_1)_r = u_0 \left[ 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] - u_0 + \cos \alpha \cdot \bar{\chi}, \\ (v_2)_v = u_0 \sin \alpha \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} - \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} \right] = u_0 \sin \alpha \cdot \bar{\chi}, \end{cases}$$

für die hinteren Randpunkte mit  $\psi = +\pi$

$$(4d) \begin{cases} (v_1)_h = u_0 \left[ 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] = u_0 - \chi, \\ (v_2)_h = 0. \end{cases}$$

Von den beiden eingeführten Funktionen bestimmt die „Kielwasserfunktion“  $\chi$  die Verteilung der Kielwasserwirbel und die „Gleitfunktion“  $\bar{\chi}$  die Gleitgeschwindigkeit der Flüssigkeit auf der Vorderseite. Die Funktion  $\chi$  hat überall positive Werte, während  $\bar{\chi}$  auf dem einen Teil der Platte positive, auf dem anderen Teil negative Werte annimmt (Abb. 92). Dem Nullpunkt der Gleitfunktion entspricht der vordere Staupunkt der Relativströmung. Ausrechnung ergibt für die Lage dieses Punktes

$$\eta = a \cos \alpha.$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (4b) haben wir nun für zwei Werte von  $\alpha$  ( $60^\circ$ ,  $9^\circ$ ) für je etwa 50 Punkte die Geschwindigkeitsvektoren konstruiert, insbesondere auch die Geschwindigkeitsrichtung am Vorder- und Hinterende der Platte, den die Stromlinien in äquidistanten Punkten treffen,

<sup>1)</sup> Vgl. auch Wilh. Müller, Ingen.-Archiv, Bd. II (1931), S. 415–427.

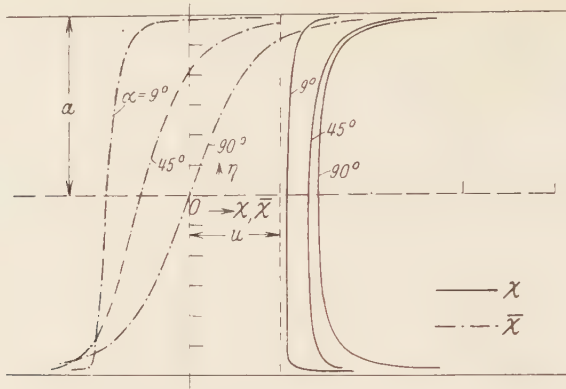


Abb. 92. Kielwasser- und Gleitfunktion der Oseen-Strömung um eine ebene Platte für verschiedene Anstellwinkel.

und danach dann die Strombilder entworfen (Abb. 93, 94). Bei der Auswahl der Punkte außerhalb der Platte wird man zweckmäßig vier ausgezeichnete Ortsgeraden bevorzugen, die Grenzen des Kielwassers ( $\lambda = \sin \psi + \cos \psi$ , bzw.  $= \frac{1}{\cos \psi - \sin \psi}$ ), die Verlängerung der Platten-  
spur ( $\psi=0$ ) und deren Mittelsenkrechte ( $\lambda=1$ ). Ferner lassen sich zu jedem Punkt drei Spiegelpunkte in bezug auf die beiden letztgenannten

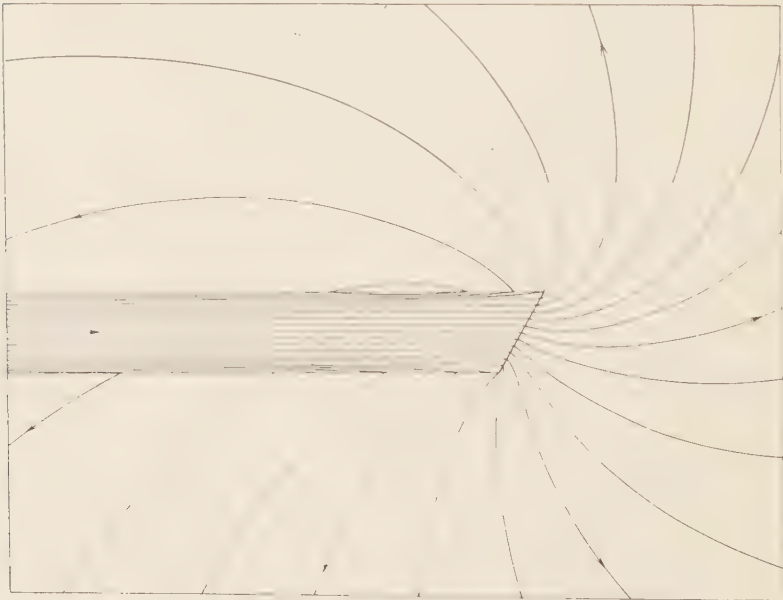


Abb. 93. Absolute Oseen-Strömung um eine ebene Platte mit  $\alpha = 60^\circ$  ( $u \rightarrow 0$ ).

Geraden hinzunehmen, für die entweder der Winkel  $\psi$  sein Vorzeichen ändert oder das Radienverhältnis  $\lambda$  in den reziproken Wert übergeht. Die Strömung im Kielwasser ergibt sich durch Hinzufügung der Geschwindigkeit

$$(v_x)_k = \zeta.$$

Wir erhalten dann im Gebiet II die resultierenden Komponenten

$$(v_x)_{II} = v_1 + \zeta, \quad (v_y)_{II} = v_2.$$

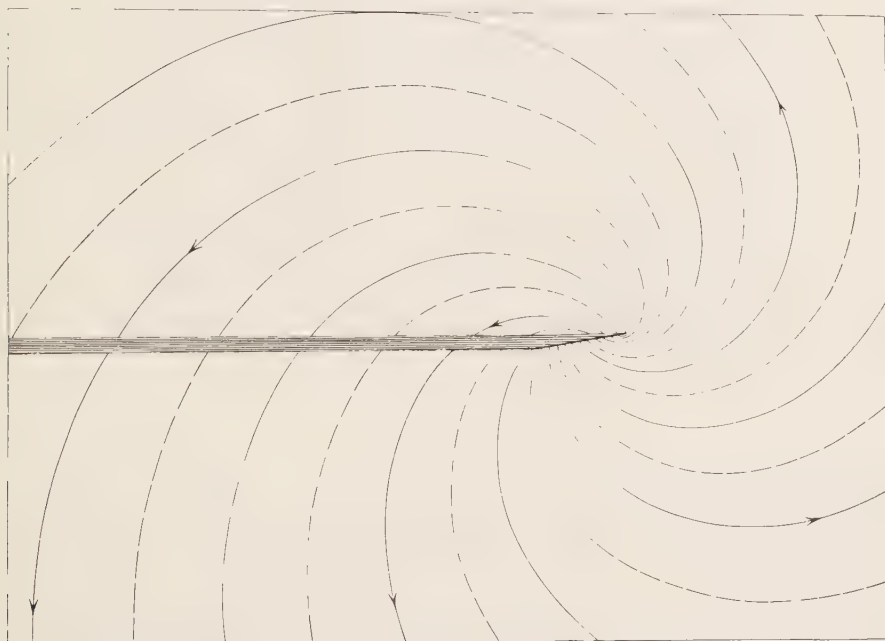


Abb. 94. Absolute Oseen-Strömung um eine ebene Platte mit  $\alpha = 9^\circ$  ( $u \rightarrow 0$ ).

Die auf diese Weise gewonnenen Bilder zeigen einen Verlauf der Strömung, der mit der Beobachtung manche Ähnlichkeit besitzt, wie die beigegebenen Zeitaufnahmen der Absolutströmung von Ahlborn (Abb. 95, 96) bestätigen mögen. Man sieht vor allem die spiralförmige Natur der Stromlinien und die deutliche Einwirkung der Zirkulation in demselben Sinne, wie sie bei Tragflügeln in die Erscheinung tritt. Während diese Zirkulation bei  $\alpha \approx 40^\circ$  ihr absolutes Maximum hat, wird ihr relativer Wert, d. h. ihr Verhältnis zur Quellstärke, also

$$(6) \quad \frac{\Gamma}{Q} = \frac{\sin \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right)}{\frac{1}{2} - \cos \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right)},$$



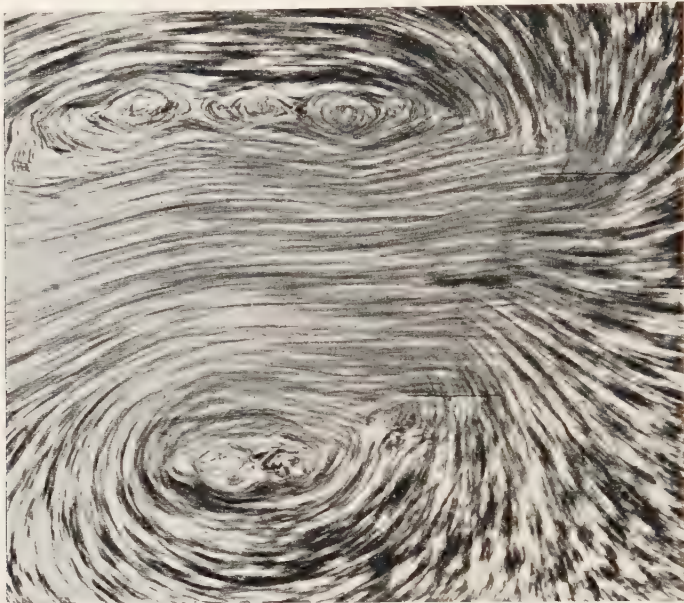


Abb. 95. Absolutströmung um eine ebene Platte mit  $\alpha = 60^\circ$ .  
(Nach Ahlborn.)



Abb. 96. Absolutströmung um ein Tragflügelprofil mit  $\alpha = 9^\circ$ . (Nach Ahlborn.)



mit abnehmendem Winkel  $\alpha$  immer größer und erreicht in der Grenze den Wert

$$\left(\frac{\Gamma}{Q}\right)_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2}.$$

Der Grenzwinkel der Stromspiralen im Unendlichen mit dem Strahl durch den Anfangspunkt beträgt also  $57,5^\circ$ .

Die Abweichung des theoretischen Stromlinienverlaufes von der Wirklichkeit ist besonders darin begründet, daß die das Kielwasser begrenzenden Diskontinuitätsflächen nicht bestehen bleiben, sondern eine starke

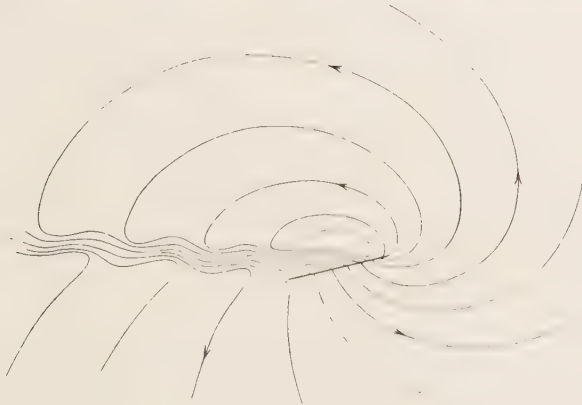


Abb. 97. Schematisches Bild der wirklichen Strömung um eine Platte.  
(Nach Ahlhorn.)

Umbildung in der Weise erfahren, daß sich größere individualisierte Wirbelkomplexe absondern, die eine Eigenbewegung ausführen innerhalb des mittleren stationären Hauptstromes. Im ganzen wird jedoch der Stromlinienverlauf richtig wiedergegeben. Man kann sogar mit einer gewissen Berechtigung sagen, daß das Oseensche Strombild durch bloße Deformation in das schematische Bild der wirklichen Strömung (Abb. 97) verwandelt werden kann. Wenn man gleichzeitig die Wirbelreihe in entsprechender Weise aufteilt, so sieht man auch, wie sich die Kármánsche Wirbelstraße in das System der Stromlinien einordnet.

### § 78. Berechnung der Stromfunktion für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Der besondere, durch  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  gekennzeichnete Fall bietet natürlich nach Aufstellung der allgemeinen Formeln keine Schwierigkeiten. Wir wollen uns aber trotzdem mit ihm etwas eingehender beschäftigen und dabei Gelegenheit nehmen, einige ergänzende Rechnungen<sup>1)</sup> durchzuführen,

<sup>1)</sup> Vgl. Wilh. Müller, Ingen.-Archiv, Bd. II (1931), S. 20–35.

die im allgemeinen Fall einen recht umständlichen Charakter annehmen. Insbesondere eignet sich dieser Spezialfall, die geometrische Vorstellung des Strömungsfeldes in der Umgebung eines symmetrischen Körpers zu vervollständigen. Die Geschwindigkeitsfunktion nimmt für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  die einfache Form an

$$(1) \quad v_1 - iv_2 = u_0 \left\{ 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{ia-z}{ia+z} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{ia-z}{ia+z} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Für die Kielwasserfunktion und die Wirbelstärke im Kielwasser ergeben sich die Ausdrücke

$$(2) \quad \chi(y) = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{a-y}{a+y} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{a-y}{a+y} \right)^{-\frac{1}{2}} \right],$$

$$(3) \quad w = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{u_0 a}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{a+y} - \sqrt{a-y}}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus der Funktion  $\chi(y)$  gewinnen wir nun weiter die Stromfunktion  $\Psi_k$  der Kielwasserströmung

$$\Psi_k = \int \chi dy.$$

Zur Ausführung der Integration setzen wir

$$\frac{a-y}{a+y} = \tau^4, \quad dy = -\frac{8a \cdot \tau^3}{(1+\tau^4)^2} d\tau.$$

Dann wird

$$\int \left( \frac{a-y}{a+y} \right)^{\frac{1}{2}} dy = -8a \int \frac{\tau^4}{(1+\tau^4)^2} d\tau; \quad \int \left( \frac{a+y}{a-y} \right)^{\frac{1}{2}} dy = -8a \int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\tau^4)^2},$$

und die Auswertung ergibt

$$\int \frac{\tau^4 d\tau}{(1+\tau^4)^2} = -\frac{\tau}{4(1+\tau^4)} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}\tau}{1-\tau^2} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \log \frac{1+\tau}{2-\tau} \frac{\sqrt{2}+\tau^2}{2+\tau^2},$$

$$\int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\tau^4)^2} = \frac{\tau^3}{4(1+\tau^4)} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}\tau}{1-\tau^2} - \frac{1}{16\sqrt{2}} \log \frac{1+\tau}{2-\tau} \frac{\sqrt{2}+\tau^2}{2+\tau^2}.$$

Wir erhalten daher

$$(4) \quad \Psi_k = -\sqrt{2} a u_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\tau \sqrt{2}}{1-\tau^2} - \frac{\tau(1-\tau^2)}{1+\tau^4} \right].$$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Berechnung der Stromfunktion der Potentialströmung außerhalb des Kielwassers. Setzen wir

$$\frac{z-ia}{z+ia} = \zeta^4, \quad dz = \frac{8ia\zeta^3}{(1-\zeta^4)^2} d\zeta,$$

so wird

$$C_1 = \int \sqrt{\frac{z-ia}{z+ia}} dz = ia \left[ \frac{2\zeta}{1-\zeta^4} - \arctg \zeta - \frac{1}{2} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right],$$

$$C_2 = \int \sqrt{\frac{z+ia}{z-ia}} dz = ia \left[ \frac{2\zeta^3}{1-\zeta^4} - \arctg \zeta + \frac{1}{2} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right].$$

Dann ergibt sich

$$\Phi + i\Psi = \int V dz = u_0 z + \frac{i-1}{2} C_1 - \frac{i+1}{2} C_2.$$

Wenn wir die Ausdrücke für  $C_1$  und  $C_2$  in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegen, also setzen

$$C_1 = A_1 + iB_1, \quad C_2 = A_2 + iB_2,$$

so ergibt sich für die Stromfunktion  $\Psi$  der Ausdruck

$$\Psi = u_0 \left[ y + \frac{A_1 - A_2 - B_1 - B_2}{2} \right].$$

Es kommt also zunächst darauf an, den Realteil der Differenz  $C_1 - C_2$  und den Imaginärteil der Summe  $C_1 + C_2$  zu bilden. Nun haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}(C_1 - C_2) &= 2i \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} - i \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \\ \frac{1}{a}(C_1 + C_2) &= 2i \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} - 2i \operatorname{arc tg} \zeta = 2i \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} - \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\zeta = \rho e^{i\omega},$$

so wird

$$\begin{aligned} J \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} &= \frac{\rho \sin \omega (1 - \rho^2)}{1 + 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4}; & R \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} &= \frac{\rho \cos \omega (1 - \rho^2)}{1 - 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4}, \\ J \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} &= \operatorname{arc tg} \frac{\rho \sin \omega}{1 + \rho \cos \omega} + \operatorname{arc tg} \frac{\rho \sin \omega}{1 - \rho \cos \omega}, \\ J \log \frac{\zeta + i}{\zeta - i} &= \operatorname{arc tg} \frac{1 + \rho \sin \omega}{\rho \cos \omega} + \operatorname{arc tg} \frac{1 - \rho \sin \omega}{\rho \cos \omega}. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}[A_1 - A_2 - (B_1 + B_2)] &= -2J \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} - 2R \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} + J \left[ \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right] \\ &= -2\rho(1 - \rho^2) \left[ \frac{\sin \omega}{1 + 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4} + \frac{\cos \omega}{1 - 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4} \right] \\ &\quad + \operatorname{arc tg} \frac{2\rho \sin \omega}{1 - \rho^2} + \operatorname{arc tg} \frac{2\rho \cos \omega}{1 - \rho^2}, \end{aligned}$$

also für die Stromfunktion den Ausdruck

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_I &= u_0 y - u_0 a \rho (1 - \rho^2) \left[ \frac{\sin \omega}{1 + 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4} + \frac{\cos \omega}{1 - 2\rho^2 \cos 2\omega + \rho^4} \right] \\ &\quad + \frac{u_0 a}{2} \left[ \operatorname{arc tg} \frac{2\rho \sin \omega}{1 - \rho^2} + \operatorname{arc tg} \frac{2\rho \cos \omega}{1 - \rho^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Im Kielwasser haben wir dagegen die kombinierte Stromfunktion

$$\Psi_{II} = \Psi_I + \Psi_k$$

zu verwenden. Um an der Stromfunktion zu prüfen, ob die Randbedingungen erfüllt sind, bedenken wir, daß am Vorderrand  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\pi$ .

$\omega = -\frac{\pi}{4}$ , also  $\sin \omega = -\cos \omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  zu setzen ist. Dann wird der Randforderung entsprechend

$$\Psi_I = u_0 y.$$

Auf der Rückseite dagegen ist  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , also

$$\Psi_I = u_0 y - u_0 \sqrt{2} a \frac{\varrho(1-\varrho^2)}{1+\varrho^4} + u_0 a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-2\varrho}{1-\varrho^2}.$$

Weil aber am Rand  $\tau$  mit  $\varrho$  identisch wird, so haben wir

$$\Psi_I + \Psi_k = u_0 y.$$

Die Geschwindigkeit  $v$ , beiderseits der Platte stimmt also unserer Voraussetzung gemäß mit der Translationsgeschwindigkeit  $u_0$  überein.

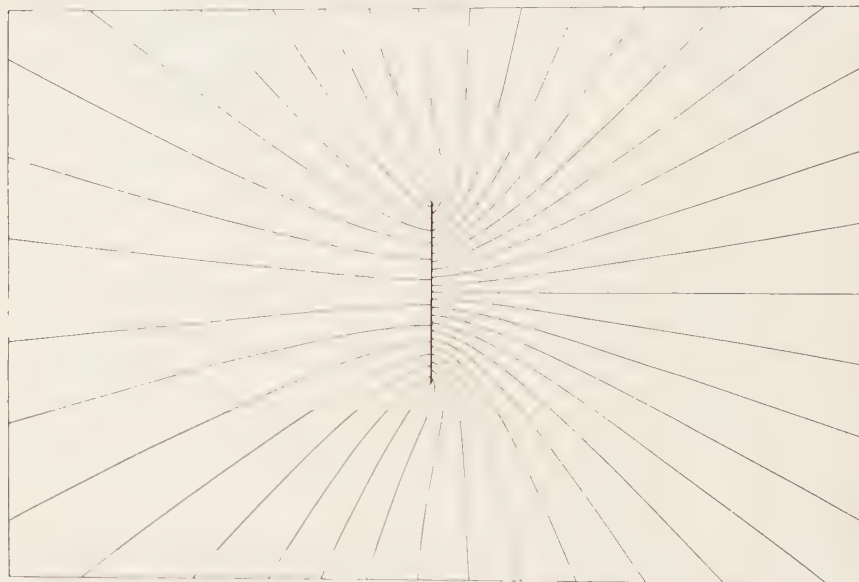


Abb. 98. Das Oseensche Potentialfeld in der Umgebung einer ebenen Platte

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right).$$

Was zunächst den Verlauf der Funktion  $\Psi_k$  angeht, der in der angeführten Arbeit des Verfassers dargestellt ist, so weicht er, wenn man von der unmittelbaren Umgebung der Kielwassergrenze absieht, wenig von einer geraden Linie ab. Die mittlere Neigung dieser Geraden oder die mittlere Geschwindigkeit des Kielwasserstromes ergibt sich unmittelbar aus dem Ausdruck für die Ergiebigkeit  $Q = \pi u_0 a$  der Gesamtquelle zu

$$(v_k)_m = \frac{1}{2} u_0.$$

Zur Konstruktion des primären Potentialfeldes (Abb. 98) ist zunächst der in (5) gegebene Wert der Stromfunktion  $\Psi_l$  für verschiedene Radienverhältnisse in Abhängigkeit von  $\omega$  bzw. für verschiedene  $\omega$  in Abhängigkeit von  $\rho$  berechnet worden. Die entsprechenden doppelten, als Funktion von  $\frac{y}{a}$  umgezeichneten  $\Psi$ -Kurvenscharen liefern dann in den Schnittpunkten mit äquidistanten Parallelen zur Abszissenachse mehrere auf einer Stromlinie gelegene Punkte des Stromfeldes, deren dipolare Koordinaten unmittelbar abgelesen werden können.

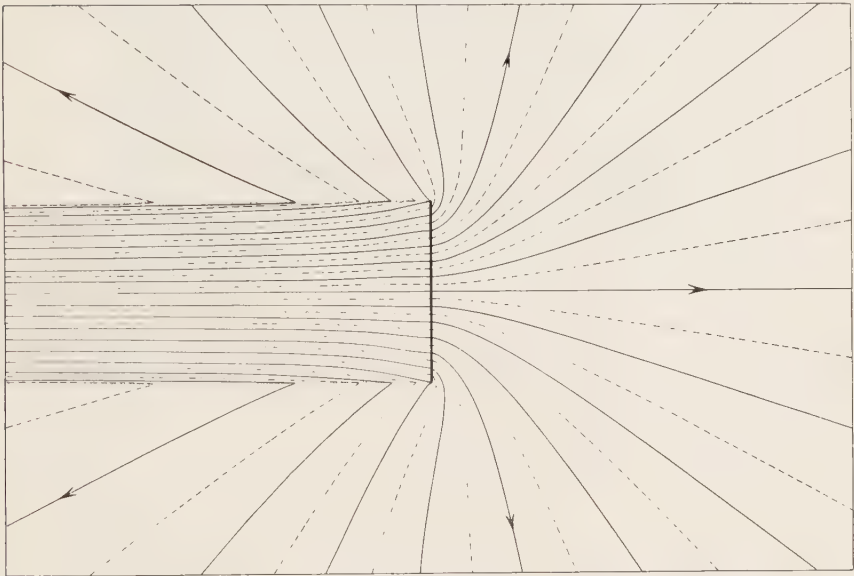
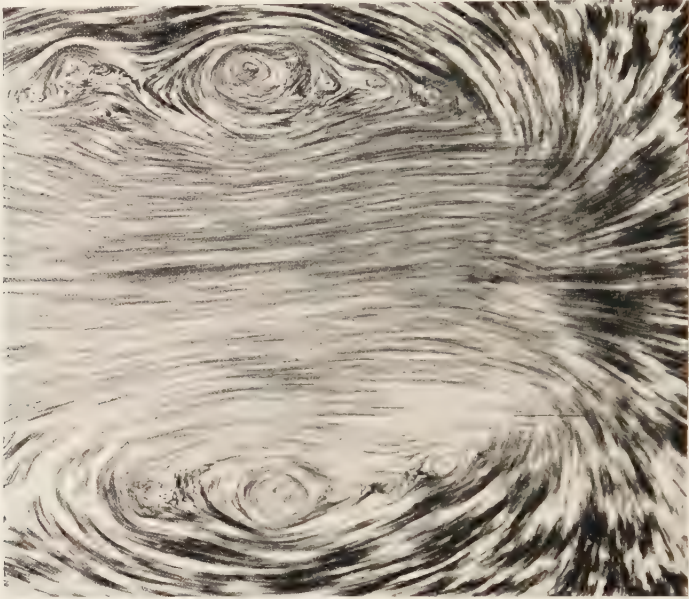


Abb. 99. Oseensche Absolutströmung um eine senkrecht zu ihrer Ebene gleichförmig bewegte Platte ( $u \rightarrow 0$ ).

In Verbindung mit dem  $\Psi_k$ -Diagramm entsteht auf diese Weise das in der Abb. 99 dargestellte absolute Stromfeld. Während im Falle  $a > \frac{1}{2}$  die Stromlinien oberhalb der Platte (d. h. auf der Seite der vorstehenden Kante) einen zirkulatorischen Charakter haben, ist im symmetrischen Falle die Gesamtzirkulation verschwunden; das Stromliniensystem zeigt im wesentlichen nur einen quellartig von der Platte ausstrahlenden Verlauf. Während ferner der Kielwasserstrom zum Teil die Platte trifft, geht der andere Teil, nachdem jede Stromlinie einen dem Wirbelsprung entsprechenden Knick gemacht hat, in den Potentialstrom über. Wenn man die Absolutströmung mit der Parallelströmung  $v_x = -u_0$  überlagert,

Abb. 100. Absolutströmung um eine Platte mit  $\alpha = 90^\circ$ . (Nach Ahlborn.)

so erhält man die von der bewegten Platte aus gesehene Relativströmung, die in der genannten Arbeit des Verfassers dargestellt ist. Da der reine Kielwasserstrom die mittlere Geschwindigkeit  $\frac{\pi}{2} u_0$  besitzt, so wird die Relativgeschwindigkeit im Wirbelraum in großem Abstand von der Platte

$$v_x = u_0 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right),$$

während in unmittelbarer Nähe der Platte Ruhe herrscht.

### § 79. Größe und Lage der Druckkraft.

Um die beiden Komponenten der resultierenden Druckkraft, d. h. Widerstand und Auftrieb zu bestimmen, führen wir in den allgemeinen Ausdrücken (2) und (3) des § 73 die Werte für die Geschwindigkeitskomponenten ein und erhalten dann z. B. für den Widerstand

$$\begin{aligned} P_x &= -\frac{1}{2} \rho \int_{\tilde{c}_h} \chi^2 dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho u_0^2 \sin \alpha \int_{-a}^{+a} \left[ \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] d\eta. \end{aligned}$$



Die vorkommenden Integrale lassen sich mit Hilfe der Substitution

$$\frac{a-\eta}{a+\eta} = \tau^2; \quad d\eta = -\frac{4a\tau}{(1+\tau^2)^2} d\tau$$

und der allgemeinen Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^{\beta+1} d\tau}{(1+\tau^2)^2} = \frac{\beta\pi}{4 \sin \frac{\beta\pi}{2}}$$

in einfacher Weise auswerten. Der Auftrieb besteht nach § 73, (3a) aus drei Teilen, deren erster mit dem bekannten Ausdruck von Kutta-Joukowsky identisch und deren zweiter der Quellstärke proportional ist, während der dritte sich genau so behandeln läßt wie der Widerstand. Mit Benutzung von

$$\Gamma = 2\pi a u_0 \sin \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right); \quad \int_{C_h} \gamma dy = Q = 4\pi a u_0 \left[ \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]$$

erhält man dann nach einfacher Rechnung die Kraftkomponenten

$$(1) \quad \begin{cases} P_x = -\frac{1}{2} \rho a u_0^2 \left[ \pi - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right], \\ P_y = \frac{1}{2} \rho a u_0^2 \left[ \pi \operatorname{ctg} \alpha - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right] \end{cases}$$

mit den Beiwerten

$$(1a) \quad \begin{cases} c_w = \frac{1}{2} \left[ \pi - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right], \\ c_a = \frac{1}{2} \left[ \pi \operatorname{ctg} \alpha - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right], \\ c_p = \sqrt{c_w^2 + c_a^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{\sin \alpha} - 2(\pi - 2\alpha) \operatorname{ctg} 2\alpha \right]. \end{cases}$$

Die Formeln zeigen zunächst, daß die resultierende Druckkraft auf der Platte senkrecht steht. Während nun das Verhältnis  $\frac{(c_p)_\alpha}{(c_p) \frac{\pi}{2}}$  des

Beiwertes für  $\alpha$  zum Beiwert  $c_p = c_a$  für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  mit den Eiffelschen Meßresultaten gut übereinstimmt, fallen die Absolutwerte bedeutend zu groß aus. So ergibt sich z. B. für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  der Beiwert  $c_p = 2,57$ , während der wirkliche, aus den Versuchen durch Extrapolation für die unendliche lange Platte ermittelte Wert etwa zwischen 1,8 und 2,0 liegt. Eine weitere Unstimmigkeit ist dadurch gegeben, daß der Auftrieb für  $\alpha = 0$  nicht verschwindet, sondern einen endlichen Wert ( $c_p = 1$ ) annimmt. Nun ist aber die Druckkraft im Kielwasser noch unbestimmt, da es zunächst

nicht ausgemacht ist, daß die Bernoullische Energiekonstante hier denselben Wert besitzt wie im Potentialgebiet. Wir können daher längs der Rückseite der Platte einen konstanten Druck  $p_1$  hinzufügen. Das würde bedeuten, daß Widerstand und Auftrieb um die Werte  $p_1 \cdot 2a \sin \alpha$  und  $p_1 \cdot 2a \cos \alpha$ , also die entsprechenden Beiwerte um  $c_1 \sin \alpha$  und  $c_1 \cos \alpha$ , verkleinert werden. Wenn aber der Auftrieb für  $\alpha=0$  den Wert Null ergeben soll, so hat man

$$\frac{1}{2} \left| \pi \operatorname{ctg} \alpha - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right| - c_1 \cos \alpha = 0.$$

Da der Klammerausdruck den Wert 2 hat, wird, so ergibt sich

$$c_1 = 1.$$

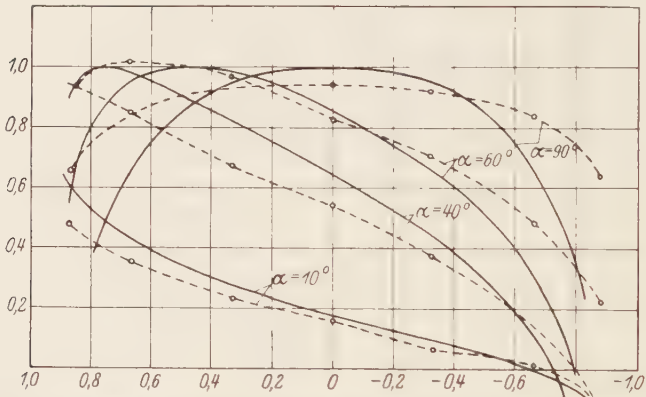


Abb. 101. Vergleich des theoretischen Druckverlaufs auf der Vorderseite einer Platte mit der Eiffelschen Messung.

Man hat also gerade den Staudruck auf der Rückseite hinzuzufügen, um plausible Grenzwerte zu erhalten. Dann erhält man aber für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  den Widerstandsbeiwert

$$\frac{1}{2} (\pi + 2) - 1 = \frac{\pi}{2} = 1,57,$$

der jedenfalls mit den Eiffelschen Resultaten gut zusammenstimmt. Die für einen beliebigen Anstellwinkel korrigierten Beiwerte lauten dann

$$(2) \quad \begin{cases} (c_w)_{\text{kor}} = \frac{1}{2} \left[ \pi - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha \right] \\ (c_a)_{\text{kor}} = \frac{1}{2} \left[ \pi \operatorname{ctg} \alpha - (\pi - 2\alpha) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - 2 \cos \alpha \right] \\ (c_p)_{\text{kor}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{\sin \alpha} - 2(\pi - 2\alpha) \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \right]. \end{cases}$$

Wir haben zunächst (in der Abb. 101) die von Zeilon berechneten Druckwerte an der Vorderseite der Platte in Verbindung mit den Eiffel'schen Zahlen für mehrere Stellungen der Platte zusammengetragen, wobei die Abszissen die Verhältnisse der Abstände der Punkte vom Mittelpunkt zur halben Tiefe bedeuten. Man sieht, daß die theoretischen (voll ausgezogenen) Kurven im ganzen, von den Rändern abgesehen, die Druckverteilung richtig wiedergeben.

Tabelle für die charakteristischen Konstanten einer Platte.

$\alpha$	$\frac{\Gamma}{2\pi a u_0}$	$\frac{Q}{2\pi a u_0}$	$\frac{\Gamma}{Q}$	$c_{30}$	$c_a$	$c_p$	$c_m$	$\frac{\tau_0}{a}$	$(c_p)_{\text{exp}}$ $\lambda = \frac{1}{50}$	$(\frac{\tau_0}{a})_{\text{exp}}$ $\lambda = \frac{1}{9}$
0	0	0	1,57	0,6						
10	0,077	0,061	1,26	0,061	0,345	0,350	0,055	0,313	0,92	0,75
20	0,134	0,134	1,00	0,236	0,65	0,69	0,08	0,253	1,12	0,88
30	0,165	0,211	0,78	0,463	0,80	0,925	0,101	0,217	1,22	0,96
40	0,178	0,287	0,62	0,73	0,865	1,13	0,102	0,182	1,28	1,04
45	0,177	0,323	0,548	0,86	0,86	1,22	0,098	0,163	1,33	1,07
50	0,168	0,360	0,466	0,93	0,83	1,30	0,093	0,144	1,38	1,09
60	0,144	0,416	0,346	1,23	0,71	1,42	0,076	0,107	1,46	1,14
70	0,104	0,462	0,225	1,42	0,516	1,51	0,054	0,071	1,52	1,17
80	0,06	0,492	0,122	1,54	0,27	1,56	0,028	0,035	1,55	1,19
90	0	0,50	0	1,57	0	1,57	0	0	1,56	1,20

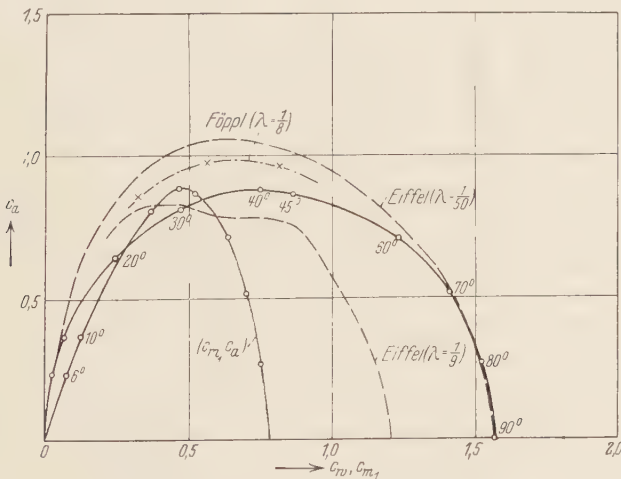


Abb. 102. Polardiagramme für die auf eine ebene Platte wirkenden Flüssigkeitskräfte.

Die für verschiedene Anstellwinkel berechneten Beiwerte sind in der Tabelle mit den Versuchswerten zusammengestellt. Ferner haben wir, der in Göttingen üblichen Darstellungsart folgend, die sogenannte Polar-

kurve ( $c_u$  als Ordinate in Abhängigkeit von  $c_a$  als Abszisse) der Theorie wie der Messung [nach Eiffel<sup>1)</sup> und Föppl<sup>2)</sup>] gezeichnet. Die theoretischen Zahlen stimmen im allgemeinen bei großen Anstellwinkeln besser mit den experimentellen Werten überein, weil die Reibung hier weniger ins Gewicht fällt und weil die Strömung in diesen Fällen vor der Platte einen regulären Staupunkt besitzt, während bei einem Winkel, der kleiner ist als der sogenannte kritische Winkel der Staupunkt verschwindet. Der kritische Zustand ist als ein labiler Zustand zu bezeichnen, bei dem insbesondere der Druck starken Schwankungen ausgesetzt ist. Die Versuchswerte beziehen sich zunächst auf Platten mit bestimmtem Seitenverhältnis  $\lambda = \frac{2a}{2b}$  ( $2b$  Plattenbreite), das den Versuchsdaten beigelegt ist. Die auf das Seitenverhältnis  $\lambda = \frac{1}{50}$  bezüglichen Werte sind aus den Eiffelschen Messungen gewonnen, wobei der direkt festgestellte Widerstandswert für  $\alpha = \frac{7}{2}$  und die Verhältniszahlen  $\frac{(c_p)_\alpha}{(c_w)_{\frac{\pi}{2}}}$  zugrunde gelegt wurden.

Es ist übrigens nur natürlich, daß die berechneten Kraftzahlen nach der Korrektur kleiner ausfallen als die Versuchswerte, da das Strombild von vornherein als stationär angenommen wurde und da sich zeigen läßt, daß sich die Gesamtkraft aus zwei Bestandteilen zusammensetzt, der Resultierenden der Druckkräfte der mittleren stationären (als erstarrt gedachten) Strömung und derjenigen Kraft, die als Äquivalent der instationären Bewegung der Wirbelgebilde im Hauptstrom zu betrachten ist<sup>3)</sup>.

2. Um die Lage der resultierenden Druckkraft zu ermitteln, haben wir zunächst das Moment in bezug auf den Mittelpunkt der Platte zu berechnen. Wenn wir die veränderlichen Bestandteile der Drucke einführen, erhalten wir

$$M_0 = \int p \eta d\eta = -\frac{\rho}{2} \int [(u_0 - v_1)^2 + v_2^2] \eta d\eta + \rho u_0^2 \int \chi \eta d\eta.$$

1) Vgl. G. Eiffel, Der Luftwiderstand und der Flug, deutsch von F. Huth, Berlin 1912; ferner L. Jacob, La Résistance de l'air et l'Expérience, I. Teil, Paris 1921, S. 138 f.

2) O. Föppl, Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten, Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, Bd. 4, 1910—11, S. 51—119; vgl. auch Z. F. M. 1910, S. 87 f.

3) Vgl. Wilh. Müller, Mathem. Strömungslehre, Berlin 1928, S. 53, sowie den Bericht des Verfassers in den Verhandl. des III. Intern. Kongresses f. techn. Mechanik, Stockholm 1930, Bd. I, S. 205 f.

Mit Benutzung der Werte (4c) und (4d) des § 77 ergibt sich dann der Ausdruck

$$M_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left[ \sin \alpha \cdot \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] \eta d\eta.$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich wieder mit Hilfe der Substitution  $\frac{a-\eta}{a+\eta} = \tau^2$  und der allgemeinen Formel

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \left( \frac{a-\eta}{a+\eta} \right)^{\beta} \eta d\eta = 4a^2 \int_0^{\infty} \tau^{2\beta+1} \frac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^3} d\tau = -\frac{2\pi\beta^2}{\sin\beta\pi} \cdot a^2$$

behandeln. Man sieht dann, daß sich die letzten vier Integrale herausheben und für das Moment der einfache Wert übrigbleibt

$$(3) \quad M_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 a^2 \frac{(\pi - 2\alpha)^2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha.$$

Definieren wir den Beiwert  $c_m$  wie in der Tragflügeltheorie durch den Ansatz

$$M_0 = c_{m_0} \cdot \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot 2a \cdot 2a,$$

so finden wir

$$(3a) \quad c_{m_0} = \frac{(\pi - 2\alpha)^2}{8\pi} \operatorname{tg} \alpha.$$

Wenn wir ferner das Moment der Kraft auf die Vorderkante der Platte beziehen, erhalten wir für den entsprechenden Beiwert

$$(4) \quad c_{m_1} = \frac{P \cdot a - M_0}{\rho u_0^2 \cdot 2a^2} = \frac{1}{2} c_p - c_{m_0}.$$

Der Verlauf des Momentes  $M_0$  bzw. des Wertes  $c_{m_0}$  für veränderlichen Anstellwinkel ist der Tabelle S. 295 zu entnehmen. Das Moment verschwindet für die beiden Grenzen  $\alpha=0$  und  $\alpha=\frac{\pi}{2}$  und erreicht ein Maximum für einen Winkel, der der Gleichung  $\pi - 2\alpha = 2\sin 2\alpha$  genügt und der etwa dem kritischen Anstellwinkel der quadratischen Platte entspricht, bei dem der Ablösungsvorgang der Strömung seinen Charakter ändert. Wir haben ferner, wie es bei den Göttinger Profilmessungen üblich ist, in der Abb. 102 die auf den Vorderkantenpunkt bezügliche Momentenpolare, d. h.  $c_a$  in Abhängigkeit von  $c_m$ , dargestellt. In Übereinstimmung mit den Tragflügelversuchen ist der Polarenverlauf für kleine Anstellwinkel bis etwa  $\alpha=15^\circ$  nahezu geradlinig und zwar etwas weniger steil ansteigend als die entsprechende Tragflächenpolare, die etwa die Neigung  $\frac{c_a}{c_{m_1}} = \frac{4}{1}$  besitzt.

Für die Lage des Druckpunktes erhalten wir schließlich den Ausdruck

$$(5) \quad \frac{\tau_0}{a} = \frac{M_0}{Pa} = \frac{(\pi - 2\alpha)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2\pi \left[ \frac{\pi}{\sin \alpha} - 2(\pi - 2\alpha) \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \right]}$$

Die entsprechenden Werte dieses Verhältnisses sind für verschiedene Winkel berechnet und mit den Eiffelschen Resultaten zusammengestellt (Abb. 103). Wie namentlich die Kurvendarstellung erkennen läßt, stehen die theoretischen Werte in gutem Einklang mit der Messung, vor allem im Gebiet der größeren Anstellwinkel. Für Winkel kleiner als etwa  $15^\circ$  fällt die Abweichung gegenüber den Versuchen (aus übrigens leicht erklärlichen Gründen) ziemlich erheblich aus; während nämlich die Versuchskurve für abnehmende Winkel von  $15^\circ$  an ziemlich steil ansteigt, nähern sich die theoretischen Werte von  $\frac{\tau_0}{a}$  dem Grenzwert  $\frac{1}{3}$ , der weit unter dem wirklichen Grenzwert bleibt.

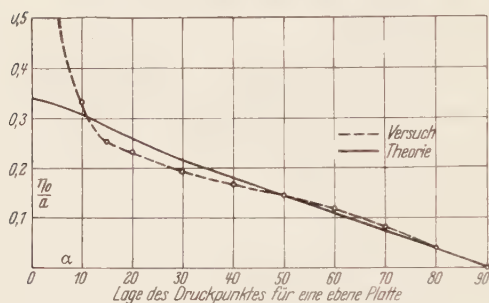


Abb. 103.

## § 80. Allgemeine Sätze über Kielwasserströme vom Oseenschen Typus.

Wenn man sich vorübergehend von der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit auf der Rückseite des Körpers frei macht, so lassen sich die Oseen-Zeilonschen Stromfelder als Spezialfälle von unstetigen Strömungen auffassen, die wesentlich durch die Wirbelverteilung innerhalb des wie bei Oseen begrenzten Kielwassergebietes bestimmt sind. Man geht dabei am besten von einem Satze aus, der bisher nur in der elektrischen Strömungslehre angewendet worden ist, der aber gerade im Hinblick auf das Oseensche Ergebnis eine besondere Bedeutung für die Hydrodynamik gewinnen kann<sup>1)</sup>.

Denkt man sich von den Endpunkten  $A_1$  und  $A_2$  der lotrecht zur Bewegungsrichtung gestellten Plattenspur (Abb. 91) zwei geradlinige, unendlich lange und der Hauptachse parallele Wirbelschichten von entgegen-

<sup>1)</sup> Vgl. F. Lindner, Der Formwiderstand einer Platte, Verhandlungen des 3. Intern. Kongresses für techn. Mechanik, Stockholm 1930, I. T. S. 198; Wilh. Müller, Zur Konstruktion von idealen Kielwasserströmungen, Ebenda, S. 205; sowie die oben zitierten Arbeiten des Verfassers.



gesetztem Drehsinn und der Belegungsdichte  $\gamma_0$  und  $-\gamma_0$  ausgehen, so ergibt sich, daß das von ihnen erzeugte Stromfeld außerhalb des Kielwasserstreifens (d. h. in  $I$ ) identisch ist mit dem Feld, das von der gleichmäßig mit Quellen belegten Strecke  $A_1A_2$  erzeugt wird, wenn die Wirbel-dichte  $\gamma_0$  gleich der Quelldichte  $q$  ist, während sich das Feld im Innern  $II$  des Streifens als eine Überlagerung der Quellströmung mit einem auf die Platte gerichteten homogenen Parallelstrom von der Geschwindigkeit  $\gamma_0$  darstellt. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar daraus, daß die Doppelquellbelegung einer Fläche ersetzbar ist durch einen Wirbel-ring längs der Berandung, dessen Zirkulation mit dem Moment der Belegung übereinstimmt. Denkt man sich nämlich den Kielwasser-zylinder durch eine unendliche kontinuierliche Folge von solchen doppelt-belegten Flächen (von der Dicke  $dx$ ) aufgeteilt, so heben sich alle Zwischenbelegungen auf, und es bleibt nur die einfache Quellbelegung der Endfläche übrig, während die entsprechenden Wirbelringe sich zu einer zylindrischen Wirbelschicht zusammensetzen, die im ebenen Fall im Unendlichen geschlossen ist.

Dasselbe ergibt sich durch formale Ausrechnung des Potentials für die Quell- und Wirbelströmung. Man erhält z. B. im ebenen Fall für das Gebiet I

$$(1) \quad \Phi + i\psi = \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \lg(z - i\eta) d\eta = \frac{i\gamma_0}{2\pi} z \lg \frac{z - ia}{z + ia} + \frac{\gamma_0}{2\pi} a \lg(z^2 + a^2),$$

$$(2) \quad V_I = v_x - i v_y = \frac{i\gamma_0}{2\pi} \lg \frac{z - ia}{z + ia}.$$

Im Gebiet II ist zum Potential noch die lineare Funktion  $\gamma_0 z$ , zur Geschwindigkeit die Konstante  $\gamma_0$  hinzuzufügen.

Dieser Grundsatz läßt sich nun ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, daß das Kielwassergebiet nicht nur an der Grenze, sondern über seine ganze Breite von Wirbelstreifen erfüllt ist, so wie etwa im Oseenschen Fall. Dabei ist zu beachten, daß es nicht genügt, die inneren Wirbel allein zu berücksichtigen, deren Stärke der Ableitung der Kielwasserfunktion  $\chi(y)$  nach  $y$  proportional ist, sondern daß erst die als wirbelnd zu denkende Endschicht den Geschwindigkeitssprung an der Kielwassergrenze zu erzeugen vermag. Wenn die Elementarzirkulation dieser Endschicht  $\gamma_0 = \chi(a)$  und die Zirkulation eines inneren Wirbelstreifens gleich  $w(\eta)d\eta$  gesetzt wird, so haben wir für die komplexe Feldgeschwindigkeit im Gebiet I nach (2) den Ausdruck

$$V = \frac{i}{2\pi} \int_0^a w(\eta) \log \frac{z - i\eta}{z + i\eta} d\eta + \frac{i\gamma_0}{2\pi} \lg \frac{z - ia}{z + ia}.$$

Setzt man  $w(\eta) d\eta = -d\zeta$ , so erhält man durch partielle Integration

$$V = \frac{i\chi(a)}{2\pi} \log \frac{z - ia}{z + ia} - \frac{i}{2\pi} \left[ \chi \log \frac{z - i\eta}{z + i\eta} \right]_0^a + \frac{z}{\pi} \int_0^a \frac{\chi(\eta) d\eta}{z^2 + \eta^2}.$$

Nun ist, da  $\chi$  als gerade Funktion von  $\eta$  vorausgesetzt wird,

$$z \int_0^a \frac{\chi d\eta}{z^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^a \frac{\chi d\zeta}{z - i\eta} + \int_{-a}^0 \frac{\chi d\eta}{z - i\eta} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{z - i\zeta}.$$

Wir erhalten also für die komplexe Geschwindigkeit

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{z - i\zeta}.$$

Aus der Form dieses Ausdruckes schließt man ohne weiteres, daß die dem Wirbelsystem im erwähnten Sinne äquivalente Quellbelegung unmittelbar durch die Kielwasserfunktion  $\chi(\eta)$  dargestellt ist.

Man sieht nun weiter, daß die durch die ermittelte Verteilung erzeugte Strömung die Randbedingungen für die mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Platte nicht erfüllt, da mit der Quellverteilung auch die Verteilung axialer Geschwindigkeiten am Rand ungleichmäßig ausfällt. Damit die Randgeschwindigkeit  $v_x$  wieder gleichmäßig wird, also die Randbedingungen erfüllt werden, ist noch eine Wirbelbelegung der Platte erforderlich, die für zwei symmetrische Punkte  $y = \pm \eta$  entgegengesetzt gleich ist und in der Mitte der Platte verschwindet. Wie die Quellbelegung durch die Geschwindigkeit  $v_x$ , so ist auch die Wirbelbelegung durch den Verlauf der anderen Komponente  $v_y$ , der Gleitgeschwindigkeit der Quellströmung längs des Plattenrandes, festgelegt. Setzen wir diese Komponente  $v_y = \frac{1}{2}\chi(y)$  und machen die Dichte der Wirbelbelegung gleich der „Gleitfunktion“  $\chi(y)$ , so hat die von der Belegung herrührende tangential Geschwindigkeit längs des Randes die Werte  $\pm \frac{1}{2}\chi(y)$ , und man sieht dann sofort ein, daß bei geeignet gewähltem Drehsinn die von der Quelle erzeugte Gleitgeschwindigkeit auf der Rückseite aufgehoben werden kann. Wenn nun im besonderen der variable Teil der anderen Randkomponente ( $v_x$ ) der Geschwindigkeit wieder mit dem negativen Wert der Kielwasserfunktion übereinstimmt, die Funktionen  $\chi$  und  $\tilde{\chi}$  also in gewissem Sinne reziprok zueinander sich verhalten, so ergibt sich in der Tat, daß bei der Zusammensetzung beider Felder die der Translation entsprechende Randbedingung erfüllt werden kann.

Wenn ferner die ebene Plattenspur einen Winkel  $\alpha$  mit der Bewegungsrichtung bildet, und das Kielwasser ebenso begrenzt ist wie im symmetri-

sehen Fall, so ergibt sich durch eine einfache Erweiterung der obigen Betrachtung, daß die Wirbelschleife im Gebiet I äquivalent ist einer Quell- und Wirbelverteilung längs der Plattenspur, deren Dichtefunktionen  $q$  und  $\gamma$  durch Multiplikation von  $\chi(y)$  mit  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  erhalten werden, also

$$q = \chi(y) \sin \alpha, \quad \gamma = \chi(y) \cos \alpha.$$

Bei einer besonderen Beschaffenheit der Kielwasserfunktion lassen sich dann die Oseenschen Randbedingungen dadurch erfüllen, daß man eine weitere Wirbelbelegung der Platte hinzufügt, die unmittelbar durch die Gleitfunktion  $\bar{\chi}(y)$  bestimmt wird.

### § 81. Anwendung auf die Oseenströmung um die ebene Platte.

1. Um die vorgetragenen einfachen Grundsätze auf die Oseenströmung um die ebene Platte anzuwenden, setzen wir zunächst  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; dann ist die gesamte Stärke der Quellbelegung sofort aus der Entwicklung des Geschwindigkeitsausdruckes zu entnehmen; man erhält

$$Q = \pi a u_0.$$

Aus der Bedeutung der Kielwasserfunktion

$$\chi = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{a+y}{a-y} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{a+y}{a-y} \right)^{-\frac{1}{4}} \right],$$

die zugleich die Quellverteilung längs der Platte bestimmt, ergibt sich ferner die einfache Integralbeziehung

$$\int_{-a}^{+a} \chi(y) dy = \pi a u_0 = Q.$$

Die andere charakteristische Funktion, die Gleitfunktion, erhalten wir, wenn wir in dem Geschwindigkeitsausdruck für einen Punkt des anderen Plattenrandes

$$\begin{aligned} z - ia &= \frac{a-y}{a+y} e^{-i\pi} \\ z + ia &= \frac{a+y}{a-y} \end{aligned}$$

setzen und den imaginären Bestandteil bestimmen. Es ergibt sich dann der Ausdruck

$$\bar{\chi} = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{a+y}{a-y} \right)^{\frac{1}{4}} - \left( \frac{a+y}{a-y} \right)^{-\frac{1}{4}} \right],$$

der sich bei Wahl der positiven Wurzelwerte von  $\chi(y)$  nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheidet. Er ist, wie zu erwarten,

eine ungerade Funktion von  $y$ , die in der Mitte  $y=0$  verschwindet und an den Grenzen ( $y=\pm a$ ) positiv und negativ unendlich wird.

Die gesamte Potentialströmung kann dann, wie sich zeigen läßt, als erzeugt gedacht werden durch die Quellbelegung und die Wirbelbelegung längs der Platte, oder die gesamte komplexe Geschwindigkeit kann in der Form dargestellt werden

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\chi(\eta) - i\bar{\chi}(\eta)}{z - i\eta} d\eta.$$

In bezug auf den direkten Nachweis der Identität dieses Ausdruckes mit dem früher gegebenen möge auf die angeführte Arbeit des Verfassers verwiesen werden.

Für das Potential hat man die entsprechende Form

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} [\chi(\eta) - i\bar{\chi}(\eta)] \lg(z - i\eta) d\eta.$$

2. Im Falle der schief bewegten Platte hat das Winkelargument der Größe  $\frac{z - ae^{i\alpha}}{z + ae^{i\alpha}}$  auf der Vorderseite den Wert  $-\pi$ ; wir erhalten daher hier für die komplexe Geschwindigkeit einen Ausdruck von der Form

$$V = u_0 + e^{-i\alpha} \cdot \bar{\chi}(\eta)$$

oder als tangentielle Geschwindigkeit

$$v_t = u_0 \cos \alpha + \bar{\chi}(\eta).$$

Den variablen Teil der Gleitgeschwindigkeit

$$\bar{\chi}(\eta) = u_0 \left[ \left( \frac{a - \eta}{a + \eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{a - \eta}{a + \eta} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} \right],$$

wo  $\eta = \frac{y}{\sin \alpha}$  gesetzt ist, können wir wieder als „Gleitfunktion“ benutzen.

Die gesamte, im Potentialgebiet mit dem Wirbelsystem des Kielwassers äquivalente Belegung der Platte setzt sich dann aus drei Teilen zusammen. Aus der Kielwasserfunktion  $\chi$ , die sich von  $\bar{\chi}$  nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheidet, bilden wir die Ausdrücke

$$\sin \alpha \chi(\eta), \quad \cos \alpha \chi(\eta),$$

die unmittelbar die Belegungsichten für die Quellbelegung und die erste Wirbelbelegung darstellen. Zur Erfüllung der Randbedingungen ist dann noch eine zweite Wirbelbelegung der Platte von der Dichte  $\bar{\chi}(\eta)$  hinzuzufügen. Die gesamte Geschwindigkeit erhält daher die Form

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{[(\sin \alpha - i \cos \alpha) \chi(\eta) - i\bar{\chi}(\eta)] d\eta}{z - \eta e^{i\alpha}},$$

und es läßt sich wieder auf dem Wege der direkten Auswertung des Integrals zeigen, daß der daraus gewonnene Ausdruck mit dem früher gegebenen übereinstimmt.

## § 82. Die Zeilonsche Erweiterung des Oseenschen Ansatzes.

1. Als Resultat des Oseenschen Grenzüberganges ergibt sich, daß die Linien konstanter Wirbelintensität mit den sogenannten Führungslinien, d. h. den Parallelen zur Haupt- oder Translationsrichtung, zusammenfallen. Die von Zeilon<sup>1)</sup> unternommene Verallgemeinerung verfolgt nun zunächst den Gedanken, statt der Führungsströmung  $u_0$  eine allgemeine, nicht parallele Strömung  $v_0$  zu verwenden, die wieder als Potentialströmung vorausgesetzt wird und im Unendlichen in die Parallelströmung  $u_0$  übergeht. Zerlegt man im zweidimensionalen Fall die Relativströmung  $v'$  in die bekannte Strömung  $v_0$ , die auch als „eingeprägte Primärströmung“ bezeichnet wird, und in die Störungsbewegung  $v$ , so hat man zu setzen

$$v' = v_0 + v,$$

und die Differentialgleichung erhält die Form

$$(1) \quad -\mathcal{F} \frac{q'}{\varrho} + \nu \mathcal{A} v' + (v_0 + v) \times \text{rot } v = 0.$$

Wenn wir neben den linearen nur die „halbquadratischen“ Glieder  $v_0 \times \text{rot } v$  beibehalten, so kommt

$$(1a) \quad -\mathcal{F} \frac{q'}{\varrho} + \nu \mathcal{A} v' + v_0 \times \text{rot } v = 0.$$

Die entsprechende Wirbelgleichung lautet

$$(2) \quad (v_0 + v) \cdot \mathcal{F} w - \nu \mathcal{A} w = 0$$

bzw.

$$(2a) \quad v_0 \cdot \mathcal{F} w - \nu \mathcal{A} w = 0.$$

Beim Grenzübergang zu verschwindender Reibung ergibt sich

$$(v_0 + v) \cdot \mathcal{F} w = 0$$

bzw.

$$(3) \quad v_0 \cdot \mathcal{F} w = 0.$$

Wenn also die asymptotische Lösung des linearisierten Gleichungssystems ein Wirbelgebiet enthält, so fallen die Linien konstanter Rotorintensität mit Stromlinien der eingepprägten Primärströmung zusammen. Man kann daher die

<sup>1)</sup> N. Zeilon, Verhandlungen des II. Intern. Kongresses für Techn. Mechanik, Zürich 1927; C. W. Oseen, Hydrodynamik, Anhang (zwei Vorträge v. N. Zeilon), S. 321—327.

Wirbelstärke auch als Funktion der Stromfunktion  $\psi$  dieser Strömung ausdrücken, also

$$(3a) \quad w = f(\psi)$$

setzen. Die Bestimmung der Wirbelverteilung kann man auf den früheren Oseenschen Fall dadurch zurückführen, daß man  $\psi$  als Imaginärteil einer komplexen Funktion

$$\varphi + i\psi$$

betrachtet und die Gleichungen auf die krummlinigen Koordinaten  $\varphi$  und  $\psi$  transformiert. Die Wirbelgleichung lautet ausführlich, wenn  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  die Komponenten von  $\mathbf{v}_0$  heißen

$$(2a) \quad v_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \Delta w.$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & v_{0y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \varphi} v_{0x} - \frac{\partial w}{\partial \psi} v_{0y}; & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial \varphi} v_{0y} + \frac{\partial w}{\partial \psi} v_{0x}; \\ v_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial w}{\partial y} &= (v_{0x}^2 + v_{0y}^2) \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich durch nochmalige Differentiation und Benutzung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_0 &= \frac{\partial v_{0x}}{\partial \varphi} v_{0x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial \psi} v_{0y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial \varphi} v_{0y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial \psi} v_{0x} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{v}_0 = 2\omega_0 &= \frac{\partial v_{0y}}{\partial \varphi} v_{0x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial \varphi} v_{0y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial \psi} v_{0y} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial \psi} v_{0x} = 0 \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\Delta_{xy} w = v_0^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right) = v_0^2 \Delta_{\varphi\psi} w.$$

Die Gleichung (2a) geht daher über in

$$(4) \quad \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \nu \Delta_{\varphi\psi} \right) w = 0.$$

Wie man sieht, hat die Gleichung dieselbe Gestalt wie die Gleichung für  $w$  im Oseenschen Fall (§ 72) und stimmt bis auf die Koordinaten  $\varphi$ ,  $\psi$  vollständig damit überein, wenn man  $2k = \frac{u_0}{\nu}$  durch  $\frac{1}{\nu}$  ersetzt. Wir können daher auch ohne weiteres die oben gegebene Lösung auf den vorliegenden Fall übertragen, desgleichen den gesamten Grenzübergang zu verschwindender Reibung. Als Elementarlösung von (4) können wir wieder ansetzen

$$(5) \quad w_1 = c e^{-\frac{1}{2\nu}(\varphi - \varphi_0)} \cdot \mathbf{K}_0 \left( \frac{R}{2\nu} \right),$$



wo  $R = \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2}$  und  $K_0$  die Hankelsche Funktion nullter Ordnung bedeutet. Wenn  $\varphi_0, \psi_0$  einen Punkt der Randkurve bezeichnet, so läßt sich mit Einführung einer Belegungsfunktion  $f(\varphi_0, \psi_0)$  die Gesamtlösung für  $w$  durch das Randintegral darstellen

$$(5a) \quad w = \int_C f(\varphi_0, \psi_0) e^{-\frac{(\varphi - \varphi_0)}{2\nu}} \cdot K_0\left(\frac{R}{2\nu}\right) ds_0.$$

Für  $\nu \rightarrow 0$  findet man dann, daß  $w$  überall gegen Null konvergiert außer auf den durch

$$\psi = \psi_0, \quad \varphi - \varphi_0 < 0$$

definierten, vom Rand bis ins Unendliche gehenden Stromlinienabschnitten, wo  $w$  von Null verschiedene endliche Werte annimmt. Damit wird die Randkurve in zwei Bereiche geteilt, die „hydrodynamische Vorder-“ bzw. „Rückseite“, und gleichzeitig die Form und Ausdehnung der der Rückseite angeschlossenen Wirbelschleppes festgelegt, die die Gesamtheit aller Punkte der Flüssigkeit umfaßt, für welche  $\varphi < \varphi_0$  ist. Das neue potentialtheoretische Problem ist dann dahin zu charakterisieren, gemäß der Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad (\nu \rightarrow 0),$$

eine Wirbelbelegung auf den Stromlinien ( $\varphi < \varphi_0$ ) der Primärströmung, also  $w$  und die Störung  $\mathbf{v}$  so zu bestimmen, daß auf der Vorderseite

$$(v_{0x} + v_x) \cos(nx) + (v_{0y} + v_y) \cos(ny) = 0,$$

auf der Rückseite

$$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

und im Unendlichen

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

wird.

Die weitere allgemeine Behandlung des Problems, die Gebrauch macht entweder von der Methode des Poissonschen Integrals oder der Integralgleichungen, soll hier nicht gegeben werden. Einige Einzelheiten findet man in dem von Zeilon verfaßten Anhang zu der Oseenschen Hydrodynamik. Zeilon hat auch im besonderen den Fall des im gleichmäßigen Strom rotierenden Zylinders durchgeführt. Als natürlichen Ansatz für die eingeprägte Primärströmung benutzt er die komplexe Stromfunktion

$$(6) \quad \varphi + i\psi = u_0 z + \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg z,$$

die sich in die Teilfunktionen

$$(6a) \quad \varphi = u_0 x - \frac{\Gamma}{2\pi} \mathcal{J}; \quad \psi = u_0 y + \frac{\Gamma}{2\pi} \lg r$$

zerlegt. Das Wirbelgebiet ist dann durch die Gesamtheit der Stromlinien  $\psi$  gebildet, die der Ungleichung

$$r \cos \vartheta - a \cos \vartheta_0 < \frac{\Gamma}{2\pi u_0} (\vartheta - \vartheta_0)$$

entsprechen, wenn  $a$  den Radius des Kreises und  $\vartheta_0$  das Winkelargument eines Kreispunktes bedeuten.

Wir haben in Abb. 104 das Wirbelgebiet für die drei Fälle  $\frac{\Gamma}{2\pi u_0 a} = \frac{\Gamma}{Q} = 2; 3; 3,6$  wiedergegeben, das gegenüber dem Oseenschen Fall mit einer

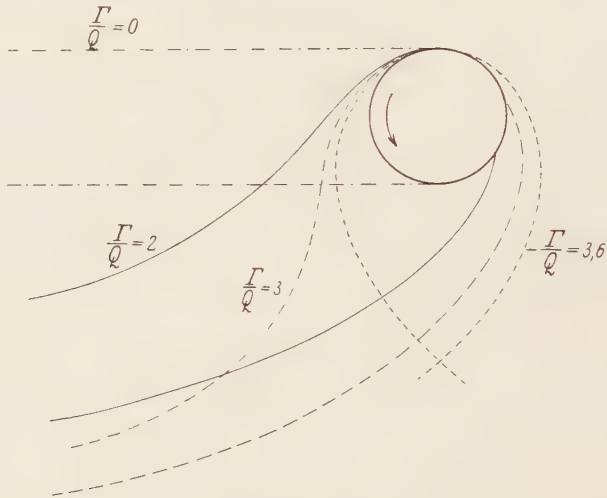


Abb. 104. Grenze des Wirbelgebietes hinter einem Rotor bei verschiedenen Drehgeschwindigkeiten (nach Zeilon).

der Stromrichtung parallelen Kielwasserbegrenzung um so stärker deformiert und verdreht erscheint, je größer die Rotationsgeschwindigkeit ausfällt. Dabei ergibt sich, daß für  $\frac{\Gamma}{2\pi u_0} > a$  die untere Grenze des Kielwassers von einer singulären, den Verzweigungspunkt der Primärströmung ( $x=0, y = -\frac{\Gamma}{2\pi u_0}$ ) enthaltenden Stromlinie gebildet wird.

Mit wachsender Zirkulation  $\Gamma$  verengt sich das Wirbelgebiet nach hinten immer mehr, bis schließlich das Gebiet in der den Doppelpunkt enthaltenden Schleife den Kreiszyylinder berührt, also die beiden Ablösungsstellen mit dem Punkt  $x=0, y=a$  zusammenfallen. Setzen wir  $\frac{\Gamma}{2\pi u_0} = \lambda$ , so ist die Gleichung der unteren Grenzlinie

$$y + \lambda - \lambda \lg \frac{\lambda}{r} = 0.$$

Mit  $y=r=a$  erhält man also für  $\lambda$  die Gleichung

$$\frac{\lambda+a}{\lambda} = \lg \frac{\lambda}{a}$$

oder

$$\frac{\lambda}{a} = e^{1 + \frac{a}{\lambda}}.$$

Das gibt für  $\lambda$  im Falle der zusammenfallenden Ablösungspunkte etwa den Wert  $3,6a$ . Wie die bekannten photographischen Wiedergaben der Strömung in der Umgebung eines Rotors zeigen, stimmt das Ergebnis der Theorie jedenfalls qualitativ mit der Wirklichkeit überein.

### § 83. Druckverhältnisse im Kielwasser. Einführung von Gleitintervallen.

Wie wir bereits oben bemerkt haben, ergibt die asymptotische Theorie von Oseen einen gegenüber der Beobachtung zu großen Widerstandsbeiwert und einen beim Durchgang durch die Kielwassergrenze unstetigen Druckverlauf. Da aber die Größe des Druckes im Kielwassergebiet nicht eindeutig bestimmt ist, so würde es zunächst naheliegen, jedenfalls bei endlichem Sprung eine additive Konstante so hinzuzufügen, daß ein stetiger Übergang des Druckes entsteht. Der damit gewonnene Widerstandswert kommt der Wirklichkeit wesentlich näher. Wir wollen aber im Anschluß an Zeilon<sup>1)</sup> die Diskussion des Druckes noch etwas genauer verfolgen.

Wenn man für die Relativströmung wieder den Ansatz macht

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - u_0,$$

so ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für den Druck der Ausdruck

$$(1) \quad q' = 2\rho \int [v'_y w' dx - v'_x w' dy],$$

der bei der Oseenschen Vernachlässigung übergeht in

$$(1a) \quad q' = 2\rho u_0 \int w' dy; \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0.$$

Die Druckbestimmung wird fehlerhaft, wenn der von  $u_0$  freie Bestandteil des Integrals (1) bedeutende Werte annimmt. An der Oberfläche des Körpers ist nun bei Oseen entweder  $w' = 0$  (vorn) oder  $v'_y = 0$  (hinten). Man sieht also, daß der Fehler mit der nicht überall zulässigen Vernachlässigung des Produktes  $v_x w'$  zusammenhängt, dessen einer Faktor  $w'$  an der Grenze des Wirbelgebietes sogar unendlich groß wird. Da aber  $v_y$

<sup>1)</sup> N. Zeilon, Beiträge zur Theorie des asymptotischen Flüssigkeitswiderstandes, Nova Acta Regiae Societatis Scient. Upsaliensis, Uppsala 1927, S. 22f.

in diesem Gebiet verschwindet, so sind wir jedenfalls berechtigt, an der Annahme festzuhalten, daß die Wirbelkonvektion der  $x$ -Achse parallel erfolgt. Auch bei der von Zeilon herrührenden Abänderung der Oseen-Strömung bleibt die Gleichung  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  im wesentlichen erhalten.

Diese Abänderung besteht nun darin, eine modifizierte Potentialströmung  $-u_1(y)$  einzuführen, die außerhalb des Kielwassers mit  $-u_0$  identisch wird und am Kielwasserrand stetig in  $-u_0$  übergeht. Dann haben wir mit den Oseenschen Vernachlässigungen beim Grenzübergang  $\nu \rightarrow 0$

$$(2) \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad q' = 2\varrho \int u_1(y) w' dy, \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0.$$

Während also das Oseensche Potentialproblem das gleiche bleibt, ist der Druck im Kielwasser von der Wahl der Primärströmung  $u_1(y)$  abhängig.

Um den vollständigen Differentialgleichungen wenigstens in der Nähe des Körpers möglichst gut gerecht zu werden, nimmt Zeilon einen Teil der rotorbehafteten geradlinigen Bewegung im Kielwasser zur Primärströmung hinzu oder setzt  $u_1(y)$  gleich der gesamten Relativbewegung  $u_r$  des Wirbelabflusses an der Körperrückseite. Die Gleichungen (2), die damit Gültigkeit behalten, ergeben dann wegen des Haftens der Relativströmung an der Rückseite

$$(2a) \quad \frac{dq'}{dx} = 0, \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0, \quad q' = \text{const.}$$

Die absolute Größe des Kielwasserdruckes bleibt aber weiter noch unbestimmt. Um den eigentlichen Grund dieser Unbestimmtheit, die Unstetigkeit an der Grenze, wo  $w \rightarrow \infty$ , zu beseitigen, ersetzt nun Zeilon die Oseensche Strömung durch eine von ihr nur wenig abweichende Strömung, welche dadurch ausgezeichnet ist, daß der Übergang von der Gleitung außerhalb zur Haftung innerhalb des Kielwassers in kleinen, den kritischen Punkten angeschlossenen, sogenannten Gleitintervallen stetig erfolgt, wobei die Kleinheit der Intervalle eine nur geringfügige Abweichung der Wirbelkonvektion von der  $x$ -Richtung gewährleistet. Bestimmt man dabei den Druck aus der Gleichung (2) und läßt die Größe der Gleitintervalle nachträglich nach Null konvergieren, so kann man auch die noch unbestimmte Konstante bei der Druckbestimmung im Oseenschen Fall ermitteln.

Setzt man also, um diesen Grenzübergang durchzuführen, nach § 72 für die Kielwasserströmung

$$-u_1(y) = v_1 - u_0 + v_k(y) = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + v_k(y),$$

so wird an der Rückseite des Körpers, etwa eines Kreiszyinders,

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + v_k(y) \cos \vartheta = 0.$$

Da ferner

$$2w = -\frac{\partial v_k}{\partial y},$$

so haben wir das kleine Gleitintervall

$$(3) \quad q' = 2\rho \int u_1(y) w'(y) dy = \rho \int u_1 du_1 = \frac{\rho}{2} \int d(u_1^2),$$

da die Potentialkomponente sich nur wenig ändert, also

$$dv_k \approx dv_1' + dv_k = -du_1$$

gesetzt werden darf. An der Grenze des Gleitintervalls ist aber  $u_1^2 = 0$ ; infolgedessen behält der Druck bei stetigem Übergang durch die Kielwassergrenze seinen durch die Potentialbewegung an der Stelle  $\vartheta = 90^\circ$  bestimmten Wert auf der Rückseite bei. Nun haben wir für  $\vartheta = 90^\circ$ , wenn der Druck in der ungestörten Strömung gleich Null gesetzt wird, für den Fall des Kreiszyinders

$$u_1 = -(v_1 - u_0) = u_0 - v_1 = \sqrt{2} u_0,$$

also

$$q' = \frac{1}{2} \rho u_0^2,$$

woraus sich der Kielwasserdruck ergibt

$$p = \frac{1}{2} \rho (u_0^2 - u_1^2) = -\frac{1}{2} \rho u_0^2.$$

Wenn man den Widerstand berechnet, der dieser stetigen, in der Abb. 89 als Kurve I dargestellten Druckverteilung entspricht, so erhält man nach Zeilon den Wert

$$c_w = 0,523,$$

der etwa um 7% größer ausfällt als der oben angegebene korrigierte Zeilonsche Wert, der einem veränderlichen Kielwasserdruck entspricht.

### § 84. Endliche Gleitintervalle für den Fall des Kreiszyinders.

Zur weiteren Vervollständigung des Ansatzes und zur Vermeidung der Unstetigkeit an der Grenze des Wirbelgebietes führt Zeilon endliche von  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$  bis  $\vartheta = \pm \alpha$  ( $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ) reichende Gleitintervalle ein, längs deren die Tangentialgeschwindigkeit am Zylinder stetig auf den Wert Null herabsinkt. Dabei sollen die Intervalle so klein angesetzt werden, daß die geänderte Strömung nur wenig von der Oseenströmung, also insbesondere die Wirbelkonvektion nur wenig von der negativen

$x$ -Richtung abweicht. Wenn wir die Relativströmungsgeschwindigkeit mit Strichen bezeichnen, so haben wir noch für die Oseenströmung, d. h. ohne Vorhandensein von Gleitintervallen auf der Vorderseite des Zylinders, d. h. für  $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ,

$$J(G(z)) = \psi(\vartheta) = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \operatorname{arctg} \left( -\frac{v'_y}{v'_x} \right),$$

auf der Hinterseite, d. h. für  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$ ,

$$\psi = 0.$$

$\psi$  ist dann der Winkel, den die Stromlinien mit der negativen  $x$ -Richtung bilden.

Führt man nun das Gleitintervall ein, so sind die Randbedingungen in der Weise abzuändern, daß in diesem Bereich  $\psi$  um eine zusätzliche, noch näher zu bestimmende „Ablenkungsfunktion“  $\psi_1(\vartheta)$  ergänzt, also  $\psi$  durch  $\psi + \psi_1$  und entsprechend die im komplexen Geschwindigkeitsausdruck vorkommende Funktion  $G(z)$  durch  $G(z) + G_1(z)$  ersetzt wird. Man erkennt daher, daß die zusätzliche Funktion  $G_1(z)$  aus dem Poissonschen Integral als Funktion zu bestimmen ist, deren Imaginärteil auf dem (Einheits-) Kreis längs des Gleitintervalls die Werte  $\psi_1(\vartheta)$  annimmt. Man erhält daher nach § 74

$$\begin{aligned} G_1\left(\frac{z}{a}\right) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \psi_1(\vartheta') \frac{1 + \frac{z}{a} e^{-i\vartheta'}}{1 - \frac{z}{a} e^{-i\vartheta'}} d\vartheta' \\ (1) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \psi_1(\vartheta') \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta) d\vartheta', \end{aligned}$$

wobei  $\psi_1(\vartheta')$  im Intervall  $a < \vartheta' < 2\pi - a$  verschwinden soll.

Die neue komplexe Geschwindigkeit der absoluten Potentialströmung wird daher

$$(2) \quad V = u_0 \left[ 1 - \frac{e^{G\left(\frac{z}{a}\right) + G_1\left(\frac{z}{a}\right)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - i \frac{a}{z} \frac{-i}{+i} \right) \right].$$

Für den Betrag der Relativgeschwindigkeit längs des Kreises hat man

$$(2a) \quad |V'| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = e^{G(\vartheta) + G_1(\vartheta)} \cdot \frac{|2 \sin \frac{\vartheta}{2}|}{\cos \left( \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}.$$



Zeilon macht nun für die Ablenkungsfunktion, die zunächst willkürlich bleibt, den für die Ausführung der Integration zweckmäßigen Ansatz

$$(3) \quad \psi_1(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2(\vartheta - \alpha)}{\cos^2 \alpha},$$

der den Randbedingungen genügt; denn es ist

$$\begin{aligned} \psi_1 = 0 & \quad \text{für} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \vartheta = \alpha, \\ \frac{d\psi_1}{d\vartheta} = 1 & \quad \text{für} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{d\psi_1}{d\vartheta} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \alpha. \end{aligned}$$

Die Stromlinien des Potentialfeldes bilden daher auf der Körperrückseite mit der negativen  $x$ -Richtung den Winkel  $\psi_1$ , der an der Grenze des Gleitintervalls verschwindet, und gehen erst in größerem Abstand vom Zylinder in Parallele zur  $x$ -Achse über. Um die Randbedingungen im Kielwasser zu erfüllen, muß eine (rotorbehaftete) Kielwasserströmung  $v_k$  parallel zur  $x$ -Achse hinzugefügt werden. Da die resultierende Normalkomponente der Relativströmung verschwinden muß, so hat man

$$(v'_n)_{II} = v_k \cdot \cos \vartheta - (v'_n)_I = 0.$$

Nun ist

$$(v'_n)_I = |V'| \cos(\pi - \vartheta + \psi_1) = |V'| \cos(\vartheta - \psi_1).$$

Daher hat man

$$(4) \quad v_k = \frac{|V'| \cos(\vartheta - \psi_1)}{\cos \vartheta},$$

und es ergibt sich als resultierende Geschwindigkeit in der  $x$ - und  $y$ -Richtung

$$(v'_x)_{II} = -|V'| \cos \psi_1 + \frac{|V'| \cos(\vartheta - \psi_1)}{\cos \vartheta} = |V'| \operatorname{tg} \vartheta \sin \psi_1,$$

$$(v'_y)_{II} = -|V'| \cdot \sin \psi_1,$$

ferner

$$(v'^2_x)_{II} + (v'^2_y)_{II} = \frac{V'^2 \sin^2 \psi_1}{\cos^2 \vartheta}.$$

Schließlich gewinnt man für den Druck den Ausdruck

$$(5) \quad p = q - \frac{\rho}{2} \frac{V'^2 \sin^2 \psi_1}{\cos^2 \vartheta}.$$

Im Gleitintervall ändert sich der Druck nach der Formel (3) des § 83 um

$$q = \int (v'_x)_{II} dv_k.$$

Wir geben die von Zeilon berechnete Tabelle der Geschwindigkeitsverteilung im Kielwasser für den besonderen Fall  $\alpha = 110^\circ$ . Der Druckverlauf, der teilweise durch mechanische Integration bestimmt ist, ist in der Abb. 89 als Kurve II dargestellt.

Tabelle für die Geschwindigkeiten im Gleitintervall ( $\alpha = 110^\circ$ ) an der Rückseite eines Kreiszyinders.

$\beta^\circ$	$\psi_1$	$v'_w$	$ V' $	$v_k$	$(v'_w)_{II}$
90°	0	1,414	1,467	0,00	-1,467
94	2°36'	1,324	1,362	0,478	-0,883
98	2°58'	1,283	1,278	0,805	-0,472
102	1°58'	1,247	1,217	1,022	-0,195
106	0°35'	1,225	1,199	1,157	-0,042
110	0°	1,207	1,205	1,205	0,00

Da in diesem Fall das Druckminimum stärker geworden ist gegenüber dem Grenzfall  $\alpha - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ , so ergibt sich ein Widerstandsbeiwert

$$c_w = 0,388,$$

der kleiner ist als der oben angegebene und bereits dem nach dem Abfall erreichten Minimum des Widerstandes sehr nahe kommt.

Eine weitere Annäherung an die wirkliche Druckverteilung, die einer fast völligen Übereinstimmung mit den in Göttingen und Berlin experi-

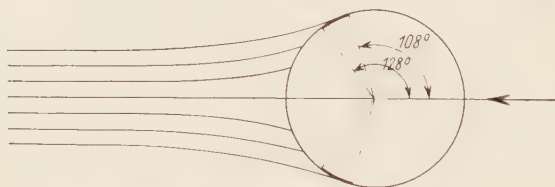


Abb. 105. System der Wirbelbahnen hinter einem Kreiszyinder bei Einführung von Gleitintervallen (nach Zeilon).

mentell festgestellten Werten gleichkommt, hat Zeilon erreicht durch Einführung eines nicht mehr in den Führungslinien, sondern längs Hyperbeln strömenden Kielwassers und eines von  $108^\circ$ — $128^\circ$  reichen-

den Gleitintervalls (Abb. 105). In der Abb. 89 sind die entsprechenden theoretischen Größen durch die Zahl III gekennzeichnet worden.

Wie erfreulich diese Ehrenrettung der theoretischen Hydrodynamik auch ist, so hat man doch, auch von mathematischer Seite, gelegentlich darauf hingewiesen, daß die Zeilonschen Ansätze mit mancher Willkür behaftet sind und daß der Zusammenhang mit der asymptotischen Theorie Oseens, die doch den ersten Ausgangspunkt bildete, in gewissem Sinne aufgelöst oder jedenfalls gestört erscheint (Noether). Von mechanischer Seite könnte man ferner die kritische Anmerkung machen, daß die Verbesserung des Oseenschen Ergebnisses nicht auf eine empirische Festsetzung, eben der Ablösungsstelle als des Kielwasserursprunges, Rücksicht nimmt (Prandtl). Trotz dieser Mängel behält

aber die Zeilonsche Theorie ihre große Berechtigung insofern, als sie den Einfluß der Gleitintervalle oder der verhältnismäßig geringfügigen Änderung der Haftungsbedingungen ihrer Größenordnung nach genau festzulegen gestattet und eine Reihe von bemerkenswerten Fällen, die dem Oseenschen Grenzfall benachbart sind, anzusetzen gelehrt und damit eine Anregung gegeben hat zu einer vertieften Verbindung mit der physikalischen Richtung der Hydrodynamik und vielleicht zu einer Erweiterung der Grenzschicht- und Turbulenztheorie. In diesem Sinne scheint es besonders begrüßenswert, daß auch in der Göttinger Schule neuerdings die Aufgabe in Angriff genommen wird, die Verhältnisse im Kielwasser oder „Windschatten“ eines bewegten Körpers physikalisch und mathematisch aufzuklären und damit der Lösung des Problems des Formwiderstandes näher zu kommen. Es ist zu hoffen, daß damit auch die schönen Arbeiten der Oseenschen Schule eine weitere Fortentwicklung erleben werden<sup>1)</sup>.

## ZWÖLFTES KAPITEL.

### Ergebnisse der Turbulenztheorie.

#### § 85. Stabilität und Turbulenz.

1. Im Laufe der bisherigen Untersuchungen haben wir mehrfach auf den besonders technisch bedeutungsvollen Unterschied zwischen zwei Strömungsformen hingewiesen, die als laminar und turbulent bezeichnet wurden. Wir hatten gesehen, daß die stationäre laminare Strömung, etwa zwischen zwei parallelen ebenen Wänden oder in einem zylindrischen Rohr, die sich mathematisch als das einfachste Integral der Stokes'schen Gleichungen beschreiben läßt, in Wirklichkeit nur unter der Bedingung bestehen kann, daß die auf den Vorgang bezogene Reynoldssche Zahl unterhalb eines gewissen kritischen Wertes  $R_k$  gelegen ist. Bei einer Vergrößerung dieser Zahl verwandelt sich der laminare in den turbulenten Zustand, der mathematisch nicht mehr mit den üblichen Mitteln formuliert werden kann. Bei verschiedenen Versuchen (z. B. E. Bose und W. Sorkau) hat sich sogar gezeigt, daß das Übergangsgebiet vom laminaren zum turbulenten Zustand sich in mehrere scharf getrennte Zustandsgebiete zerlegen läßt, die man als Turbulenz I, Turbulenz II

---

<sup>1)</sup> Einen vollständigen Überblick über alle widerstandstheoretischen Fragen gibt F. Eisner, Das Widerstandsproblem, Verhandl. des Intern. Kongr. für techn. Mechanik, Stockholm 1930.

usw. bezeichnet hat. Sie unterscheiden sich voneinander besonders durch das Verteilungsgesetz der mittleren Geschwindigkeit und durch die Abhängigkeit des Druckgefälles von der Durchströmungsmenge<sup>1)</sup>.

Es ergibt sich nun die hydrodynamisch wichtige Frage, ob das empirisch gefundene Gesetz für den Übergang von einer Bewegungsform in die andere aus den Grundgleichungen selbst ableitbar oder an welche mathematischen Bedingungen das Eintreten des turbulenten Zustandes geknüpft ist. Da der laminare Zustand, sofern die Reynoldssche Zahl kleiner als der kritische Wert ist, bei jeder Störung sich selbst erhält, so kann man ihn als stabil bezeichnen. Durch vorsichtiges Vergrößern etwa der Geschwindigkeit kann man es erreichen, daß auch nach Überschreiten der kritischen Reynoldsschen Zahl der laminare Zustand bestehen bleibt. Da aber die geringste Störung ausreichen würde, um einen plötzlichen Umschlag in die wirbelnde Bewegungsart hervorzurufen, so kann man den laminaren Abfluß oberhalb  $\mathfrak{R}_k$  nicht mehr als stabil, muß ihn vielmehr als labil bezeichnen. Man sieht also, daß das Problem der Turbulenz unmittelbar mit dem Problem der hydrodynamischen Stabilität zusammenhängt. Dieses Problem kommt aber darauf hinaus, zu untersuchen, ob eine Abhängigkeit zwischen Stabilität und Reynoldsscher Zahl auffindbar ist oder allgemein, welche Bedingungen vorhanden sind, damit ein stabiler Strömungszustand hergestellt werden kann.

Im Anschluß an die sonstigen Methoden der Stabilitätstheorie hat man seit Rayleigh<sup>2)</sup> und Kelvin<sup>3)</sup> die Untersuchungen so geführt, daß man der bisher allein berücksichtigten „Hauptströmung“ eine sekundäre instationäre und mit den Bewegungsgleichungen vereinbare kleine Schwingungsbewegung überlagert und feststellt, ob diese Störung den Charakter kleiner periodischer Schwingungen, die möglicherweise mit der Zeit (durch die Reibung) abnehmen oder den Charakter einer Exponentialbewegung hat, die sich mit der Zeit vergrößert. Diese Methode der kleinen Schwingungen ist von mehreren Autoren auf verschiedene Probleme angewendet worden. Die erste und ausführlichste Behandlung des sogenannten Couetteschen Falles rührt wohl von W. M. F. Orr<sup>4)</sup> und A. Sommerfeld<sup>5)</sup> her. Später

<sup>1)</sup> Vgl. den zusammenfassenden Bericht v. F. Noether, Das Turbulenzproblem, Z. f. a. M. M. Bd. I (1921), S. 125—138, wo die Literatur sehr ausführlich angegeben ist.

<sup>2)</sup> Philos. Mag. (5, 34), 1892; Papers III, S. 575.

<sup>3)</sup> Philos. Mag. (5, 24) 1887, S. 188 u. 272.

<sup>4)</sup> W. M. F. Orr, Proc. of the Royal Irish Acad. XXVII (A), 1907, I, S. 9ff; II, S. 69ff.

<sup>5)</sup> A. Sommerfeld, Atti del IV. Congr. intern. dei Matematici, Roma, 1908.

haben v. Mises<sup>1)</sup> und L. Hopf<sup>2)</sup> den strengen Stabilitätsnachweis für die Hauptströmung erbracht. Hopf hat außerdem im Anschluß an die Sommerfeldsche Arbeit eine ausführliche Diskussion der Schwingungsformen gegeben und interessante Unterschiede für die durch die Reynoldsschen Zahlen abgegrenzten Zustandsbereiche aufgedeckt. Die entsprechende Stabilitäts- und geometrische Untersuchung des Poiseuille'schen Strömungsfalles im Kreisrohr verdankt man Th. Sexl<sup>2)</sup>. Die theoretische Ergänzung der von Mallock und Couette angestellten Versuche zu dem Fall zweier gegeneinander rotierender konzentrischer Zylinder ist neuerdings von G. J. Taylor<sup>2)</sup> in einer großen und bemerkenswerten Arbeit gegeben worden, die zwar das Problem der Turbulenz noch nicht aufklärt, wohl aber mehrere Resultate liefert (unter anderen auch den Einsatz, sowie die Anordnung und Größe der Zerfallwirbel), die sich auch quantitativ in guter Übereinstimmung mit den Taylorschen Versuchen befinden.

2. Um den grundlegenden Ansatz für den ebenen Fall zu geben, gehen wir etwa aus von der in § 4, S. 15 abgeleiteten Gleichung für die Stromfunktion

$$(1) \quad F(\Psi) = \frac{\partial \mathcal{A}\Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}\Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{A}\Psi}{\partial x} - \nu \mathcal{A}\mathcal{A}\Psi = 0.$$

Wenn wir dimensionslose Größen einführen, d. h. alle Längen auf eine konstante Abmessung und alle Geschwindigkeiten auf eine konstante Normalgeschwindigkeit beziehen, so nimmt die Gleichung eine Form an, die sich von (1) dadurch unterscheidet, daß  $\nu$  durch den Wert  $\frac{1}{\Re}$  zu ersetzen ist. Sei nun  $V_x(y) = V$ ,  $V_y = 0$  bzw.  $\Psi_0$  die Geschwindigkeit bzw. Stromfunktion der laminaren Hauptströmung, und sei

$$v'_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v'_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

die zu überlagernde, als zweidimensional vorausgesetzte Störungsbewegung, so können wir

$$v_x = V + v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad \Psi = \Psi_0 + \psi$$

setzen. Berücksichtigt man ferner die Gleichung

$$F(\Psi_0) = 0$$

und vernachlässigt die Glieder, welche  $\psi$  und die Ableitungen in höherer als erster Potenz enthalten, so kommt

$$(2) \quad \frac{\partial \mathcal{A}\psi}{\partial t} + V \frac{\partial \mathcal{A}\psi}{\partial x} - \frac{d^2 V}{dy^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \mathcal{A}\mathcal{A}\psi.$$

<sup>1)</sup> R. v. Mises, Heinrich-Weber-Festschrift, 1912, S. 252; Jahresber. der deutschen Mathem. Ver. XXI, 1912, S. 241.

<sup>2)</sup> Die entsprechenden Literaturangaben finden sich in den folgenden Paragraphen.



Wenn man nun unter Voraussetzung kleiner Oszillationen setzt

$$\psi = f(y) e^{i(\beta t - kx)},$$

so ergibt sich durch Einsetzen von (2) für  $f$  die Differentialgleichung

$$(3) \quad i \left[ (\beta - kV) \left( \frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 f \right) + kf \frac{d^2 V}{dy^2} \right] = v \left[ \frac{d^4 f}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + k^4 f \right],$$

die noch durch die Randbedingungen zu ergänzen ist, die besagen, daß die Störungsbewegung an den Rändern verschwinden muß. Setzt man

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad k = k_1 + ik_2,$$

so bedeutet  $\beta_1$  die zeitliche Frequenz,  $\frac{\beta_1}{k_1}$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung und  $\beta_2$  die Dämpfungszahl. Nun gelangt man mit Hilfe von vier partikulären Integralen von (3) und den beiden Randbedingungen zu einer sogenannten Säkulargleichung für  $\beta$ , die außerdem  $k$  und  $v$  enthält. Unser Problem ist also auf die mathematische Fragestellung zurückgeführt, ob unter den Wurzeln dieser Gleichung für beliebige Werte von  $k$  und  $v$  (bzw.  $\Re$ ) solche vorkommen können, die einen negativen imaginären Bestandteil haben. Nur in diesem Falle würde die Störungsbewegung instabil sein. Wir wollen den Gang der weiteren Untersuchungen an dem einfachsten Beispiel deutlich machen.

## § 86. Stabilität der Strömung zwischen ebenen Wänden<sup>1)</sup>.

Wir haben bereits früher § 9 als einfachsten Fall die Strömung zwischen zwei ebenen Wänden betrachtet, von denen die eine ruht, während die andere sich mit der Geschwindigkeit  $U_0$  bewegt. Dann ist, wie damals gezeigt, für die stationäre und laminare Hauptströmung die Geschwindigkeit eine lineare Funktion der senkrecht zu den Ebenen gezählten Koordinate

$$V_x = V = \frac{U_0 y}{h}.$$

In diesem einfachsten Falle wird  $\frac{d^2 V}{dy^2} = 0$ , und die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen erhält die Form

$$v \mathcal{A} \mathcal{A} \psi = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} \psi + \frac{U_0 y}{h} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A} \psi.$$

Mit den dimensionslosen Variablen

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{U_0}{h} t, \quad \Re = \frac{U_0 h}{\nu}$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa L. Hopf, Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit, Ann. d. Physik, Bd. 44 (1914), S. 1—60.



erhält man

$$(2a) \quad \Delta \Delta \psi = \Re \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \psi + \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \psi \right].$$

Setzt man  $\Delta \psi = \chi$ , so kommt als Gleichung für  $\chi$

$$\Delta \chi = \Re \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \chi.$$

Mit der Substitution

$$(3) \quad \psi = e^{i(\beta\tau - k\xi)} f(\eta); \quad \chi = e^{i(\beta\tau - k\xi)} \varphi(\eta)$$

erhält man schließlich für  $f$  und  $\varphi$  die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - k^2 \varphi = i \Re(\beta - k\eta) \varphi, \\ \frac{d^2 f}{d\eta^2} - k^2 f = \varphi. \end{cases}$$

Setzen wir

$$z = \frac{k^2 + i \Re(\beta - k\eta)}{(k \Re)^{\frac{2}{3}}},$$

so entsteht die Gleichung

$$(5) \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + z \varphi = 0,$$

die sich mit Hilfe von Zylinder- oder Besselschen Funktionen mit dem Index  $\frac{1}{3}$  auflösen läßt. Man erhält die Lösungen

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = z^{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right), \\ \varphi_2 = z^{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right). \end{cases}$$

Wenn man  $z$  einführt und

$$\lambda^3 = \Re$$

setzt, so geht die Gleichung für  $f$  über in

$$(7) \quad \frac{d^2 f}{dz^2} + \lambda^2 f + \frac{\lambda^2}{k^2} \varphi_1 = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $\sin \lambda z$  und  $\cos \lambda z$ , so erhält man

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dz} \left( \frac{df}{dz} \sin \lambda z - \lambda f \cos \lambda z \right) + \frac{\lambda^2}{k^2} \varphi_1 \sin \lambda z = 0, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{df}{dz} \cos \lambda z + \lambda f \sin \lambda z \right) + \frac{\lambda^2}{k^2} \varphi_1 \cos \lambda z = 0. \end{cases}$$

Integriert man und eliminiert  $\frac{df}{dz}$ , so kommt

$$(9) \quad f_1 = c \cos \lambda z + d \sin \lambda z + \frac{\lambda}{k^2} \int \varphi_1(z') \sin \lambda(z' - z) dz'.$$

Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich für  $f_2$ . Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$(10) \quad f = C e^{i\lambda z} + D e^{-i\lambda z} + A f_1 + B f_2,$$

wobei die noch verfügbaren Konstanten aus den Grenzbedingungen zu bestimmen sind, die in unserem Falle lauten

$$f = 0, \quad \frac{df}{d\eta} = 0 \quad \text{für} \quad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 1.$$

Wenn  $z_0$  und  $z_1$  die Werte der Variablen  $z$  für  $\eta=0$  und  $\eta=1$  bedeuten, so verschwinden die Funktionen  $f_1(z_0)$  und  $f_2(z_0)$  sowie ihre Ableitungen, wenn wir  $z_0$  als untere Grenze der Integrale (9) nehmen. Da dann  $C=D=0$  wird, so ergibt sich schließlich zur Bestimmung von  $\beta$  die einfache Gleichung

$$(11) \quad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_1) \\ f_1'(z_1) & f_2'(z_1) \end{vmatrix} = 0,$$

die bei gegebenem  $k$  und  $\Re$  die zugehörigen Werte  $a$  liefert. Die vollständige Diskussion dieser Gleichung, die notwendig langwierig ausfallen muß und von Hopf bis in alle Einzelheiten hinein durchgeführt ist, ergibt nun das wesentliche Resultat, daß für beliebige  $k$  und  $\Re$  nur solche  $\beta$  existieren, deren imaginärer Teil größer als Null ist, daß also in jedem Falle die möglichen Störungen gedämpft werden, oder daß die Hauptströmung sich stabil verhält. Wenn  $\beta$  bekannt ist, so kennt man das Verhältnis  $\frac{B}{A}$  und damit die Funktion  $f$ , die die Stromfunktion und das System der Stromlinien liefert. Die Untersuchung der Funktion  $f$  führt nun zu einer Orientierung über den Verlauf der Störungsbewegung, der wesentlich durch die Größenordnung von  $\Re$  bzw. von  $k\Re$  bestimmt ist. Hopf untersucht dabei drei Typen von Schwingungsbewegungen. Wenn  $k\Re$  klein, also die Reynoldssche Zahl klein oder die Wellenlänge groß (reeller Teil von  $z_0$  negativ) wird, so ist die Dämpfung in erster Näherung nicht von  $\Re$  abhängig, d. h. die Störungen verhalten sich wie Schwingungen ruhenden Wassers. Das System der die ganze Schicht erfüllenden zirkulierenden Grundschwingungen und ihrer stark gedämpften Oberschwingungen, die sich nur auf einen Teil der Schicht ausdehnen, ist zu vergleichen mit der Schwingungsfigur einer Saite, deren Knotenpunkte die ganze Länge nach rationalen Zahlen aufteilen (vgl. Abb. 106). Diese Schwingungsform kann als Grenzfall eines zweiten Schwingungstypus aufgefaßt werden, der bei mittlerer Größe von  $k\Re$  auftritt ( $z_0$  und  $z_1$  konjugiert komplex) und dadurch charakterisiert ist, daß das ganze Strombild kontinuierlich im Sinne des Geschwindigkeitsabfalles in der Hauptströmung verzerrt erscheint (Abb. 107).

Prinzipiell verschiedenes und nicht mehr durch Grenzübergang aus den ersten beiden Fällen ableitbares Verhalten zeigen die in Abb. 108 dargestellten Schwingungen vom dritten Typus ( $z_0$  und  $z_1$  konstant). Bei größeren Werten von  $k\mathfrak{R}$  drängt sich die ganze Störungsbewegung auf einen immer enger werdenden Bereich in der Nachbarschaft der Wände zusammen, wobei die Vorgänge an den Wänden mehr und mehr voneinander unabhängig werden. Je größer  $k\mathfrak{R}$  wird, desto mehr Oberschwingungen nehmen den Charakter des dritten Typus an, bis schließlich die gesamte Strömung sich in mehrere Stromschichten aufteilt, deren

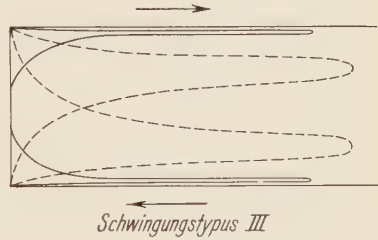
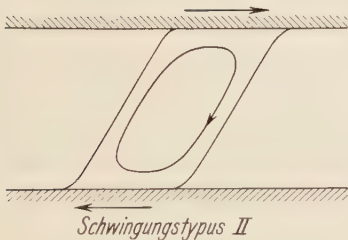
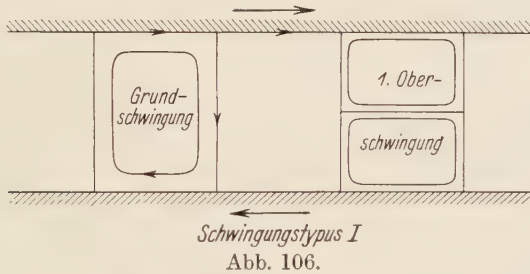


Abb. 106—108. Schwingungsbewegung auf einer Strömung zwischen ebenen Wänden.

Phasen und Amplituden unabhängig voneinander sind und eine um so schwächere Dämpfung zeigen, je näher sie der Wand liegen. Jede Schicht nimmt ferner die Störung mit der in ihr herrschenden Hauptgeschwindigkeit mit, während die Schwingungen des ersten und zweiten Typus bei kleineren  $k\mathfrak{R}$  mit der mittleren Geschwindigkeit der Hauptströmung weitergeführt werden. Für den damit erreichten Grenzfall verschwindender Zähigkeit oder unendlich großer Reynoldsscher Zahl ergibt sich aus der ersten Gleichung (4)

$$\beta - k\eta = 0, \quad \beta = k\eta.$$

Die jedem  $\eta$  entsprechende Störung wird also von der Schicht unverändert mitgenommen und verläuft unbekümmert um die Störungen in den Nachbarschichten.

### § 87. Die Stabilität der Poiseuilleströmung.

1. Die in § 85 gegebenen Gleichungen für den ebenen Fall lassen sich leicht mit Hilfe der Umrechnungsformeln auf Zylinderkoordinaten übertragen<sup>1)</sup>. Mit

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}$$

erhalten wir nach § 8 für  $\mathcal{V}$  die Differentialgleichung

$$(1) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) D^2 \mathcal{V} = \nu D D^2 \mathcal{V},$$

wo  $D$  die Operation

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

bedeutet und  $\nu$  bei dimensionslosen Größen durch  $\frac{1}{\Re}$  zu ersetzen ist.

Denkt man sich nun wieder der bekannten laminaren Hauptströmung eine beliebige zweidimensionale Störungsbewegung überlagert, setzt also

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \psi = -\int r V dr + \psi$$

und vernachlässigt die quadratischen und höheren Glieder von  $\psi$ , so ergibt sich

$$(2) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) D^2 \psi - \left( \frac{d^2 V}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu D D^2 \psi.$$

In diesem Falle haben wir aber für die Geschwindigkeit der Hauptströmung einen in  $r$  quadratischen Ausdruck

$$V = A(r_0^2 - r^2).$$

Setzt man diesen Ausdruck in (2) ein, so bleibt

$$(2a) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} + A(r_0^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} \right] D^2 \psi = \nu D D^2 \psi.$$

Der oben bereits benutzte Ansatz

$$\psi = f(r) e^{i(\beta t - k z)}, \quad D^2 \psi = g(r) e^{i(\beta t - k z)}$$

führt aber durch Einsetzen in (1) zu den beiden Differentialgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{i}{\nu} [\beta - k A(r_0^2 - r^2)] g = \frac{d^2 g}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - k^2 g, \\ \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = g. \end{cases}$$

Die Randbedingungen besagen, daß  $\frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{r} \frac{df}{dr}$  am Rohrfumfang ( $r = r_0$ ) verschwinden und  $r=0$  keine Singularität sein soll.

<sup>1)</sup> Vgl. Th. SEXT, Zur Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen und Couetteschen Strömung, Ann. d. Physik, IV. Bd. 83, 1927, S. 835; ferner Ann. d. Physik, IV. Bd. 84, 1927, S. 807.

2. Bevor wir die Resultate der Diskussion der Gleichungen angeben, wollen wir zwei Spezial- bzw. Grenzfälle kurz betrachten, nämlich den Fall reibungsloser ( $\nu=0$ ) und ruhender zäher Flüssigkeit ( $A=0$ ).

Im ersten Falle gibt (2a)

$$(4) \quad \left( \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f \right) (\beta - kA(r_0^2 - r^2)) = 0,$$

während  $\frac{f}{r}$  für  $r=0$  endlich sein und für  $r=r_0$  verschwinden soll. Die Gleichung

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0$$

wird, wie wir bereits früher bemerkt haben, durch Besselsche Funktionen 1. Ordnung mit imaginärem Argument gelöst in der Form

$$f = rB_1(ikr) = r[CJ_1(ikr) + DH_1^{(1)}(ikr)] = r[CI_1(kr) + DK_1(kr)].$$

Da die (Hankelsche) Funktion  $K_1$  für kleine Argumente wie  $\frac{1}{r}$  unendlich wird, muß  $D=0$  gesetzt werden, und da ferner  $I_1(kr)$  keine reelle Nullstelle im Endlichen hat, so muß auch  $C=0$  sein. Es bleibt also nur die singuläre Lösung

$$\beta = kA(r_0^2 - r^2),$$

bei der aber komplexe  $\beta$  ausgeschlossen sind. Damit ist wieder das früher angegebene Resultat plausibel gemacht, daß an der Grenze bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen nur Schwingungen auftreten, die auf eine Schicht  $r=\text{const}$  konzentriert bleiben und mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung fortschreiten.

Wenn die Flüssigkeit zähe ist, aber ruht, so sind die Störungsbewegungen der Gleichung

$$\left( D - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right) D\psi = 0$$

zu entnehmen. Da die Operationen  $D$  und  $D - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}$  vertauschbar sind, erhält man die allgemeine Lösung als lineare Kombination der Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  der beiden Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} Df_1 \equiv \frac{d^2 f_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} - k^2 f_1 = 0, \\ \left( D - \frac{i\beta}{\nu} \right) f_2 \equiv \frac{d^2 f_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} + k'^2 f_2 = 0, \end{cases}$$

wo  $\vartheta = \frac{\beta}{i}$  als positiv anzunehmen und  $\frac{\beta}{\nu} = -k^2 - k'^2$  gesetzt ist. In den allgemeinen Integralen

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{f_1}{r} = c_1 J_1(ikr) + d_1 H_1^{(1)}(ikr), \\ \frac{f_2}{r} = c_2 J_1(k'r) + d_2 H_1^{(1)}(k'r) \end{cases}$$

muß man, da  $\frac{f}{r}$  für  $r=0$  endlich bleiben soll,  $d_1 - d_2 = 0$  setzen. Dann fordern die Randbedingungen das Verschwinden der Determinante

$$(7) \quad \begin{vmatrix} J_1(ikr_0) & J_1(k'r_0) \\ ikJ_0(ikr_0) & k'J_0(k'r_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn  $k$  klein ist, erhalten wir für die am wenigsten gedämpfte Grundschwingung die Gleichung

$$(8) \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r_0 J_0 \left( \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r_0 \right) = J_1 \left( \sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r_0 \right),$$

die die kleinste Wurzel  $\sqrt{\frac{\vartheta}{\nu}} \cdot r_0 = 5.136$  mit  $\vartheta = \frac{26.38}{r_0^2}$  besitzt.

Die Stromfunktion der Störung

$$(9) \quad \psi = \left[ r J_1(k'r) - r J_1(ikr) \frac{J_1(k'r_0)}{J_1(ikr_0)} \right] e^{-\vartheta t - ikz}$$

ergibt wieder einen Bewegungsverlauf, der im Meridianschnitt dem Gesetz des oben beschriebenen ersten Schwingungstypus entspricht. Nur gehören hier natürlich wegen der Achsensymmetrie die beiden gegenüberliegenden Zirkulationen demselben Wirbelsystem an.

3. Der allgemeine Fall. Die erste der Gleichungen (3) geht mit  $x = \frac{r^2}{2}$ ,  $-\frac{Aik}{\nu} = \varepsilon_0$ ,  $\frac{1}{2} \frac{i}{\nu} (Ar_0^2 k - \beta) - \frac{k^2}{2} = \varepsilon_1$  über in

$$(10) \quad \frac{d^2 g}{dx^2} + g(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{x}) = 0.$$

Das durch eine beständig konvergente Reihenentwicklung darstellbare Integral dieser Gleichung lautet

$$(11) \quad g_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_1 x} \cdot J_1(2\sqrt{\varepsilon_1 x}) + \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sin(\sqrt{\varepsilon_0} \cdot x - x) \right) + \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{3 \cdot 3!} x^4 - \dots \right).$$

Das andere, logarithmische Integral ist wegen der Randbedingungen auszuschließen. Es ergibt sich dann durch Integration der zweiten der Gleichungen (3) nach der Methode der Variation der Konstanten

$$(12) \quad \frac{f}{r} = c_1 \frac{i\pi}{2} \left\{ J_1(ikr) \cdot \int_0^r H_1^{(1)}(ikr) g_1(r) dr - H_1^{(1)}(ikr) \int_0^r J_1(ikr) g_1(r) dr \right\} + c_2 J_1(ikr).$$

Wenn man die Randbedingungen am Rohrumfang aufstellt und die Determinante der entsprechenden beiden homogenen linearen Gleichungen bildet, so ergibt sich nach einfacher Umformung der Gleichung für  $\beta$

$$(13) \quad \int_0^1 J_1(ikr) g_1(r) dr = 0.$$

Sexl hat nun ohne numerische Auflösung den mathematischen Nachweis erbracht, daß diese Gleichung im Falle großer  $kR$ , d. h. im Be-



reich der asymptotischen Entwicklung der Partikularlösungen, nur durch solche Werte von  $\beta$  erfüllt werden kann, die einen positiven imaginären Bestandteil haben. Im übrigen ergibt sich, daß das Verhalten der Poiseuilleschen Strömung in Rohren gegenüber achsensymmetrischen Störungen völlig analog ist dem der linearen Couette-Strömung zwischen parallelen Wänden. Während bei kleinen Werten von  $k\mathfrak{R}$  die Flüssigkeit als Ganzes schwingt, analog der Grundschwingung und den Oberschwingungen einer eingespannten Kreismembran, werden bei größeren  $k\mathfrak{R}$  diese Schwingungen in Richtung der Hauptströmung, und zwar am stärksten in der Rohrachse, nach und nach verzerrt, bis schließlich bei einem bestimmten Wert von  $k\mathfrak{R}$  ein Zerreißen stattfindet und die Störung in einzelne Schichten zusammenrückt. Bei verschwindender Reibung bleibt die Störung auf eine unendlich dünne wirbelnde Schicht  $r = \text{const}$  beschränkt. Es ergibt sich ferner, daß alle Schwingungen für endliche  $\mathfrak{R}$  gedämpft sind, während im Grenzfalle  $\mu \rightarrow 0$  die Hauptströmung sich gegen die stationären Schwingungen im indifferenten Gleichgewicht befindet.

### § 88. Stabilität der Flüssigkeitsbewegung zwischen rotierenden Zylindern.

Der besprochene Fall einer zwischen ebenen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeitsströmung kann als Grenzfall der allgemeinen Couetteschen Strömung einer kreiszylindrischen Flüssigkeitsschicht aufgefaßt werden, die von zwei rotierenden Kreiszyllindern begrenzt wird. Es wurde bereits früher auf die experimentellen Untersuchungen von Mallock und Couette hingewiesen, die im wesentlichen das Resultat brachten, daß die Gesetze für die Geschwindigkeitsverteilung und die auftretenden Reibungsmomente sich wesentlich anders verhalten, sobald nach Überschreiten einer gewissen Grenzgeschwindigkeit der laminare in den turbulenten Zustand übergeht. Wenn etwa der eine Zylinder ruht und der äußere mit einer Geschwindigkeit  $U = r_2\omega_2$  rotiert, ferner  $\delta = r_2 - r_1$  die Schichtdicke der Flüssigkeit bedeutet, so ergibt sich als kritische Reynoldssche Zahl der Wert

$$\mathfrak{R}_k = \frac{U\delta}{\nu} \approx 1900.$$

Neuerdings hat nun G. J. Taylor<sup>1)</sup> die Versuche auch mit Rücksicht auf die (optische) Feststellung der turbulenten Strömungsverhält-

<sup>1)</sup> G. J. Taylor, Stability of a Viscous Liquid contained between two Rotating Cylinders, Phil. Trans., Bd. 223 (1923), S. 289; ferner Proceed. intern. congress Delft 1924 u. Z. f. a. M. M., Bd. 5 (1925), S. 250—253.

nisse mit vollkommeneren Mitteln wieder aufgenommen und zugleich eine eingehende Stabilitätsrechnung durchgeführt, die insofern bemerkenswert ist, als dadurch der erste Fall ermittelt wurde, bei dem die laminare Bewegung einer zähen Flüssigkeit sich als instabil erwiesen hat. Die Rechnung, die äußerst umfangreich und schwierig ist, und daher nur übersichtsweise gegeben werden kann, nimmt ihren Ausgang von den allgemeinen, auf Zylinderkoordinaten transformierten Bewegungsgleichungen, die sich bei Annahme von Achsensymmetrie entsprechend vereinfachen (vgl. § 8, S. 29). Wenn wir der in § 55 festgestellten stationären Grundbewegung von der Form

$$V_{\varphi} = Ar + \frac{B}{r}; \quad A = \frac{r_1^2 \omega_1 - r_2^2 \omega_2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{r_1^2 \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

eine dreidimensionale Störungsbewegung überlagern, d. h.

$$v_r = v'_r, \quad v_{\varphi} = V_{\varphi} + v'_{\varphi}, \quad v_z = v'_z$$

setzen, und nach Einführung in die Bewegungsgleichungen die quadratischen und höheren Glieder der Störung und ihre Ableitungen vernachlässigen, so erhalten wir das System

$$(I) \quad \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2\left(A + \frac{B}{r^2}\right)v'_{\varphi} + \nu \left[ A_1 v'_r + \frac{\partial^2 v'_r}{\partial z^2} - \frac{v'_r}{r^2} \right] = \frac{\partial v'_r}{\partial t} - \frac{V_{\varphi}^2}{r}, \\ -2A v'_r + \nu \left[ A_1 v'_{\varphi} + \frac{\partial^2 v'_{\varphi}}{\partial z^2} - \frac{v'_{\varphi}}{r^2} \right] = \frac{\partial v'_{\varphi}}{\partial t}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ A_1 v'_z + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial v'_z}{\partial t}. \end{cases}$$

wenn wir die Abkürzung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = A_1$$

einführen. Die Kontinuitätsgleichung wird

$$(2) \quad \frac{\partial(r v'_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v'_z)}{\partial z} = 0.$$

Die Grenzbedingungen lauten

$$v'_r = v'_{\varphi} = v'_z = 0 \quad \text{für} \quad r = r_1 \quad \text{und} \quad r = r_2.$$

Nehmen wir für die Störungskomponenten die Ausdrücke

$$(3) \quad \begin{cases} v'_r = u_1 \cos \lambda z e^{\beta t}, \\ v'_{\varphi} = u_2 \cos \lambda z e^{\beta t}, \\ v'_z = u_3 \sin \lambda z e^{\beta t}, \end{cases}$$

wo  $u_1, u_2, u_3$  Funktionen von  $r$  allein sind und eliminieren aus den Gleichungen den Druck, so entsteht

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_1}{r} + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda u_3 = 0, \\ & \nu \left( A_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 - \frac{\beta}{\nu} \right) u_2 = 2A u_1, \\ & \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left[ A_1 - \lambda^2 - \frac{\beta}{\nu} \right] u_3 = -2 \left( A + \frac{B}{r^2} \right) u_2 - \nu \left( A_1 - \lambda^2 - \frac{\beta}{\nu} \right) u_1. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen können mit Hilfe von Besselschen Funktionen gelöst werden. Wenn wir die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{1}{r^2} \right) f = 0$$

durch

$$(6) \quad f = c_1 J_1(kr) + c_2 N_1(kr) = B_1(kr)$$

darstellen, so können die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so bestimmt werden, daß  $f$  für  $r=r_1$  und  $r=r_2$  verschwindet. Umgekehrt kann bekanntlich jede stetige Funktion  $f(r)$ , die an den Grenzen  $r_1$  und  $r_2$  verschwindet, in eine Bessel-Fouriersche Reihe

$$(7) \quad f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i B_1(k_i r)$$

entwickelt werden, wo die  $a_i$  durch die Integrale

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{H_i} \int_{r_1}^{r_2} f(r) B_1(k_i r) r dr, \\ H_i &= \int_{r_1}^{r_2} B_1^2(k_i r) r dr = \frac{1}{2} \{ r_2^2 B_0^2(k_i r_2) - r_1^2 B_0^2(k_i r_1) \} = \int_{r_1}^{r_2} B_0(k_i r) r dr \end{aligned} \right.$$

bestimmt sind. Wenn man nun für  $u_1$  eine Reihe von der Art (7) nimmt, so haben wir für  $u_2$  die Gleichung

$$(9) \quad \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2 \right) u_2 = 2A \sum_1^{\infty} a_i B_1(k_i r).$$

Die Lösung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Gleichung

$$(10) \quad u_2' = c_3 J_1(i \lambda' r) + c_4 N_1(i \lambda' r)$$

und der Reihe

$$(11) \quad u_2'' = \sum_{i=1}^{\infty} b_i B_1(k_i r),$$

wo für  $b_i$  zu setzen ist

$$b_i = - \frac{2A a_i}{\nu \left( k_i^2 + \lambda^2 + \frac{\beta}{\nu} \right)}.$$

Die Grenzbedingung  $u_2=0$  für  $r=r_1$  und  $r=r_2$  gibt ferner

$$c_3 = c_4 = 0.$$

Um die vollständige Lösung der dritten Gleichung (4) anzugeben, betrachten wir zunächst die reduzierte Gleichung

$$\nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \lambda'^2 \right) u_3' = 0.$$

Wegen

$$\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} B_0(kr) = -B_1(kr)$$

erhalten wir als Lösung

$$(12) \quad u_3' = c_6 + c_6 J_0(i\lambda' r) + c_7 N_0(i\lambda' r).$$

Die vollständige Lösung hat dann die Form

$$(13) \quad u_3 = u_3' + u_3'' = c_5 + c_6 J_0(i\lambda' r) + c_7 N_0(i\lambda' r) + \sum d_i B_0(k_i r).$$

Für die Koeffizienten  $d_i$  erhalten wir durch Einsetzen und Benutzung der früher gegebenen Ausdrücke für  $b_i$

$$(14) \quad \sum_1^{\infty} d_i \frac{\nu k_i}{\lambda} (\lambda'^2 + k_i^2) B_1(k_i r) = \sum_1^{\infty} \nu (k_i^2 + \lambda'^2) a_i B_1(k_i r) \\ + 2 \left( A + \frac{B}{r^2} \right) \sum_1^{\infty} \frac{2A a_i}{(k_i^2 + \lambda'^2)} B_1(k_i r).$$

Man sieht schon aus diesen Andeutungen, daß die weitere Behandlung, insbesondere die Aufstellung der Säkulargleichung, die aus den Grenzbedingungen gewonnen wird, auf große rechnerische Schwierigkeiten stößt. Diese für das Stabilitätsproblem maßgebende Gleichung liefert die Frequenz  $\beta$  in Abhängigkeit von den Reynoldsschen Zahlen  $\frac{\omega_1 r_1^2}{\nu}$  und  $\frac{\omega_2 r_2^2}{\nu}$  und dem Geschwindigkeits- bzw. Radienverhältnis  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  bzw.  $\frac{r_2}{r_1}$  beider Zylinder. Taylor beschränkt sich bei der außerordentlich schwierigen Diskussion ferner auf die Annahme, daß die Radiendifferenz  $r_2 - r_1$  gegen  $r_m$  nur klein ist. Die wesentlichen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Bei gleichsinniger Rotation der Zylinder weicht die Stabilitätsgrenze, wie die Darstellung (Abb. 109) zum Ausdruck bringt, wenig ab von der von Rayleigh für reibungslose Flüssigkeiten gefundenen, die durch die Beziehung  $\omega_1 r_1^2 = \omega_2 r_2^2$  dargestellt ist. Wenn  $\omega_1 r_1^2 < \omega_2 r_2^2$ , so ist jedenfalls Stabilität vorhanden. Wenn  $\frac{\omega_1}{\omega_2} > \frac{r_2^2}{r_1^2}$  wird oder  $\frac{\omega_2}{\omega_1} < 0$ , d. h. die Drehung beider Zylinder entgegengesetzt ist, so tritt für einen berechenbaren Grenzwert, etwa der äußeren Reynoldsschen Zahl  $\frac{\omega_2 r_2^2}{\nu}$ , in Übereinstimmung mit dem Versuch In-

stabilität auf. Ist der äußere Zylinder in Ruhe und der innere in Bewegung, oder rotieren beide Zylinder in gleichem Sinne, so charakte-

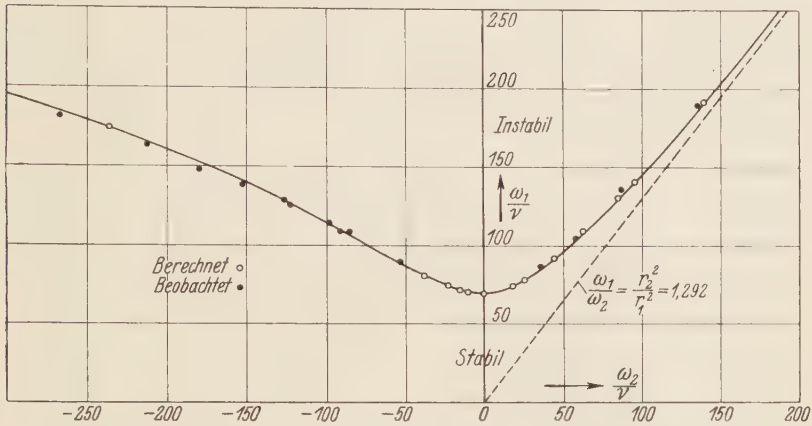


Abb. 109. Stabilitätsgrenze bei konzentrisch rotierenden Zylindern. (Nach Taylor.)

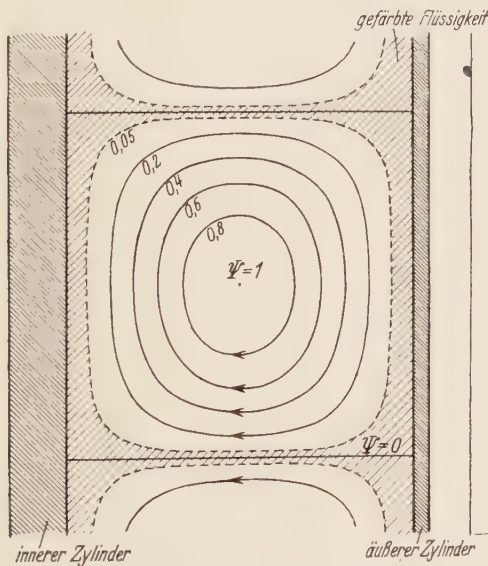


Abb. 110. Stromlinienbild bei gleichsinnig rotierenden konzentrischen Zylindern. (Nach Taylor.)

risiert sich der Eintritt der Instabilität durch die Bildung von Wirbelreihen in der Meridianebene, die abwechselnd entgegengesetzten Drehsinn haben und den ganzen Zwischenraum zwischen den Zylindern erfüllen.

Diese Entstehung konnte versuchsmäßig dadurch bestätigt werden, daß eine gefärbte Flüssigkeit als dünne Schicht über den inneren Zylinder verteilt wurde, die sich dann entsprechend der Figur zu äquidistanten, die Wirbelgebiete umschließenden Ringen zusammenzieht (Abb. 110). Bei gegenseinniger Drehung der Zylinder bilden sich zwei Reihen von Wirbeln, die eine in Berührung mit dem äußeren und die andere, stärkere, in Berührung mit dem inneren Zylinder.

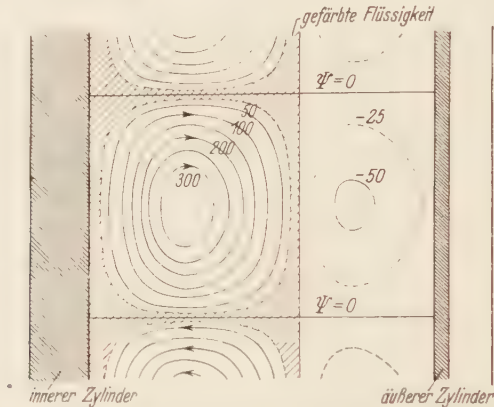


Abb. 111. Stromlinienbild bei gegensinnig rotierenden konzentrischen Zylindern. (Nach Taylor.)

in Berührung mit dem inneren Zylinder. Bei den Experimenten legt sich die gefärbte Flüssigkeit nur um die stärkeren Wirbel, während das Wasser an den Stellen der theoretischen äußeren Wirbel klar bleibt (Abb. 111). Sowohl der Einsatz wie die Anordnung (Größe und Unterteilung) der Wirbel zeigt nach der Rechnung außerordentlich gute Übereinstimmung mit den Versuchen; die Abweichung der Reynoldsschen Grenzzahlen beträgt in den meisten Fällen weniger als 2%.

### § 89. Stabilität und Grenzschicht.

Die Mißerfolge, welche die Versuche, eine kritische Reynoldssche Übergangszahl auf theoretischem Wege zu finden, gezeitigt haben, gab den Anlaß, die Stabilitätsbetrachtungen nach verschiedenen Seiten zu erweitern. Prandtl machte bereits auf der Mathematikertagung in Jena 1921 auf einen Gesichtspunkt aufmerksam, der in der Grenzschichttheorie eine Rolle spielt<sup>1)</sup>. Wenn die Flüssigkeit (mit kleiner Reibung) einen abgerundeten Körper umströmt, so tritt in dem Gebiet zwischen

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz, Z. f. a. M. M., Bd. 1 (1921), S. 431--436.



dem Geschwindigkeitsmaximum und der Ablösungsstelle der Fall ein, daß das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht eine Einbuchtung (einen Wendepunkt) zeigt. Auch bei der Poiseuilleströmung oder der Strömung zwischen ebenen Wänden können solche Einbuchtungen hervorgerufen werden durch Wirbelbildung oder durch Unebenheiten der Wandung. Zur Vereinfachung der Rechnung ersetzt Prandtl nach dem Vorgang von Lord Rayleigh das Geschwindigkeitsprofil durch einen geknickten Linienzug, wodurch die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt wird. Es ergab sich nun (zunächst bei Vernachlässigung der Reibung), daß jede noch so kleine Einbuchtung des Profils von der Art *c* (Abb. 112) einer labilen Strömungsform entspricht. Die Abschätzung des Reibungseinflusses (nach einem noch zu besprechenden Verfahren) führte weiter zu dem nicht erwarteten Ergebnis, daß die Reibung eine instabilisierende Wirkung ausübt, d. h. eine Anfachung (negative Dämpfung) der Rayleighschwingung bewirkt, so daß selbst für die zunächst stabilen Fälle *a* und *b* (Abb. 112) eine, wenn auch relativ schwache Labilität entsteht.

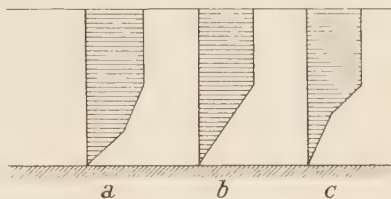


Abb. 112. Geschwindigkeitsprofile.

Um den Gang der Prandtl-Tietjensschen Rechnung<sup>1)</sup> zu zeigen, gehen wir aus von der Differentialgleichung (3) des § 85 für die Funktion  $f(y)$ , die als Faktor in der Stromfunktion

$$\psi = e^{i(kx - \beta t)} f(y)$$

der Störungsbewegung auftritt. Nennen wir  $V$  die Geschwindigkeit der Hauptströmung längs des als geradlinig angenommenen Profils, so ergibt sich

$$(1) \quad \left( V - \frac{\beta}{k} \right) \left( \frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 y \right) - k f \frac{d^2 V}{dy^2} = 0.$$

Sind nun  $v'_x$  und  $v'_y$  die Komponenten der Störungsgeschwindigkeit, so folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$v'_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{i(kx - \beta t)} \frac{df}{dy} = \frac{i}{k} \frac{\partial v'_y}{\partial y}.$$

Wir können also in der Gleichung (1)  $f$  durch  $v'_y$  ersetzen und erhalten dann

$$(1a) \quad \left( V - \frac{\beta}{k} \right) \left( \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y^2} - k^2 v'_y \right) - v'_y \frac{d^2 V}{dy^2} = 0.$$

<sup>1)</sup> Vgl. O. Tietjens, Beiträge zur Entstehung der Turbulenz, Z. f. a. M. M., Bd. 5 (1925), S. 206–217.

Die Ersetzung des stetig gekrümmten Geschwindigkeitsprofils durch ein aus Geraden bestehenden „geknicktes“ Profil hat den Vorteil, daß das letzte Glied von (1a) innerhalb der einzelnen Streifen verschwindet und daher unter der Voraussetzung, daß der erste Faktor Null ist, die einfache Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y^2} - k^2 v'_y = 0$$

übrigbleibt, die die Lösung besitzt

$$(3) \quad v'_y = A \sin ky + B \cos ky.$$

Der Ansatz der Grenzbedingungen liefert dann wieder die Bestimmungsgleichung für  $\beta$  in Form einer Determinante.

Was nun den Einfluß der als klein vorausgesetzten Zähigkeit angeht, so ist die Abschätzung so durchgeführt, daß alle Glieder von der Größenordnung  $\nu, \nu^2 \dots$  vernachlässigt sind, und nur die Größe  $\nu$  als maßgebend berücksichtigt wird. Das Verfahren kommt darauf hinaus, daß nicht die gesamte Grenzschicht, sondern nur eine schmale, in unmittelbarer Wandnähe gelegene Teilschicht (von der Größenordnung  $\left| \frac{\nu}{\beta} \right|$ ), die durch den ersten Streifen des Geschwindigkeitsprofils definiert ist, als reibende Flüssigkeit aufgefaßt wird.

Die Geschwindigkeitskomponenten müssen dann aus drei Teilen zusammengesetzt werden, aus denen der Hauptbewegung  $V$ , der Störung  $v'_{1x}, v'_{1y}$ , soweit die Reibung vernachlässigt ist, und der Zusatzbewegung  $v'_{2x}, v'_{2y}$ , die durch die Zähigkeit und das Haften der Flüssigkeit längs der Wand bedingt ist. Dann entsteht aus der Stokes-Navierschen Gleichung, ebenso wie früher gezeigt, die Grenzschichtgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial v'_{2x}}{\partial t} + V \frac{\partial v'_{2x}}{\partial x} + v'_{2y} \frac{\partial V}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v'_{2x}}{\partial y^2}.$$

Wegen der linearen Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $V$  von  $y$  kann man setzen

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dy} y;$$

mit

$$\operatorname{div} \mathbf{v}'_2 = \frac{\partial v'_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v'_{2y}}{\partial y} = 0$$

erhält man dann durch Ableitung von (4) die Beziehung

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v'_{2x}}{\partial t \partial y} + \frac{dV}{dy} y \frac{\partial^2 v'_{2x}}{\partial x \partial y} = \nu \frac{\partial^3 v'_{2x}}{\partial y^3}.$$

Führt man noch die Stromfunktion  $\psi$  der Störung  $\mathbf{v}'_2$  ein durch

$$\psi = e^{i(kx - \beta t)} f(y), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = e^{i(kx - \beta t)} \varphi(y),$$

so geht (5) über in

$$(5a) \quad \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = \frac{i}{\nu} \left( \frac{dV}{dy} ky - \beta \right) \cdot \varphi(y).$$

Setzt man

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{\beta}}}$$

und führt die Variable

$$z = \frac{\frac{dV}{dy} ky - \beta}{\left( \frac{dV}{dy} k \sqrt{\nu} \right)^{\frac{2}{3}}} \text{ bzw. } = \frac{\frac{dV}{d\eta} \cdot \frac{k}{\beta} \eta - 1}{\left( \frac{dV}{d\eta} \cdot \frac{k}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

ein, so erhält man aus (5a)

$$(5b) \quad \varphi''(z) - iz\varphi(z) = 0,$$

eine Gleichung, die, wie wir bereits wissen (vgl. § 86, S. 317), auf Besselsche Funktionen von der Ordnung  $\frac{1}{3}$  führt.

Wenn man im besonderen annimmt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\beta_1}{k} \quad (\beta = \beta_1 + i\beta_2)$$

so groß ist, daß die Schicht, deren Geschwindigkeit  $V$  mit  $c$  übereinstimmt, schon merklich außerhalb der Grenzschicht von der Dicke  $\delta = \sqrt[3]{\frac{\nu}{\beta}}$  liegt, und wenn  $y'$  die Ordinate für  $V=c$  bezeichnet, so wird

$$c = \frac{dV}{dy} y' = \frac{\beta_1}{k}.$$

Wenn  $\delta \ll y'$ , so wird

$$\frac{dV}{dy} ky \ll \beta_1,$$

oder

$$\frac{dV}{dy} \frac{k}{\beta_1} \sqrt{\frac{\nu}{\beta_1}} = \frac{dV}{dy} \sqrt{\frac{\nu}{(k\beta_1)^3}} \ll 1.$$

Dann können wir aber an Stelle der Gleichung (5b) die Näherungsgleichung setzen

$$(6) \quad \varphi''(\eta) = -i\varphi(\eta).$$

Die Konstante der Lösung

$$(7) \quad \varphi(\eta) = \text{const} \cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}} \eta}$$

ist so zu bestimmen, daß  $v'_x = 0$  für  $\eta=0$ , also

$$(v'_{1x})_0 = -(v'_{2x})_0$$

wird. Wenn die Geschwindigkeit der Rayleighschwingung den Wert hat

$$(v'_{1x})_0 = c e^{i(kx - \beta t)},$$

so wird

$$(8) \quad v'_{2x} = -c e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}} \eta} \cdot e^{i(kx - \beta t)}$$

und nach der Kontinuitätsbedingung

$$(9) \quad v'_{2y} = c \frac{i-1}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \left(1 - e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}} \eta}\right) e^{i(kx - \beta t)};$$

für großes  $\eta$  erhalten wir den asymptotischen Wert

$$(10) \quad (v'_{2y})_\infty = c \frac{i-1}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} e^{i(kx - \beta t)}.$$

Da aber für eine reibungslose Flüssigkeit wegen  $v'_{1y} = 0$  für  $y = 0$

$$v'_{1y} = A \sin ky,$$

so erhält man

$$(v'_{1x})_0 = \frac{i}{k} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_{y=0} = iA,$$

also

$$c e^{i(kx - \beta t)} = iA$$

oder

$$(10a) \quad (v'_{2y})_\infty = -A \frac{1+i}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{\beta}}.$$

Man kann nun die Zähigkeitswirkung nach Prandtl angenähert dadurch berücksichtigen, daß man annimmt, daß die Geschwindigkeit  $(v'_{2y})_\infty$  bereits an der Wand vorhanden wäre, im übrigen aber die Geschwindigkeit wie in der idealen Strömung verteilt sei.

Nach dem hiermit charakterisierten Näherungsverfahren sind nun einige besondere Profile durchgerechnet, d. h. die Lösungen der „idealen“ Differentialgleichung für einige Profilstreifen unter Berücksichtigung der abgeänderten Grenzbedingungen aufgestellt worden. Dann ergeben die Randbedingungen (für das Verhalten an der Wand und an den Übergängen der Streifen) ein System von homogenen Gleichungen für  $\beta$  von einem Grade, der mit der Streifenzahl übereinstimmt.

Tietjens hat ferner für ein spezielles Beispiel die Geschwindigkeitsverteilung und das Strombild der Störungsbewegung in der Wandnähe ermittelt. Dabei wurde für die laminare Hauptströmung ein Profil zugrunde gelegt, wie es sich in einem offenen Kanal von rechteckigem Querschnitt (15 · 25 cm<sup>2</sup>.) ergibt an der Stelle, wo die turbulente Bewegung gerade im Entstehen begriffen ist, und zwar in einer Entfernung von  $l = 320$  cm vom abgerundeten Einlauf bei einer Durch-

schnittsgeschwindigkeit  $V = 12 \text{ cm/s}$ . Wenn man diejenige Wellenlänge benutzt, die am schnellsten anwächst, so findet man

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 22,3 \text{ cm}, \quad k = 0,278 \text{ cm}^{-1}.$$

Ferner ist  $(v'_{1x})_0 = \frac{V}{10} = 1,2 \text{ cm/s}$  angenommen. Die Stromlinien, die in der Abb. 113 wiedergegeben sind (bei fünffacher Vergrößerung der Ordi-

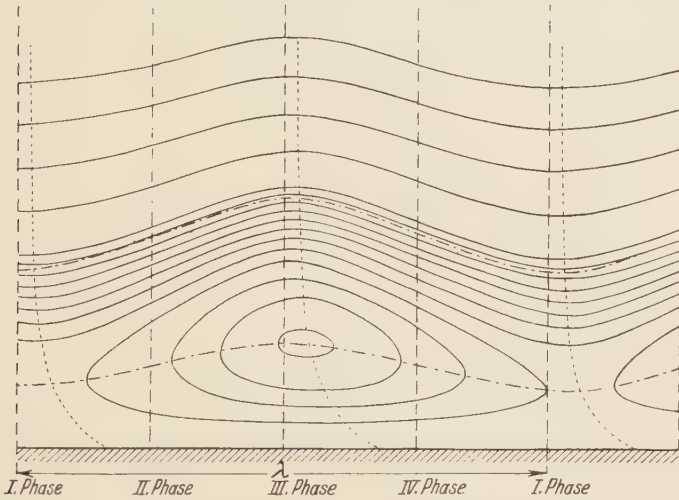


Abb. 113. Theoretisches Strombild einer Störungsbewegung in der Nähe einer ebenen Wand. (Nach Tietjens.)

nate), sind auf einen Beschauer bezogen, der sich mit der Phasengeschwindigkeit  $\frac{\beta_1}{k}$  mit der Flüssigkeit mitbewegt. In diesem Bezugssystem ist die Bewegung bis auf das zeitliche Anwachsen der Störung stationär. Das berechnete Bild hat manche Ähnlichkeit mit den entsprechenden photographischen Aufnahmen der wirklichen turbulenten Bewegung in einem Kanal (vgl. Abb. 114).

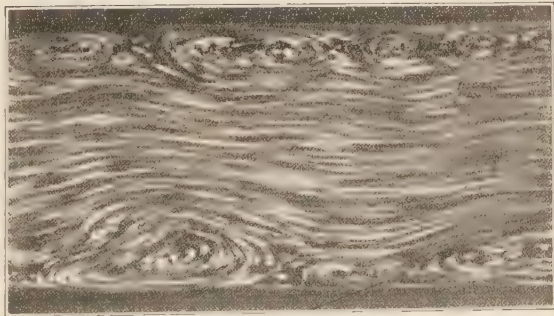


Abb. 114. Turbulente Strömung in einem Kanal. (Nach Tietjens.)

Das entscheidende Resultat der Rechnung ist jedenfalls dieses, daß der imaginäre Teil  $\beta_2$  von  $\beta$  in allen Fällen, d. h. für alle Wellenlängen  $\lambda$ , positiv ausfällt. Auch die strengere Auflösung der Differentialgleichung (6) mittels Besselscher Funktionen, die von Tietjens unter teilweiser Benutzung graphischer Hilfsmittel durchgeführt wurde, hat keine wesentliche Abänderung dieses Ergebnisses gebracht. Der damit eingeführte Widerspruch mit der Erfahrung, die doch unbedingte Stabilität der Laminarströmung unterhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl ergab, kann also nur dadurch beseitigt werden, daß nachgeprüft wird, ob die Voraussetzung, d. h. die Vernachlässigung der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils, nicht ein verschleiendes Moment in die Rechnung hineinbringt.

### § 90. Einfluß der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils.

Der Nachweis, daß die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils für das Auftreten eines Stabilitätsbereiches maßgebend wird, ist neuerdings in gewissem Sinne von W. Tollmien<sup>1)</sup> in einer ausführlichen und gründlichen Arbeit gebracht worden, in der im wesentlichen an dem Prandtl-Tietjensschen Grundgedanken festgehalten, aber eine stetige Änderung des Geschwindigkeitsgradienten in der Grenzschicht zugrunde gelegt wird, wie sie der Wirklichkeit entspricht. Die weitere Abweichung gegenüber Tietjens besteht darin, daß Tollmien auf die gesonderte Grenzschichtgleichung verzichtet und auf die allgemeine Störungsgleichung

$$(1) \quad (V - c)(f'' - k^2 f) = -\frac{i}{k\Re}(f'''' - 2k^2 f'' + k^2 f)$$

zurückgeht, deren Lösungen einer genauen funktionentheoretischen Analyse unterworfen werden. Wenn  $k\Re$  als groß vorausgesetzt wird, erhält man zwei erste Näherungslösungen  $f_1$  und  $f_2$  von der Form

$$(2) \quad f_1 = y \mathfrak{P}_1(y); \quad f_2 = \mathfrak{P}_2(y) + A f_1 \lg y,$$

die zugleich die reibungslose Störungsgleichung befriedigen. Während aber das eine Integral  $f_1$  in dem besonderen Punkt  $V - c = \frac{j}{k}$  regulär bleibt, erhält das andere Integral dort eine logarithmisch unendliche Ableitung. Für einen gewissen Bereich um die Singularität muß also  $f_2$  jedenfalls korrigiert werden. Mit der Substitution

$$y = (k\Re V_0')^{-\frac{1}{2}} \iota_1 =: \epsilon \iota_1,$$

<sup>1)</sup> W. Tollmien, Über die Entstehung der Turbulenz, Nachrichten der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, 1. Mitt., 1929, S. 21—44.



wobei der Zeiger 0 sich auf die Stelle  $y=0$  bezieht, entsteht aus der Störungsgleichung bei Vernachlässigung von  $\varepsilon^2$  und der höheren Potenzen

$$(3) \quad -i f'''' = \eta f'' - \varepsilon \frac{V_0''}{V_0'} f.$$

Bezeichnen wir die Korrektur mit  $\varepsilon f_{21}$ , so genügt  $f_{21}$  der Gleichung

$$-i f_{21}'''' = \eta f_{21}'' - \frac{V_0''}{V_0'} f.$$

Es zeigt sich dann durch eine genaue Diskussion der Lösung, daß  $f_2$  für positive  $y$  von der Form

$$1 + \dots + \frac{V_0''}{V_0'} f_1 \lg y$$

ist, beim Übergang zu negativen  $y$  dagegen in

$$1 + \dots + \frac{V_0''}{V_0'} f_1 \lg |y| - \frac{V_0''}{V_0'} i \pi f_1,$$

übergeht, daß also die Übergangssubstitution in  $f_2$  im Hinzutreten eines imaginären Teiles und damit eines Phasensprunges in der  $x$ -Komponente der Störung besteht. Die Breite des Übergangsstreifens (des abzugrenzenden Gebietes um den singulären Punkt) berechnet sich zu

$$2\varepsilon |\eta| = 2(k\Re V_0')^{-\frac{1}{3}} \cdot |\eta|.$$

Als weitere Integrale erhalten wir die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung, also

$$(4) \quad f_3'' = \eta^{\frac{1}{2}} H_3^{(1)} \quad f_4'' = \eta^{\frac{1}{2}} \cdot H_3^{(2)},$$

woraus z. B. das bei Tollmien allein gebrauchte  $f_3$  sich ergibt

$$(4a) \quad f_3 = \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_3^{(1)} \left[ \frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{3}{2}} \right] d\eta d\eta.$$

Wenn man die entsprechenden Lösungen für die Nachbarschaft der Wand ( $V=0$ ), und zwar für den Fall, daß  $c \gg V$ , also die kritische Stelle außerhalb der betrachteten Schicht liegt, diskutiert, so ergibt sich wieder die von Tietjens aus der Grenzschichtgleichung abgeleitete Lösung  $f_3$

$$f_3 = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)\sqrt{k\Re c} y}.$$

Das neue Resultat der Tollmieni'schen Untersuchung besteht darin, daß zu dieser „äußeren Grenzschichtlösung“ im Fall  $V'' \neq 0$  im kritischen Punkt eine zweite „innere Grenzschichtlösung“ hinzutritt.

Tollmien wählt nun ein Profil  $V(y)$ , das vom Wert 0 bis zu einem Maximalwert  $V_m$  steigt, den es dann beibehält, ein Profil, wie es z. B. für die Geschwindigkeitsverteilung bei einer Strömung längs einer Platte

vorkommt. Die Randbedingungen für den Beginn des Gebietes  $V=V_m$  und für die Wand (Index  $w$ ) sind

$$(5) \quad \begin{cases} c_1(f'_{1m} + kf_{1m}) + c_2(f'_{2m} + kf_{2m}) = c_1\varphi_{1m} + c_2\varphi_{2m} = 0, \\ c_2f_{1w} + c_2f_{2w} - \frac{f'_{3w}}{f'_{3w}}(c_1f'_{1w} + c_2f'_{2w}) = 0. \end{cases}$$

Mit

$$\frac{f'_{3w}}{f'_{3w}} = -\varepsilon D \quad \text{und} \quad \eta_w = -\frac{c}{V'_0} \frac{1}{\varepsilon}$$

erhalten wir aus der entstehenden Determinantengleichung

$$(6) \quad -\frac{D(\eta_w)}{\eta_w} = -\frac{V'_0}{c} \frac{\varphi_{1m}f'_{2w} - \varphi_{2m}f'_{1w}}{\varphi_{1m}f'_{2m} - \varphi_{2m}f'_{1w}} = E(c, k).$$

Die graphische Behandlung dieser Gleichung besteht darin, daß man ein Polardiagramm von  $-\frac{D}{\eta_w}$  zeichnet mit dem Realteil als Abszisse und dem Imaginärteil als Ordinate und mit der einem gewählten  $c$  entsprechenden Kurve  $E(c, k)$  zum Schnitt bringt. Aus dem dadurch gewonnenen  $\eta_w$  lassen sich  $\varepsilon$  und  $\Re$  finden.

Nach dieser Methode hat Tollmien das Gleichgewicht der Strömung längs einer ebenen Platte behandelt, auf Grund der bekannten Ansätze von Prandtl und Blasius. Das  $V$ -Profil wird durch die stetige Verbindung eines Geradenstückes und einer Parabel ersetzt. Die  $E$ -Kurven liefern dann mit dem  $-\frac{D}{\eta_w}$ -Diagramm im allgemeinen zwei Durchgangspunkte. Zur weiteren Darstellung wird die Grenzschichtdicke gemäß der Formel

$$\delta = \int_0^m \left(1 - \frac{V}{V_m}\right) dy,$$

definiert und die Reynoldssche Zahl  $\Re$  entsprechend durch die Größe  $\frac{V_m \delta}{\nu} = \Re$  dargestellt. Wir haben in Abb. 115 die Tollmienschen Diagramme wiedergegeben, die die Störungsparameter  $k\delta$ ,  $\frac{c}{V_m}$ ,  $\frac{\beta_1 \delta}{V_m}$  in Abhängigkeit von der logarithmisch aufgetragenen Reynoldsschen Zahl zur Darstellung bringen. Man sieht, daß zu jedem  $\Re$ , das einen gewissen Mindestwert 420 überschreitet, je zwei Störungsparameter gehören. Das von den Kurven eingeschlossene Gebiet bezieht sich auf den Bereich der labilen Schwingungen. Ebenso wie es für die Reynoldssche Zahl eine untere Grenze  $R=420$  gibt, existieren für die Störungsparameter obere Grenzen, nach deren Überschreiten keine Labilität mehr eintritt, nämlich

$$\frac{c}{V_m} = 0,425, \quad k\delta = 0,367, \quad \frac{\beta_1 \delta}{V_m} = 0,148,$$

woraus sich für das Maximum der Wellenlänge der im Verhältnis zur Grenzschichtdicke große Wert  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\delta}{0,367}$  ergibt. Die entsprechenden Gleichgewichtskurven enthalten bei Tietjens nur einen Zweig, d. h. jedes  $\Re$  liefert nur einen Wert des Störungsparameters. Damit scheint der Beweis dafür erbracht zu sein, daß die Vernachlässigung der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils für die Ermittlung des Stabilitätskriteriums nicht zulässig ist.

Tollmien weist in seiner Arbeit darauf hin, daß die Gegenüberstellung seiner Ergebnisse mit den Versuchen von Burgers, van der Hegge Zijen und Hansen besonders deswegen erschwert wird, weil die wirklich auftretenden Störungen nur unvollkommen bekannt sind und

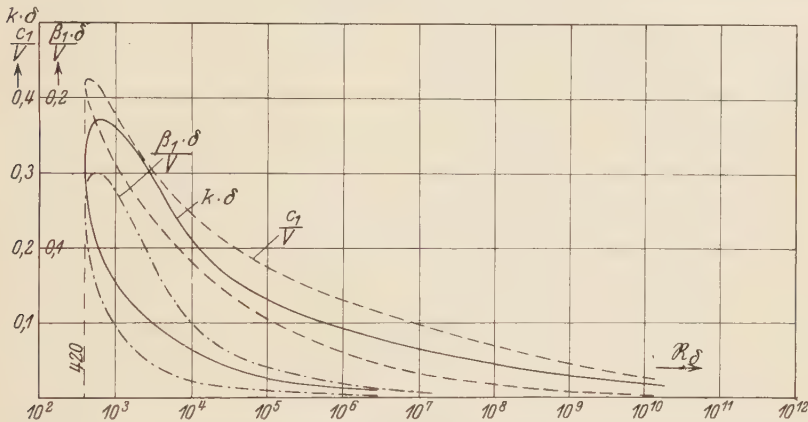


Abb. 115. Labilitätsbereich der Störungen in der Nähe einer längs angeströmten Platte. (Nach Tollmien.)

weil es nicht geklärt ist, wie weit der von diesen Autoren definierte Umschlagspunkt mit dem berechneten Labilitätsbeginn der Laminarströmung übereinstimmt. Bei der Strömung längs einer Platte existiert nach dem Umschlag ein laminares und ein turbulentes Gebiet; in beiden Gebieten nimmt der Gradient der Geschwindigkeit an der Wand stromabwärts stets ab; nur im Übergangsbereich erfolgt eine Zunahme. Daher wird der kritische Wert von  $\Re$  aus dem Minimum des Gradienten berechnet, während die Instabilität der Laminarströmung wahrscheinlich schon früher (bei kleinerem  $\Re$ ) einsetzt. Es kommt ferner hinzu, daß die von den vorgenannten Autoren benutzte Grenzschichtdicke das 3,18-fache des Tollmienschen Wertes besitzt. Der versuchsmäßig ermittelte Wert 3000 würde daher im Tollmienschen Maße auf 950, der einer größeren Störung entsprechende kleinere Wert 1600 auf etwa 500 zu

reduzieren sein. Da im Falle des Versuches bei dem bezeichneten Umschlagspunkt bereits ein ziemlich erhebliches Anwachsen der kleinen Störungen erfolgt ist, während bei dem berechneten Wert  $\mathfrak{R}=420$  gerade noch eine einzige gedämpfte Grundschiwingung vorhanden ist, so kann die Übereinstimmung mit den Experimenten als günstig bezeichnet werden.

### § 91. Überblick über weitere Lösungsversuche.

Endliche Störungen. Alle bisher besprochenen Ansätze zur Erfassung des Turbulenzproblems haben es mit Zusatzbewegungen zu tun, die relativ zur Hauptströmung als klein betrachtet werden. Daß zur Entscheidung einer Frage wie der nach der Entstehung der turbulenten Labilität das Verhalten gegenüber kleinen Störungen noch nicht ausreicht, zeigt ein einfaches Beispiel aus der gewöhnlichen Mechanik. Wenn eine Kugel mit exzentrisch gelegenen Schwerpunkt  $S$  auf einer großen Kugel liegt, so wird sie unter bestimmten Bedingungen gegenüber kleinen Störungen in einer stabilen Gleichgewichtslage sich befinden. Wenn aber die Auslenkung ein gewisses angebbares Maß überschreitet, wird sie nicht mehr rückgängig gemacht werden, sondern sich vergrößern; die Kugel wird also nicht mehr in die anfängliche Lage zurückkehren, sondern auf der großen Kugel herunterrollen. So wäre es nicht undenkbar, daß die Störungsbewegung in einer Flüssigkeit unter gewissen Bedingungen eine solche Größe erreichen kann, daß die Stabilität gestört wird, die bei kleinen Störungen sich selbst erhalten würde. Auch wenn die Laminarbewegung bei idealen Verhältnissen, d. h. gegenüber unendlich kleinen Schwingungen, immer stabil ist, so könnten doch von der Wandung, die ja niemals vollkommen glatt sein kann, sondern immer einen gewissen Rauigkeitsgrad besitzt, Störungen ausgehen, die um so leichteres Spiel haben, je kleiner die Stabilität, also je größer die Reynoldssche Zahl ist. Die Versuche von V. W. Ekman<sup>1)</sup> und L. Schiller<sup>2)</sup> haben ferner bewiesen, daß man durch vorsichtiges Experimentieren, d. h. durch möglichste Kleinhaltung der Störungen, den kritischen Übergang hinauschieben kann. Es scheint also wirklich so, daß die Größe der Störungen irgendwie von Bedeutung ist. Ähnliche Erwägungen hatten schon Lord Kelvin, O. Reynolds und Lord Rayleigh angestellt<sup>3)</sup>, und neuerdings hat vor allem

<sup>1)</sup> V. W. Ekman, Archiv f. Mat., Astr. och Fysik, Bd. 6, No. 12 (1910).

<sup>2)</sup> L. Schiller, Z. f. Physik III (1920), S. 412.

<sup>3)</sup> Vgl. die S. 314 zitierten Arbeiten und den Bericht von F. Noether, Z. a. M. M. Bd. 1 (1921), S. 133f.

F. Noether<sup>1)</sup> eine präzise mathematische Problemstellung daraus abgeleitet. Er betrachtet eine gleichfalls laminare anfängliche Geschwindigkeitsverteilung  $V_0(y)$ , die aber von der im Couetteschen Fall linearen Verteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der daraus folgende Strömungszustand kann eine nicht stationäre Bewegung sein, durch welche die Verteilung der Geschwindigkeiten sich asymptotisch der stationären nähert. Die Frage nach der Stabilität dieser nicht-stationären Laminarbewegung läßt sich analog dem Ansatz für kleine Schwingungen in Angriff nehmen. Wenn aber auch die Möglichkeit der Labilität für einen besonderen Fall der kontinuierlichen Anfangsverteilung der Geschwindigkeit nachgewiesen ist, so scheinen doch die bisherigen Resultate noch keinen wesentlichen Aufschluß über die Vorgänge beim Übergang in den turbulenten Zustand zu geben.

Wandeeinfluß. Es liegt ferner nahe, die kleinen Schwingungsbewegungen der Turbulenz in Verbindung zu bringen mit der Beschaffenheit der Wand, d. h. entweder mit der Rauigkeit, die auf die vorbeiströmende Flüssigkeit Impulse ausübt, oder mit Wanderschütterungen, die sich mittels der Reibung der Flüssigkeit mitteilen. v. Mises<sup>2)</sup> betrachtet die turbulente Bewegung als eine unfreie Schwingung, die dauernd durch die Unebenheiten der Wand angeregt wird, nach Art der erzwungenen Schwingungen eines elastischen Systems. Oseen hat dem Wandeeinfluß dadurch Rechnung getragen, daß er die Störungsgleichungen um ein Glied erweitert, das sich auf eine nicht von einem Potential ableitbare äußere Kraft bezieht. Beim Übergang zu verschwindender Reibung ergibt sich Labilität. Während diese Ansätze keinen besonderen kritischen Wert der Kennzahl ergeben, hat Hopf<sup>3)</sup> jedenfalls für den extremen Fall, daß die Wand der Störung einen verschwindenden Widerstand entgegengesetzt, d. h. für den Fall der freien Oberfläche, einen solchen Wert ermitteln können, der naturgemäß kleiner ausfällt, als der der beobachteten Übergangswerte der Reynoldsschen Zahl. Wenn die Flüssigkeit reibungslos ist, so führt die der freien Oberfläche entsprechende Grenzbedingung  $p = 0$  zu einer Instabilität, wie eine einfache Rechnung ergibt. Wir haben für diesen Fall als Lösung der Störungsgleichung

$$\frac{d^2 f}{d r^2} - k^2 f = 0$$

<sup>1)</sup> Fr. Noether, Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309.

<sup>2)</sup> R. v. Mises, Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 21 (1912), S. 241; ferner Z. a. M. M., Bd. 1 (1921), S. 13.

<sup>3)</sup> L. Hopf, Ann. d. Physik. Bd. 59, (1919), S. 538.



die Funktion

$$f = A \sin k\eta + B \cos k\eta.$$

Sei ferner der Druck in der Form angesetzt

$$p = b e^{i(\beta t - k z)},$$

so führt die Benutzung der Grenzbedingungen

$$p = 0 \quad \text{für} \quad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 1$$

zu dem Wert

$$\beta = \frac{k}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{4} - k \cos k}.$$

Ist  $k$  groß, also die Wellenlänge der Störung klein, so ist  $\beta$  reell; die Störung verhält sich also indifferent. Wenn aber  $k < 2,4$ , so ist  $\beta$  komplex.

Wir können daher sagen, daß die Hauptströmung gegen jede Störung instabil ist, die zu einem  $k < 2,4$  gehört. Wenn man die Reibung berücksichtigt, so ergibt sich, daß die Instabilität bis zu einer unteren Grenze der Reynoldsschen Zahl ( $\mathfrak{R}=11$ ) bestehen bleibt.

Die sehr schwierige Diskussion zeigt, daß bei kleinen Reynoldsschen Zahlen das System der Schwingungen denselben Charakter hat wie bei der ruhenden Flüssigkeit, und daß bei großen Kennzahlen das ganze Innere der Strömung von einer Potentialschwingung beherrscht wird, und nur in engen Grenzschichten an den Wänden, die mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen immer kleiner werden, die Reibung so zur Geltung kommt, daß die Grenzbedingungen richtig erfüllt sind. Dabei ist das Ergebnis bemerkenswert, daß die instabilisierende Störung unter Umständen in einer zähen Flüssigkeit stärker anwächst als in einer reibungslosen. Niemals kann aber eine Störung eine reibungsbehaftete Bewegung instabil machen, die nicht auch bei reibungsloser Flüssigkeit dazu fähig ist.

## § 92. Energetische Ansätze zum Turbulenzproblem.

1. O. Reynolds<sup>1)</sup> hat zum ersten Male das Problem der Turbulenz vom energetischen Standpunkt aus betrachtet, d. h. die Frage gestellt, unter welcher Bedingung die Energie der Störungsbewegung, die der vorgegebenen laminaren Strömung überlagert wird, mit der Zeit anwächst oder abnimmt. Ohne zunächst zu entscheiden, ob diese Alternative gleichbedeutend ist mit der Frage der Stabilität, wollen wir in mög-

<sup>1)</sup> O. Reynolds, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. London, Philos. Transact. (A) 186 (1895), S. 123.



lichster Allgemeinheit den Ausdruck für die zeitliche Änderung der Störungsenergie im Zusammenhang mit den früheren Ausführungen über die dissipative Energie aufstellen<sup>1)</sup>. Wir knüpfen dabei an die allgemeine Bewegungsgleichung an, der wir wegen der Kontinuitätsbeziehung die Form geben können

$$(1) \quad \varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \right) = -\mathcal{V} p + \mu \mathcal{A} \mathbf{v}.$$

Wenn sich die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  zusammensetzt aus der Laminarbewegung  $\mathfrak{B}$  und der als klein vorausgesetzten Störungsbewegung  $\mathbf{v}'$ , so haben wir

$$\mathbf{v} = \mathfrak{B} + \mathbf{v}', \quad p = P + p'.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (1) ein und bedenken, daß  $\mathfrak{B}$  für sich der Gleichung (1) genügt, so ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder, die in bezug auf  $\mathbf{v}'$  von 2. Ordnung sind,

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathfrak{B} \cdot \mathcal{V} \mathbf{v}' \right) + \varrho \mathbf{v}' \cdot \mathcal{V} \mathfrak{B} = -\mathcal{V} p' + \mu \mathcal{A} \mathbf{v}'$$

oder

$$\varrho \left( \frac{d \mathbf{v}'}{d t} + \mathbf{v}' \cdot \mathcal{V} \mathfrak{B} \right) = -\mathcal{V} p' + \mu \mathcal{A} \mathbf{v}'.$$

Bilden wir das innere Produkt jeder Seite dieser Gleichung mit  $\mathbf{v}'$ , so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \cdot \mathbf{v}' \times \text{rot } \mathbf{v}' &= -\mathbf{v}' \cdot \text{rot rot } \mathbf{v}' + (\text{rot } \mathbf{v}')^2, \\ \mathcal{A} \mathbf{v}' &= -\text{rot rot } \mathbf{v}' \end{aligned}$$

die Beziehung

$$(2) \quad \varrho \mathbf{v}' \frac{d \mathbf{v}'}{d t} = \varrho F_m - \mu F_r - \mathcal{V} \cdot p' \mathbf{v}' + \mu \mathcal{V} \cdot \mathbf{v}' \times \text{rot } \mathbf{v}',$$

wo  $F_m$  und  $F_r$  die Bedeutung haben (vgl. § 6, S. 20)

$$(2a) \quad \left\{ \begin{aligned} -F_m &= v_x'^2 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \dots + v_y' v_z' \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) + \dots = \mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}(\mathfrak{B}) \\ F_r &= \left( \frac{\partial v_y'}{\partial x} - \frac{\partial v_x'}{\partial y} \right)^2 + \dots = |\text{rot } \mathbf{v}'|^2 = 4w'^2. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir mit dem Raumelement  $d\tau$  multiplizieren und über den Flüssigkeitsraum integrieren, ferner die letzten beiden Integrale nach dem Gaußschen Integralsatz in Flächenintegrale längs der festen Grenzen verwandeln, so bleibt wegen der Haftbedingung

$$(3) \quad \frac{d}{d t} E = \varrho \int F_m d\tau - \mu \int F_r d\tau.$$

<sup>1)</sup> H. A. Lorentz, Abhandlungen, Bd. 1, Leipzig 1907, S. 43—71.

$F_r$  ist die bereits von früher her bekannte Dissipationsfunktion; das entsprechende Integral stellt also die in der Zeiteinheit durch Reibung absorbierte Energie dar. Das erste Integral dagegen ist die Zunahme der Störungswucht in der Zeiteinheit. Es ergibt sich also als Bedingung für die Abnahme der Störungsbewegung

$$(4) \quad \mu \int F_r d\tau > \varrho \int F_m d\tau.$$

2. Wenn wir im besonderen als Laminarströmung eine Parallelströmung in der  $x$ -Richtung haben zwischen zwei ebenen Wänden, so ist  $V_y = V_z = 0$  und  $V_x = V$  nur von  $y$  abhängig, und wir erhalten daher

$$F_m = -v'_x v'_y \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Die Bedingung (4) geht dann über in

$$(5) \quad \mu \iint (\text{rot } \mathbf{v}')^2 dx dy > -\varrho \iint \frac{dV}{dy} v'_x v'_y dx dy.$$

Ist der Abstand der beiden Wände  $2h$ , und bewegen sich beide Wände mit den Geschwindigkeiten  $U_0$  und  $-U_0$ , so wird  $\frac{dV}{dy} = \frac{U_0}{h}$ . Führt man ferner dimensionslose Größen ein durch  $\xi = \frac{x}{h}$ ,  $\eta = \frac{y}{h}$ , so hat man

$$(5a) \quad \iint \left( \frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial v'_\eta}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta > -\frac{U_0 h}{\nu} \iint v'_\xi v'_\eta d\xi d\eta.$$

Wenn man nun besondere Störungsbewegungen annimmt, so muß es möglich sein, einen Mindestwert der Reynoldsschen Zahl zu bestimmen, bei welchem der Gewinn und der Verlust an Energie einander gleich werden. Offenbar kommen nur solche turbulenten Bewegungen in Betracht, für welche das erste Integral  $\int F_m d\tau$  positiv ist, die Störungskomponenten also entgegengesetzte Vorzeichen haben. Lorentz hat eine Annäherung an diesen Fall dadurch gewonnen, daß er die Flüssigkeitsteilchen in elliptischen Bahnen sich bewegen läßt, deren große Achse eine geeignete Richtung hat. Die Gleichung

$$\frac{dE}{dt} = \varrho \int F_m d\tau - \mu \int F_r d\tau = 0$$

führt dann zu einem Ausdruck für die Grenzgeschwindigkeit  $U_k$  als Funktion von drei Parametern, die die Größe, die Gestalt und die Lage des Wirbels charakterisieren. Indem Lorentz dann einen möglichst kleinen Wert von  $U_k$  berechnet, d. h. den elliptischen Wirbel so wählt, daß möglichst ungünstige Verhältnisse für die Stabilität entstehen, gelangt er zu einem Wert der entsprechenden Reynoldsschen Zahl

$$\frac{U_k h}{\nu} = 72, \text{ bzw. } \frac{2U_k \cdot 2h}{\nu} = 288,$$

der bedeutend kleiner ausfällt, als der versuchsmäßig gefundene Wert der Kennziffer, die die Grenze für die laminare Strömung angibt. Wenn man das Energiekriterium noch strenger auswertet, also auch die anderen Möglichkeiten der Wirbelbewegung berücksichtigt, erhält man noch kleinere Werte für  $R_k$ . Hamel<sup>1)</sup> hat insbesondere das Turbulenzproblem auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückgeführt. Führt man die Stromfunktion der Störungsbewegung ein

$$v'_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v'_\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial v'_\xi}{\partial \eta} = -\mathcal{A}\psi,$$

so läßt sich die Aufgabe dahin formulieren, daß das Minimum des Integrals

$$E = \iint (\mathcal{A}\psi)^2 d\xi d\eta,$$

unter der Nebenbedingung

$$\iint \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\xi d\eta = 1$$

mit Berücksichtigung der bekannten Randbedingungen gesucht werden soll. Dieses Variationsproblem führt, wie Hamel darlegt, in dem vorliegenden Falle auf die Differentialgleichung

$$(6) \quad \mathcal{A}\mathcal{A}\psi + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

und des weiteren auf die Berechnung des ersten Eigenwertes einer linearen Integralgleichung. Die von Hamel angekündigte numerische Weiterverfolgung der Rechnung ist, soviel ich weiß, bisher noch nicht erschienen.

### § 93. Energiegleichung für die ausgebildete Turbulenz.

1. Wir haben zunächst eine gegebene Laminarbewegung mit einer als klein angenommenen Störung zusammengesetzt und uns gefragt, welche Bedingung erforderlich ist, damit die Störungsenergie eine Vergrößerung mit der Zeit erfährt. Bei der zur vollständigen Ausbildung gekommenen Turbulenz können wir die gesamte Mischbewegung aufteilen in die im wesentlichen gleichbleibende mittlere Strömung, die z. B. in einer Rohrleitung die meßbare Geschwindigkeitsverteilung und die hindurchfließende Menge bestimmt und von der regelmäßigen laminaren Bewegung wohl zu unterscheiden ist, und die eigentlich turbulente, wirbelnde Bewegung, die relativ zur Hauptbewegung von endlicher Größenordnung sein kann.

<sup>1)</sup> G. Hamel, Zum Turbulenzproblem, Göttinger Nachrichten, 1911, S. 261 bis 270.

Wenn wir den Mittelwert einer Zustandsfunktion durch einen horizontalen Strich bezeichnen und als Zeitintegral

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} \varphi dt$$

definieren, so läßt sich jetzt der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  in der Form darstellen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}',$$

wo sich  $\mathbf{v}$  auf die Mittelbewegung und  $\mathbf{v}'$  auf die turbulente Zusatzbewegung bezieht. Dann ergibt sich ohne weiteres

$$\bar{\mathbf{v}}' = \mathbf{0},$$

ferner

$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} &= (\bar{v}_x)^2 + v_x'^2, \text{ usw.}, \\ v_x \overline{v_y} &= v_x \cdot v_y + v_x' v_y', \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Gleichung (1), § 92 erhält dann die Form

$$(1) \quad \rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \mathcal{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = -\mathcal{F} \bar{p} + \mu \mathcal{A} \bar{\mathbf{v}} - \rho \mathcal{F} \cdot \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$$

Sie unterscheidet sich also von der früheren Gleichung durch das Hinzutreten des letzten Ausdruckes. Da nach § 4

$$\mu \mathcal{A} \mathbf{v} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{P},$$

also auch

$$\mu \mathcal{A} v_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

ist, so erhält man die Gleichung für die mittlere Bewegung aus der allgemeinen Differentialgleichung, wenn man die Spannungsgrößen durch folgende Werte ersetzt

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_x = 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho v_x'^2, \text{ usw.}; \\ \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) - \rho \overline{v_y' v_z'}, \text{ usw.} \end{cases}$$

Es treten daher bei der turbulenten Bewegung zusätzliche Spannungen auf, die durch den Impulstransport bedingt sind, in ähnlicher Weise, wie die Bewegung der Moleküle die innere Reibung eines Gases verursacht.

Mit Benutzung der Kontinuitätsgleichung können wir die Bewegungsgleichung in derselben Weise wie früher in folgender Vektorform darstellen

$$(1a) \quad \rho \left[ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \mathcal{F} \bar{\mathbf{v}} + \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}' \mathbf{v}' \right] = -\mathcal{F} p' + \mu \mathcal{A} \mathbf{v}',$$

aus der z. B. für die  $x$ -Richtung sich ergibt

$$\rho \left[ \frac{d v'_x}{dt} + v'_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + v'_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial v'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_x v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_x v'_z}{\partial z} - \frac{\partial v'^2_x}{\partial x} - \frac{\partial v'_x v'_y}{\partial y} - \frac{\partial v'_x v'_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta v'_x.$$

Daraus leiten wir dann ähnlich wie im vorigen Paragraphen die Änderungsgeschwindigkeit für die Energie der Störungsbewegung pro Masseneinheit ab und durch Integration über das gesamte Gebiet die Gleichung

$$(3) \quad \frac{d E'}{dt} = \rho \int F_m d\tau - \mu \int F_r d\tau,$$

die formal mit dem früheren Ausdruck (3), § 92 übereinstimmt. Wir haben jetzt zu setzen

$$- F_m = \mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}); \quad F_r = |\operatorname{rot} \mathbf{v}'|^2 = 4 w'^2.$$

Mit Rücksicht darauf, daß  $\mathbf{v}'$  an den Grenzen verschwindet, kann man durch einfache Umformung des zweiten Integrals zeigen, daß  $F_r$  auch ersetzt werden kann durch den Ausdruck

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}').$$

2. Die vorstehenden Gleichungen können wir nun auf einige besondere Fälle anwenden. Im Falle der Rohrströmung<sup>1)</sup> kann die Bewegungsgleichung auch sofort aus der Bemerkung abgeleitet werden, daß die Schubspannung, die der Strömung entgegenwirkt, durch das Impulstransportglied der turbulenten Bewegung um  $\rho v'_z v'_r$  verringert wird, wenn wir jetzt die Störungskomponenten in der axialen und radialen Richtung mit  $v'_z$  und  $v'_r$  bezeichnen. Für das Gleichgewicht eines mit der Wand koaxialen Flüssigkeitszylinders vom Radius  $r$  und der Länge  $l$  ergibt sich die Beziehung

$$(4) \quad \pi r^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = - 2 \pi r l (\tau_0 - \rho v'_z v'_r),$$

wo  $\tau_0 = \mu \frac{d \bar{v}}{dr}$  zu setzen ist. Setzt man  $\rho v'_z v'_r = J$ , so kommt mit  $\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{l} = q$

$$(4a) \quad q r = - 2 \mu \frac{d \bar{v}}{dr} + 2 J.$$

$J$  ist eine noch unbekannte Funktion von  $r$ , die jedenfalls an der Rohrwand verschwindet. Man hat also an der Grenze

$$(5) \quad q r_0 = - 2 \mu \left( \frac{d \bar{v}}{dr} \right)_{r_0}; \quad \pi r_0^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = - 2 \pi r_0 l \mu \left( \frac{d \bar{v}}{dr} \right)_{r_0},$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. A. Lorentz, a. a. O. S. 65–71.

woraus sich ergibt, daß die erforderliche Druckkraft ebenso wie im Poiseuilleschen Fall der Reibungskraft an der Wand gleich sein muß.

Durch Integration von (4a) ergibt sich

$$(6) \quad \bar{v} = \frac{q}{4\mu}(r_0^2 - r^2) - \frac{1}{\mu} \int_r^{r_0} \mathbf{J} dr$$

und hieraus weiter für die Durchflußmenge

$$(7) \quad Q = \frac{\pi q r_0^4}{8\mu} - \frac{\pi}{\mu} \int_0^{r_0} r^2 \mathbf{J} dr.$$

Man sieht also jedenfalls, daß in Übereinstimmung mit der Erfahrung infolge der turbulenten Bewegung die bei einem Druckgefälle  $q$  durch das Rohr hindurchfließende Flüssigkeitsmenge kleiner wird, als das Poiseuillesche Gesetz angibt. Umgekehrt wird die für ein bestimmtes  $Q$  erforderliche Druckdifferenz und wegen (5) auch das Geschwindigkeitsgefälle an der Wand vergrößert, während dieses Gefälle in der Nähe der Achse natürlich entsprechend kleiner wird als im Poiseuilleschen Fall. Die turbulente Bewegung übt also, was von vornherein zu erwarten war, auf die Geschwindigkeitsverteilung eine ausgleichende Wirkung aus. Wie man ausgehend von empirischen Feststellungen (z. B. der Blasius'schen und verwandten Formeln für den Druckabfall) und Dimensionsbetrachtungen zu dem Kármán'schen und andern Potenzgesetzen für die Geschwindigkeitsverteilung gelangt, ist früher ausgeführt worden.

Für die Energiebeziehung hat man

$$(8) \quad \bar{F}_m = F_m = -\overline{v_r v_z} \frac{d\bar{v}}{dr} = -\frac{\mathbf{J}}{\varrho} \frac{d\bar{v}}{dr}$$

zu setzen und erhält dann wegen (4a) nach Lorentz

$$(9) \quad A = Q(p_1 - p_2) - q l Q - 2\pi\mu l \int_0^{r_0} \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 r dr - 2\pi l \int_0^{r_0} \mathbf{J} \frac{d\bar{v}}{dr} r dr = A' + A''.$$

Wenn man annimmt, daß die turbulente Wirbelenergie konstant ist, so folgt

$$(10) \quad \mu \int F_r d\tau = A - 2\pi\mu l \int_0^{r_0} \left(\frac{d\bar{v}}{dr}\right)^2 r dr.$$

Die Arbeit, die erforderlich ist, um das Volumen  $Q$  durch das Rohr hindurchzutreiben, setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die auf die Überwindung des Widerstandes und die Wirbelenergie verwendet werden. Setzt man

$$v = v_1 + v_2,$$



wo  $v_1 = c(r_0^2 - r^2)$  der Poiseuilleschen Strömung entspricht, so wird der erste Bestandteil der Arbeit

$$(11) \quad A' = 2\pi\mu l \int_{r_0}^0 \left(\frac{dv_1}{dr}\right)^2 r dr + 4\pi\mu l \int_{r_0}^0 \frac{dv_1}{dr} \frac{dv_2}{dr} r dr + 2\pi\mu l \int_{r_0}^0 \left(\frac{dv_2}{dr}\right)^2 r dr.$$

Für das Integral des zweiten Ausdruckes erhält man aber

$$-2C \int_{r_0}^0 \frac{dv_2}{dr} r^2 dr = -2C [v_2 r^2]_{r_0}^0 + 4C \int_{r_0}^0 v_2 r dr = 0,$$

wenn die Durchflußmenge für beide Strömungsarten dieselbe sein soll. Es ergibt sich, daß der erste Bestandteil der Arbeit  $A'$  bereits größer ausfällt, als die Arbeit der Poiseuilleströmung, die dieselbe Menge  $Q$  befördert.

3. Für den zweiten Fall, den der Strömung zwischen ebenen Wänden ( $y = \pm h$ ), gewinnen wir wie oben das Grenzkriterium aus der Gleichung

$$Q \int F_m d\tau = \mu \int F_r d\tau$$

in folgender Form

$$(12) \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dv}{dy} Q \overline{v'_x v'_y} dy + \mu \int_{-h}^{+h} \overline{(\text{rot } \mathbf{v}')^2} dy = 0$$

und für die Tangentialspannung zwischen den Flüssigkeitsschichten den Ausdruck

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} - Q \overline{v'_x v'_y}.$$

Daraus entsteht dann durch Elimination der mittleren Hauptgeschwindigkeit

$$(13) \quad \int_{-h}^{+h} \left\{ Q^2 \overline{(v'_x v'_y)^2} + \tau Q \overline{v'_x v'_y} + 4\mu^2 \overline{w'^2} \right\} dy = 0$$

und die Spannung

$$(14) \quad \tau = - \frac{\int_{-h}^{+h} \left\{ Q^2 \overline{(v'_x v'_y)^2} + 4\mu^2 \overline{w'^2} \right\} dy}{\int_{-h}^{+h} Q \overline{v'_x v'_y} dy},$$

während die Geschwindigkeit  $2U_0$ , mit der sich die beiden Wände gegeneinander bewegen, aus der Gleichung sich ergibt

$$(15) \quad 2U_0 = \int_{-h}^{+h} \frac{dv}{dy} dy = 2 \frac{\tau}{\mu} h + \frac{1}{\nu} \int_{-h}^{+h} \overline{v'_x v'_y} dy.$$

Das Widerstandsgesetz ist dann bestimmt durch die Integrale

$$\int_{-h}^{+h} \overline{v'_x v'_y} dy, \quad \int_{-h}^{+h} \overline{(v'_x v'_y)^2} dy, \quad \int_{-h}^{+h} \overline{w'^2} dy.$$

Burgers<sup>1)</sup> legt zur Ermittlung dieser Integrale die von Lorentz eingeführten elliptischen Wirbel zugrunde und stellt sich die Frage, bei welcher Größe, Exzentrizität und Schiefelage der Wirbel der Widerstand bei gegebenem  $U_0$  ein Maximum erreicht. Die Untersuchung führt auf zwei Gesetze

$$l = c U_0^{\frac{3}{2}}, \quad r = c \cdot U_0^2,$$

von denen das erste dem Fall gleicher, das zweite dem Fall ungleicher Wirbel entspricht, deren Größe eine gewisse untere Schranke über-

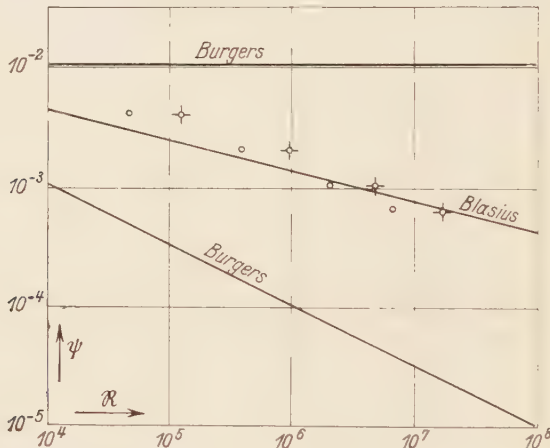


Abb. 116. Turbulenter Widerstand einer Strömung zwischen ebenen Wänden. (Nach Blasius, Burgers, Tietjens-v. Kármán.)

schreitet. Die entsprechenden Widerstandskräfte erweisen sich im ersten Falle als zu klein, im zweiten Falle als viel zu groß, wie Vergleich mit den in Abb. 116 dargestellten Versuchswerten von Blasius zeigt.

v. Kármán<sup>2)</sup> führt, über die bisherigen Ansätze hinausgehend, in An-

<sup>1)</sup> J. M. Burgers, Verslagen der Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Bd. 32 (1923), S. 574; Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922, S. 143.

<sup>2)</sup> Th. v. Kármán, Über die Stabilität der Laminarbewegung und die Theorie der Turbulenz, *Proceed. of the I. Intern. Congr. for appl. Mechanics Delft 1924, Delft 1925, S. 105f.*

lehnung an die kinetische Theorie der Gase eine statistische Berechnung des turbulenten Strömungswiderstandes durch, indem er den Begriff der Wahrscheinlichkeit der Schwankungsverteilung benutzt. Führt man, bei Beschränkung auf einen speziellen Fall, für die Schwankungsbewegung die Stromfunktion

$$\psi = A \cos(\alpha x + \beta y),$$

also die Komponenten

$$(16) \quad v'_x = A\beta \sin(\alpha x + \beta y), \quad v'_y = -A\alpha \sin(\alpha x + \beta y),$$

ein, so ergeben sich folgende für die Spannungen maßgebende Mittelwerte

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{v'_x v'_y} = -A^2 \frac{\alpha\beta}{2}, \\ |\overline{\text{rot } \mathbf{v}'}|^2 = \frac{A^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \end{array} \right.$$

und daraus für die auf die Masseneinheit bezogene Energie oder das halbe Quadrat der mittleren Schwankungsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{2} |\overline{\mathbf{v}'}|^2 = \frac{1}{2} A^2 (\alpha^2 + \beta^2).$$

Mit Einführung von  $v'$  hat man daher

$$(17a) \quad \overline{v'_x v'_y} = -\frac{v'^2}{2} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad |\overline{\text{rot } \mathbf{v}'}|^2 = \frac{v'^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Wenn wir nun einen festen Mittelwert  $v'$  zugrunde legen, so kommt es zunächst darauf an, die Bestimmung der Größen  $\alpha$ ,  $\beta$  nach den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorzunehmen. Bezeichnet man nach v. Kármán die Häufigkeit eines Zustandes zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta$  und  $\beta + d\beta$  mit  $f(\alpha, \beta)$ , so muß die logarithmische Wahrscheinlichkeit

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f \log f d\alpha d\beta$$

unter Berücksichtigung der Dissipationsbedingung zu einem Maximum gemacht werden. Diese Bedingung bringt zum Ausdruck, daß der weitaus größte Teil der durch die Bewegung der Wände geleisteten Arbeitsmenge im mittleren Bereich des Kanals von der Nebenbewegung verzehrt wird. Es ergibt sich dann aus

$$(18) \quad -\rho \overline{v'_x v'_y} \cdot U_0 = \mu |\overline{\text{rot } \mathbf{v}'}|^2 h$$

bei Einführung der Werte (17) die Bedingung

$$(19) \quad \frac{v'^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha\beta) \left\{ \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\mu h}{U_0 \rho} (\alpha^2 + \beta^2) \right\} d\alpha d\beta = 0.$$

Da es uns hier nur auf die Darlegung der Methode ankommt, wollen wir die weitere Rechnung nicht aufschreiben und nur die Resultate

angeben. v. Kármán erhält mit  $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg} \vartheta$  für die wahrscheinlichste Verteilungsfunktion

$$(20) \quad f(\alpha, \beta) = c \cdot e^{-3,22 \left( \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \frac{\mu \hbar k^2}{U_0 \varrho} \right)}$$

und daraus für den Mittelwert der örtlichen Frequenz in der  $x$ -Richtung oder die „Wellenlänge“ der Störung

$$(21) \quad \bar{\alpha}^2 = 0,155 \frac{U_0 \varrho}{\mu \hbar}, \quad \bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}} = 2,5 \frac{\hbar}{\Re} = 2,5 \sqrt{\frac{\nu \hbar}{U_0}}.$$

Um über die mittlere Schwankungsenergie  $\frac{1}{2} v'^2$  eine Aussage zu machen, müssen nämlich die Vorgänge an der Wand berücksichtigt werden. Der Einfachheit wegen nimmt v. Kármán an, daß die Geschwindigkeit in der Wandnähe linear vom Wert 0 auf den Wert  $U_0$  anwächst, d. h. ein geknicktes Geschwindigkeitsprofil, wie es in der Tietjensschen Arbeit benutzt wurde. Dann kann man setzen

$$v = \mu \frac{U_0}{\delta} = \varrho \overline{(v'_x v'_y)}_{y=0} \delta.$$

Aus der Prandtl-Tietjensschen Störungsrechnung ergibt sich eine Beziehung zwischen der Kennzahl der Grenzschicht  $\xi = \frac{U_0 \delta}{\nu}$  und dem Verhältnis der Wellenlänge  $\lambda$  der Störung zur Grenzschichtdicke  $\eta = \frac{\lambda}{\delta}$ . Verbindet man die v. Kármánsche Beziehung  $\frac{U_0 \lambda^2}{\hbar \nu} = B$  mit dem Ansatz

$$\xi = A \eta^n,$$

wo  $A$  eine Konstante ist, so ergeben sich für  $\lambda$  und  $\delta$  die beiden Gleichungen

$$\frac{U_0 \delta^{n+1}}{\lambda^n \mu} = A, \quad \frac{U_0 \lambda^2}{\nu \hbar} = B$$

und daraus

$$\delta = c \cdot U_0^{-\frac{2+n}{2n+2}}, \quad \lambda = \mu \frac{U_0}{\delta} = c \cdot U_0^{\frac{3n+4}{2n+2}}.$$

Wir haben dann im besonderen

$$\text{für } n=0: \quad \tau = c \cdot U_0^2,$$

$$\text{für } n=1: \quad \tau = c \cdot U_0^{\frac{7}{4}},$$

$$\text{für } n \rightarrow \infty: \quad \tau = c \cdot U_0^{\frac{3}{2}}.$$

Die Grenzwerte stimmen also wieder mit den Burgersschen Werten überein; der mittlere entspricht dem Blasiuschen Wert.

Setzt man weiter

$$\tau = \mu \frac{U_0}{\delta} = \psi \varrho \frac{U_0^2}{2},$$

so ergibt sich für den Reibungskoeffizienten  $\psi$

$$\psi = \frac{2\nu}{U_0 \delta} = \frac{2}{\xi}.$$

Andererseits hat man

$$\xi^2 \eta^2 = \Re \cdot B, \quad \Re = \frac{\xi^2 \eta^2}{B}.$$

Man erhält daher den Widerstandskoeffizienten in Abhängigkeit von der Kennzahl, sobald die Beziehung zwischen  $\xi$  und  $\eta$  bekannt ist. Die beigegebene, der v. Kármánschen Arbeit entnommene Abb. 116 gibt neben den Burgersschen Widerstandszahlen und dem nach der Blasiuschen Formel berechneten Wert  $\psi$  die Resultate der v. Kármánschen Rechnung wieder, die auf Grund der Tietjensschen Arbeit nach den angegebenen Formeln durchgeführt wurde. Die Kreuze entsprechen dabei der Annahme, daß die mittlere Wellenlänge im turbulenten Bereich gleich ist der Wellenlänge der Grenzschichtströmung, die weder angefacht noch gedämpft wird, während für die mit Kreisen bezeichneten Werte die mittlere Wellenlänge mit dem Grenzschichtwirbel übereinstimmt. Bei den verhältnismäßig groben Voraussetzungen und der Unkenntnis der Geschwindigkeitsverteilung der mittleren Bewegung ist eine vollständige Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nicht zu erwarten. Über einen weiteren Versuch v. Kármáns, der mit bedeutend weniger Annahmen auskommt und einen besseren Einklang mit den Versuchen erzielt, soll im letzten Abschnitt berichtet werden.

## § 94. Erweiterung der hydrodynamischen Differentialgleichung für die Turbulenz.

Die Erscheinungen der Turbulenz unterscheiden sich so wesentlich von der laminaren Bewegung, daß man wohl daran zweifeln kann, ob die Voraussetzungen, die der Ableitung der Stokes-Navierschen Gleichungen der Hydrodynamik zugrunde liegen — und sie beziehen sich im wesentlichen auf den laminaren Fall, — ohne weiteres Gültigkeit behalten werden. Es liegt jedenfalls nahe, die Grundgleichungen so zu erweitern, daß die besonderen Verhältnisse des turbulenten Falles von vornherein Berücksichtigung finden. Nach den bemerkenswerten Versuchen, die u. a. von J. Boussinesq<sup>1)</sup> und O. Reynolds gemacht worden sind, hat neuerdings Mohorovičić<sup>2)</sup> einen Ansatz ge-

<sup>1)</sup> J. Boussinesq, *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides*, Paris 1897.

<sup>2)</sup> Mohorovičić, *Hydrodynamische Grundgleichungen für die turbulente Bewegung*, Z. f. techn. Physik, 6. Jahrg. (1925), S. 68—74.

geben, der darauf hinausläuft, das Gleichungssystem in zwei Teilsysteme zu zerlegen, von denen das erste im wesentlichen die mittlere Grundbewegung  $\bar{\mathbf{v}}$ , das zweite die überlagerte Schwankungsbewegung  $\mathbf{v}'$  regelt. Wenn man

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$$

setzt und annimmt, daß ein Teil des Geschwindigkeits- bzw. Druckgefälles die mittlere Strömung und ein anderer Teil die Turbulenz verursacht, ferner statt der gewöhnlichen die „virtuelle“ innere Reibung  $\mu'$  bzw.  $\nu'$  einführt und die eingeprägte Kraft mit  $\mathfrak{f}$ , die innere Kraft mit  $\mathfrak{f}'$  bezeichnet, so zerfallen die Bewegungsgleichungen in zwei Systeme, die vektoriell die Form annehmen

$$(1) \quad \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \mathfrak{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{e} \mathcal{F} p + \nu' \Delta \bar{\mathbf{v}}; \quad \mathcal{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{F} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \mathcal{F} \bar{\mathbf{v}} = \mathfrak{f}' - \frac{1}{\rho} \mathbf{e}' \mathcal{F} p + \nu' \Delta \mathbf{v}'; \quad \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}' = 0,$$

wo  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{e}'$  zwei Vektoren sind, für deren Komponenten (als Bruchteile des Gefälles) die Beziehungen gelten

$$(3) \quad e_x + e'_x = 1, \quad e_y + e'_y = 1, \quad e_z + e'_z = 1.$$

Es handelt sich dann darum, das erste System (1) zu lösen und die gefundenen Werte der Geschwindigkeit in das System (2) einzusetzen.

Mohorovičić prüft den neuen Ansatz zunächst für den Fall der turbulenten Strömung im Kreisrohr. Nehmen wir an, daß die mittlere Geschwindigkeit stationär und parallel sei der mit der Rohrachse zusammenfallenden  $x$ -Achse, so kann  $\bar{v}_x = \bar{v}$  als Funktion des Abstandes  $r$  von der Achse angesehen werden, und es wird

$$\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0.$$

Ferner wollen wir bei horizontaler Lage der Achse  $k=0$  setzen. Dann entsteht aus (1) die Gleichung

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot c.$$

Setzt man nun mit Mohorovičić

$$(5) \quad e = A(b + ar^n); \quad \bar{v} = K_0 \vartheta(r) + B,$$

wo  $A$ ,  $b$  und  $a$  Konstanten bzw. Funktionen des Rohrhalmessers, ebenso  $K_0$  und  $B$  Konstanten sind, und  $\vartheta$  eine Funktion von  $r$  ist, so entsteht aus (4)

$$(6) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{K}{K_0} A(b + ar^n),$$

wobei  $K = \frac{1}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$  gesetzt ist.



Um (6) zu lösen, machen wir weiter den Ansatz

$$(7) \quad \mathcal{D} = \alpha A a r^{m+2} + C r^2.$$

Dann erhält man

$$(8) \quad C = \frac{K}{4K_0} A b, \quad n = -2 \pm \sqrt{\frac{K}{\alpha K_0}}.$$

Wenn  $m$  eine reelle Zahl bedeutet, so wird mit  $K = m^2 \alpha K_0$

$$n = m - 2 \quad \text{oder} \quad n = -m - 2.$$

Schließt man die negativen Potenzen aus, so erhält man

$$\bar{v} = \frac{K A a}{m^2} r^m + \frac{K A b}{4} r^2 + B \quad (m \geq 2)$$

und bei Berücksichtigung des Haftens an der Wand ( $r = r_0$ )

$$(9) \quad \bar{v} = -\frac{A}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \frac{a}{m^2} (r_0^m - r^m) + \frac{b}{4} (r_0^2 - r^2) \right] \quad (m \geq 2).$$

Die Durchflußmenge wird daher

$$(10) \quad Q = \frac{A}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \frac{m}{m+2} \frac{a \pi}{m^2} r_0^{m+2} + \frac{b \pi}{8} r_0^4 \right].$$

Bilden wir daraus die mittlere Geschwindigkeit, so erhalten wir für den

Quotienten  $\frac{\bar{v}}{\bar{v}_m}$  den Wert

$$(11) \quad \frac{\bar{v}}{\bar{v}_m} = \frac{a}{m^2} \frac{(r_0^m - r^m) + \frac{b}{4} (r_0^2 - r^2)}{\frac{m}{m+2} \frac{a}{m^2} r_0^m + \frac{b}{8} r_0^2}.$$

Man sieht nun, daß der Fall der Poiseuilleströmung den Werten

$$A = b = 1, \quad a = 0$$

entspricht. Ferner erhält man z. B. für  $b=0$  und  $A \cdot a = a_0$  die Relationen

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{v} = -\frac{a_0}{\mu m^2} \frac{\partial p}{\partial x} (r_0^m - r^m); \\ \frac{\bar{v}}{\bar{v}_m} = \frac{m+2}{m} \left( 1 - \frac{r^m}{r_0^m} \right). \end{cases}$$

Alle in diesen letzteren Gleichungen enthaltenen Fälle beziehen sich auf turbulente Strömungen, und zwar wird die Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt um so gleichmäßiger, je größer der Exponent  $m$  wird (vgl. Abb. 117). Die Zahl  $m$ , die Mohorovičić als den „Grad der Turbulenz“ bezeichnet, muß

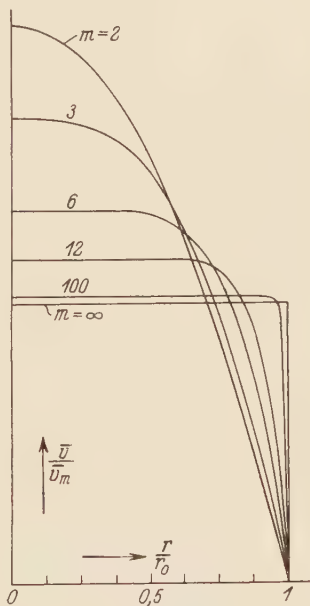


Abb. 117. Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten im Kreisrohr bei verschiedenen Turbulenzgraden. (Nach Mohorovičić.)

natürlich als Funktion der Reynoldsschen Zahl aufgefaßt werden. Leider hat es Mohorovičić versäumt, in seiner Arbeit nähere Angaben über diese Abhängigkeit zu machen.

Die allgemeine Lösung (10) enthält noch vier verfügbare Konstanten  $A$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $m$ , und es ist daher möglich, die Theorie den Versuchen gut anzupassen. Wir wollen hier das von Mohorovičić durchgerechnete Beispiel für eine ausgesprochen turbulente Strömung vorführen, um die praktische Bedeutung der Theorie zu zeigen. Setzt man  $r=0$  und  $b=ga$ , so erhält man mit  $\bar{v}_0:\bar{v}_m=\lambda_0$

$$(13) \quad g = \frac{4r_0^{m-2} \left[ \frac{\lambda_0}{m+2} - \frac{1}{m} \right]}{m(1 - \frac{1}{2}\lambda_0)}$$

und daher für die Geschwindigkeitsverteilung den für die praktische Rechnung geeigneten Ausdruck

$$(14) \quad \lambda = \frac{\bar{v}}{c_m} = \left\{ \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^m \right) + \frac{m}{m+2} \frac{\lambda_0 - 1}{1 - \frac{1}{2}\lambda_0} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right\} : \left[ \frac{m}{m+2} + \frac{m}{2} \frac{\lambda_0 - 1}{(1 - \frac{1}{2}\lambda_0)} \right].$$

Benutzt man nun den von Bazin für ein sorgfältig geglättetes Zementrohr von  $r_0 = 40$  cm gefundenen Wert  $\lambda_0 = 1,167$  und den in unmittelbarer Nähe der Rohrwand ( $r = 39,96$  cm) gültigen Wert  $\lambda = 0,741$ , so ergibt sich für  $m$  ein Wert zwischen 2000 und 3000. Die Übereinstimmung zwischen den mit zwei Werten  $m$  berechneten weiteren  $\lambda$ -Werten mit den Messungen fällt, wie die beigegebene Tabelle zeigt, außerordentlich günstig aus. Es scheinen also auch die Voraussetzungen des Ansatzes, insbesondere die Konstanz der „virtuellen“ Reibung im wesentlichen zutreffend zu sein.

Tabelle für die Geschwindigkeitsverteilung im Kreisrohr.  
(Nach Mohorovičić).

$\frac{r}{r_0}$	$\lambda$ (Versuch)	$\lambda$ (Rechnung) $m = 2200$	$\lambda$ (Rechnung) $m = 3000$
0	1,167	1,167	1,167
0,125	1,160	1,162	1,162
0,250	1,147	1,146	1,146
0,375	1,126	1,120	1,120
0,500	1,092	1,084	1,084
0,625	1,047	1,037	1,037
0,750	1,001	0,980	0,980
0,875	0,922	0,912	0,912
0,937	0,846	0,875	0,875
0,999	0,741	0,741	0,792
1,0	0,—	0,—	0,—

Wenn die Zahl  $m$  bestimmt ist, so ergibt die Relation (13) den Wert  $g$ . Dann erhält man mit  $A=1$  für die Durchflußmenge

$$(15) \quad Q = \frac{a}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \frac{m}{m+2} \frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi \left( \frac{\lambda_0}{m(m+2)} - \frac{1}{m^2} \right)}{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda_0 \right)} \right] r_0^{m+2}.$$

Setzt man mit Mohorovičić noch  $a = \frac{k}{r_0^3}$ , so lassen sich die Konstanten  $k$  bzw.  $\frac{k}{\mu'}$  und  $\beta$  den verschiedenen Messungsergebnissen anpassen.

Aber nicht nur der Fall stationärer mittlerer Geschwindigkeit, sondern auch der instationäre Fall scheint von der vorliegenden Theorie im ganzen richtig wiedergegeben zu werden. Insbesondere konnte Mohorovičić zeigen, was hier nicht näher dargelegt werden soll, daß das durch die Versuche von O. Reynolds, Couette und E. Bose festgestellte empirische Gesetz für das Druckgefälle<sup>1)</sup>

$$(16) \quad p_1 - p_2 = A_T \cdot \left( \frac{1}{t} \right)^s,$$

wo  $t$  die Zeit bedeutet,  $A_T$  eine Konstante ist und  $s$  etwa zwischen 1,6 und 1,95 liegt, als spezieller Fall aus einer allgemeinen Beziehung abgeleitet werden kann. Es bleibt abzuwarten, ob die weiteren, bereits angekündigten Veröffentlichungen von Mohorovičić über die bisherigen, wesentlich formalen Leistungen der Theorie hinaus eine wirkliche Bereicherung der physikalischen Vorstellungen vom Wesen der turbulenten Erscheinungen bringen werden.

## § 95. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.

1. Einen neuen Versuch, das Geschwindigkeits- und Widerstandsgesetz der ausgebildeten turbulenten Strömung mit einem Minimum von willkürlichen Annahmen abzuleiten, hat v. Kármán unternommen, der um so bemerkenswerter ist, als er eine sehr vollständige Übereinstimmung mit den Versuchen erzielt. Wir nehmen wieder an, daß die mittlere Strömung eine Parallelströmung in der  $x$ -Richtung sei, und daß die Schwankungsströmung in der  $y$ -Richtung nur eine geringe Ausdehnung haben möge. Der wesentliche Gedanke, von dem v. Kármán ausgeht, besteht in der Annahme, daß mechanische Ähnlichkeit des Schwankungszustandes

<sup>1)</sup> Vgl. Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, I. Bd., Leipzig 1914, S. 905f.

<sup>2)</sup> Th. v. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin 1930, S. 58—76; vgl. auch den Verhandlungsbericht zum III. Intern. Kongress für techn. Mechanik, Stockholm 1930.

unabhängig sei von der Lage des durch  $y$  gekennzeichneten Ortes, in dessen Nähe wir den Zustand untersuchen. Legen wir etwa die Koordinatenachsen so, daß der zu untersuchende Punkt die Koordinate  $y=0$  haben möge. Dann können wir für die Geschwindigkeit der Grundströmung und die Stromfunktion die Entwicklungen ansetzen

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{v} = \dot{v}_0 y + \ddot{v}_0 \frac{y^2}{2} + \dots, \\ \Psi(x, y) = \dot{v}_0 \frac{y^2}{2} + \ddot{v}_0 \frac{y^3}{6} + \dots + \psi(x, y), \end{cases}$$

wo  $\psi$  sich auf die Schwankungsbewegung ( $v'$ ) bezieht. Setzen wir nun

$$(2) \quad x = l\xi, \quad y = l\eta, \quad \psi = A f(\xi, \eta)$$

und verlangen, daß nur  $l$  und  $A$  von der Lage, also von  $\dot{v}_0, \ddot{v}_0$  abhängen,  $f$  dagegen davon unabhängig sein soll, dann ergibt die bekannte Differentialgleichung für die Stromfunktion des ebenen Falles durch Einsetzen von (1) die Beziehung

$$(3) \quad \dot{v}_0 l \eta \frac{A}{l^3} \frac{\partial \mathcal{J}f}{\partial \xi} = \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} \ddot{v}_0 + \frac{A^2}{l^4} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \mathcal{J}f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \mathcal{J}f}{\partial \eta} \right) = 0,$$

die unabhängig von  $A, l, \dot{v}_0, \ddot{v}_0$  erfüllt ist, wenn die Proportionalbeziehungen bestehen

$$(4) \quad \dot{v}_0 l \cong \frac{A}{l}; \quad \ddot{v}_0 \cong \frac{A}{l^3}, \quad l \cong \frac{\dot{v}_0}{\ddot{v}_0}, \quad A \cong \frac{(\dot{v}_0)^3}{(\ddot{v}_0)^2} \cong l^2 \dot{v}_0.$$

Die Schubspannung wird

$$\tau = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{oder} \quad \tau \cong \rho l^2 \dot{v}_0.$$

Die Länge  $l$ , die für das Schwankungsfeld charakteristisch ist, stimmt im wesentlichen überein mit dem von Prandtl<sup>1)</sup> eingeführten sogenannten Mischungsweg, der eine ähnliche Rolle spielt wie die freie Weglänge in der kinetischen Gastheorie. Prandtl definiert ihn als den Weg, den eine bewegte Flüssigkeitsmasse zurücklegt, bevor sie durch Vermischung mit Nachbarmassen ihre Individualität aufgibt. Bei der Verschiebung um die Strecke  $l$  quer zur Stromrichtung wird sich die Geschwindigkeit der Masse von der an dem neuen Ort herrschenden Geschwindigkeit um einen Betrag unterscheiden, der in erster Annäherung gleich  $l \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$  gesetzt wird. Man kann deshalb  $v'_x = l \dot{v}$  setzen. Damit ist  $\rho l \dot{v}$  der Impulsbetrag, den das Teilchen an die Schicht, in die es durch die Mischbewegung

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen über ausgebildete Turbulenz, Z. f. a. M. M., Bd. 5 (1925), S. 136; ferner Über die ausgebildete Turbulenz, Verhandlungen des II. Intern. Kongresses für Mechanik, Zürich (1927), S. 62.

gelangt, überträgt. Die Querbewegung  $v'_y$  entsteht dadurch, daß zwei Teilchen mit verschiedenem  $v'_x$  zusammenprallen oder sich voneinander entfernen. Prandtl setzt sie proportional mit  $l$  und dem Absolutbetrag  $|\dot{\bar{v}}_1$ . Man erhält daher in Übereinstimmung mit dem v. Kármán'schen Ansatz für die scheinbare Schubspannung

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2.$$

2. Wenn wir eine Strömung zwischen zwei parallelen Wänden  $y = \pm h$  voraussetzen, so haben wir mit der Substitution

$$l = k \frac{\dot{\bar{v}}}{\bar{v}}$$

für die Schubspannung in der Entfernung  $y$  von der Kanalmitte

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{h} = k^2 \rho \frac{(\dot{\bar{v}})^4}{(\bar{v})^2}$$

oder

$$\frac{\ddot{\bar{v}}}{(\dot{\bar{v}})^2} = k \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\tau_0}} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Durch einmalige Integration entsteht daraus

$$(5) \quad \frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{a - \sqrt{y}}.$$

Für große Kennzahlen muß  $\frac{d\bar{v}}{dy}$  sich dem Grenzwert  $\frac{\tau_0}{\mu}$  nähern, der wegen der Kleinheit von  $\mu$  sehr groß ist gegenüber den Werten, die  $\dot{\bar{v}}$  in einiger Entfernung von der Wand annimmt. Wir können daher  $a = \frac{1}{2} \bar{h}$  setzen und erhalten dann

$$(5a) \quad \frac{d\bar{v}}{dy} = \dot{\bar{v}} = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{\bar{h} - \sqrt{y}}}.$$

Nochmalige Integration ergibt ferner mit  $\bar{v}_{\max} = \bar{v}_0$

$$(6) \quad v = \bar{v}_0 + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[ \log \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{\bar{h}}} \right) + \sqrt{\frac{y}{\bar{h}}} \right].$$

Entnimmt man die Werte von  $\frac{\tau_0}{\rho}$  den Versuchen von Dönch<sup>1)</sup> und Nikuradse<sup>2)</sup> und setzt die Konstante  $k = 0,36$ , so erhält man, wie die Abb. 118 zeigt, eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen.

<sup>1)</sup> F. Dönch, Forschungsarbeiten, Heft 282 (1926).

<sup>2)</sup> I. Nikuradse, Forschungsarbeiten, Heft 289 (1929).

Übrigens läßt sich auch für die turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Kreisrohr, wie die in Abb. 119 wiedergegebenen Versuchsergebnisse zeigen, im wesentlichen dieselbe Gesetzmäßigkeit feststellen.

Für den Mischungsweg  $l$  ergibt die Rechnung

$$(7) \quad l = k \frac{\bar{v}}{v} = 2kh \sqrt{\frac{y}{h}} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right).$$

Setzt man in der Nähe der Wand  $y = h - y_1$ , so erhält man

$$(7a) \quad l = 2kh \left\{ \sqrt{1 - \frac{y_1}{h} + \frac{y_1}{h} - 1} \right\} \\ = ky_1 \left(1 - \frac{y_1}{4h} - \frac{y_1^2}{8h^2} - \dots\right).$$

Der Verlauf von  $\frac{l}{h}$  stimmt nicht vollständig mit den Versuchsergebnissen überein, die sich auf die Formel

$$l = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

stützen; während hier die Größe  $l$  in der Kanalmitte einen konstanten Wert annimmt, erhält sie bei v. Kármán bei  $y_1 = \frac{3}{4}h$  ein Maximum, um dann in der Mitte des Kanals auf Null abzufallen. v. Kármán spricht die Vermutung aus, daß das Beobachtungsmaterial nicht ausreicht, um den Verlauf von  $l$  in der Kanalmitte einwandfrei festzulegen.

3. In der Nähe der Wand, wo das Geschwindigkeitsgefälle sehr groß wird, darf die Zähigkeit nicht mehr vernachlässigt werden. Für dieses Gebiet benutzt v. Kármán die Vorstellung, daß in der Wandnähe eine Art Laminarschicht existiert, und daß die Länge  $l$  nicht bis auf Null abnimmt, sondern nur bis zu einem Kleinstwert an der Grenze der Laminarschicht, der mit deren Dicke proportional ist. Einem Gedanken G. J. Taylors entsprechend können wir annehmen, daß die Wirbelteilung der Wandturbulenz und daher auch die charakteristische Länge nur von der Schubspannung  $\tau_0$  abhängt und durch den Ausdruck

$$l = \alpha \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

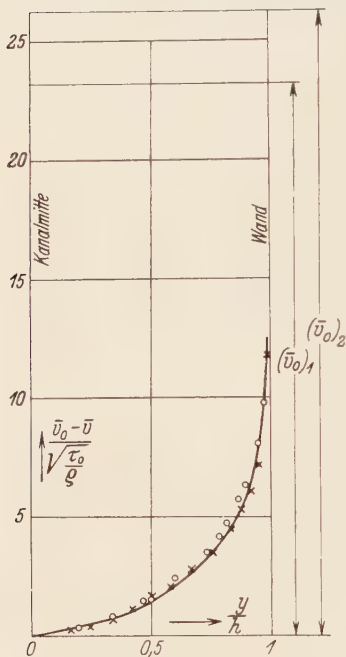


Abb. 118. Geschwindigkeitsverteilung in einem Kanal. (Nach v. Kármán.)



darstellbar ist, wo  $\alpha$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet; dabei wird die von der Wand aus gezählte Koordinate nach (7)

$$y_1 = \frac{l}{k} = \frac{1}{k} \alpha \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}.$$

Wegen  $\frac{\dot{v}}{\ddot{v}} = -y_1$  ergibt sich

$$(8) \quad \bar{v}^* = v_0 - \bar{v}(y_1) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[ \lg \frac{h}{y_1} + c \right] = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[ \lg \frac{h \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\frac{\alpha \nu}{k}} + c \right].$$

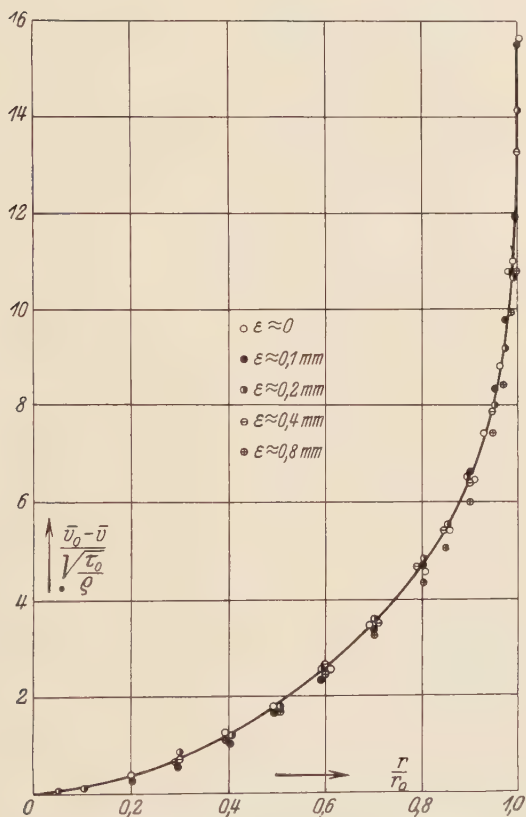


Abb. 119. Geschwindigkeitsverteilung in glatten und rauhen Kreisrohren mit  $Q = 6,10^3 \text{ cm}^3/\text{s}$ ;  $r = 1,25$  bis  $1,2 \text{ cm}$ . (Nach Nikuradse.)

Ferner ist der Geschwindigkeitsunterschied  $\bar{v}^{**}$  zwischen den beiden Grenzen der Laminarschicht, da die Dicke der Schicht  $\delta \cong \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}$ , ferner

für die Randspannung  $\tau_0 = \mu \frac{v^{**}}{l}$  gesetzt werden kann, aus der Gleichung

$$(9) \quad v_0 = \bar{v}^* + \bar{v}^{**} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[ \lg \frac{h}{\nu} \frac{\bar{v}_0}{\rho} + A \right],$$

zu entnehmen. Führt man ferner die Größen

$$\Re_m = \frac{\bar{v}_0 \cdot h}{\nu}, \quad \psi = \frac{2\tau_0}{\rho \bar{v}_0^2}$$

ein, so liefert die Gleichung (9) folgende Beziehung

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{k\sqrt{2}}{1\psi} = \lg(\Re_m \sqrt{\psi}) + A - \frac{1}{2} \lg 2 \\ \frac{k\sqrt{2}}{1\psi} = \lg(\Re_m \sqrt{\psi}) + C, \end{cases}$$

die, obwohl zunächst nur für den ebenen Fall abgeleitet, ebenso für kreisförmige Rohre gilt, wobei  $k$  denselben Wert behält und nur die Kon-

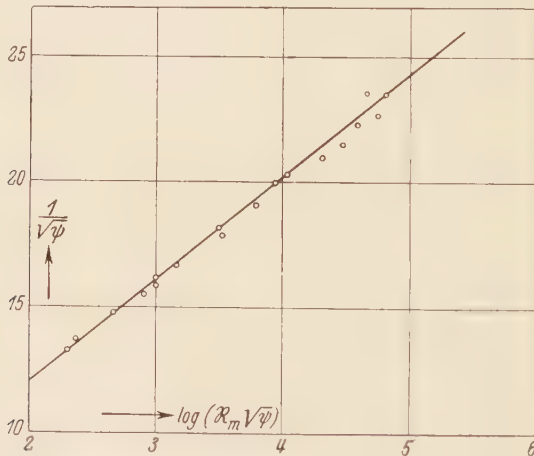


Abb. 120. Widerstandsgesetz für glatte Kreisrohre. (Nach v. Kármán.)

stante  $C$  abgeändert, ferner  $\Re_m$  durch  $\frac{\bar{v}_0 \cdot r_0}{\nu}$  ersetzt werden muß. In der Abb. 120 ist die Zahl  $\frac{1}{1\psi}$  in Abhängigkeit von  $\lg(\Re_m \sqrt{\psi})$  nach der v. Kármánschen Rechnung und für verschiedene Versuchswerte aufgetragen. Man erhält in beiden Fällen mit großer Annäherung eine lineare Abhängigkeit in einem Bereich, der von  $\Re_m = 2000$  bis  $\Re_m = 1600000$  sich erstreckt. Dabei ergeben sich die beiden Konstanten zu

$$k = 0,38, \quad C = 1,83,$$

wobei  $C$  sich speziell auf Kreisrohre bezieht, während  $k$  wahrscheinlich eine universelle Konstante ist, die von der Form der Grenzen nicht berührt wird.

4. Es wurde früher dem Ansatz

$$(11) \quad \psi = \text{const } \Re^{-m}$$

entsprechend die Verteilungsformel

$$(12) \quad v = \text{const } \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} y_1}{\nu} \right)^{\frac{m}{2-m}}$$

gegeben. Wenn man nun die v. Kármánschen Relationen mit Benutzung von (10) und der daraus sich ergebenden Gleichung

$$\lg \frac{y}{h} = \text{const} + \lg y \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$$

auf die Form bringt

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\psi}} = a + b \lg (\Re \sqrt{\psi}) = a + \lg (\Re \sqrt{\psi})^b, \\ \frac{\bar{v}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}} = a' + b' \lg \left( \frac{y_1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} \right) = a' + \lg \left( \frac{y_1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} \right)^{b'}, \end{cases}$$

so sieht man, daß sich die bekannten Potenzgesetze dadurch ergeben, daß man den logarithmischen Verlauf der beiden maßgebenden Größen durch höhere Parabeln annähert. Dabei bestätigt sich auch die Erfahrungstatsache, daß der Exponent  $\frac{m}{2-m} = n$  mit wachsender Kennzahl abnimmt. Für zwei Strömungszustände in demselben Kanal, bei denen  $\tau_0$  denselben Wert hat,  $\nu$  aber verschieden ist, erhält man dieselbe Geschwindigkeitsverteilung bis zur Grenze der Laminarschicht, an der der Einfluß der Zähigkeit beginnt. Da die Dicke der Laminarschicht mit abnehmendem  $\nu$ , also mit wachsender Reynoldsscher Zahl kleiner wird, also die Grenze an der  $\bar{v}$ -Kurve weiter rückt, so geht auch der Berührungspunkt

der Näherungsparabel  $y_1 = \bar{v}^{\frac{1}{n}}$  mit der Achse  $y_1 = 0$  (Abszissenachse des  $\bar{v}$ -Diagramms) weiter nach rechts, und es ergibt sich gleichzeitig, daß die Berührung immer flacher ausfällt, oder daß  $\frac{1}{n}$  mit wachsender Kennzahl zunimmt. In dem bezeichneten Intervall von  $\Re (2 \cdot 10^3 \text{ bis } 16 \cdot 10^5)$  wächst  $\frac{1}{n}$  vom Wert 7 bis auf etwa 9,5.

5. Schließlich können wir noch eine Folgerung für die Verhältnisse in sehr rauen Rohren anführen. Hier spielt das Verhältnis zwischen der

Dicke der Laminarschicht und der mittleren Erhebung der Rauigkeit eine maßgebende Rolle. Wenn die Erhebungen der Wand groß sind gegen die Dicke der Laminarschicht, so ist der Kleinstwert der Länge  $l$  im wesentlichen durch die Abmessungen des Rauigkeitselementes bedingt. v. Kármán führt die mittlere Rauigkeitserhebung  $\varepsilon$  ein und erhält dann, wenn  $l$  proportional mit  $\varepsilon$  gesetzt wird, die Beziehung

$$(14) \quad \bar{v}_0 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left( \lg \frac{h}{\varepsilon} + \text{const} \right)$$

und für die Widerstandszahl

$$(15) \quad \frac{k \sqrt{2}}{\sqrt{\psi}} = \lg \frac{h}{\varepsilon} + \text{const}.$$

Der Strömungswiderstand gehorcht also dem quadratischen Gesetz, und der Widerstand hängt von der relativen Rauigkeit ab. Eine Weiterführung dieser Betrachtung, insbesondere der Vergleich mit den Versuchen an Rinnen, ist von v. Kármán in Aussicht gestellt, aber bis zum Abschluß dieses Werkes noch nicht bekannt geworden. Auch die inzwischen fortgeschrittenen, noch nicht vollständig veröffentlichten einschlägigen Göttinger Arbeiten zum Turbulenzproblem, über die Prandtl gelegentlich der Physiker-Tagung in Bad Elster sowie in Prag Bericht erstattet hat, konnten in dieser Übersicht keine Berücksichtigung mehr finden.

## Namenverzeichnis.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

- Ahlborn 172, 234, 269, 286, 292.  
d'Alembert 269.  
Auerbach, R. 63.
- Bairstow, L. 133, 183.  
Basset, A. B. 163.  
Bauer, W. 159.  
Bazin, H. 354.  
Bernoulli 14, 65.  
Bessel, F. W. 102, 119 u. f.  
Blasius, H. 73, 76, 179, 185, 335.  
Boltze, E. 199.  
Bose, E. 313.  
Bouasse, H. 60, 147, 148, 233.  
Boussinesq, J. 57, 59, 69, 167, 188.  
Brillouin, M. 44, 54, 57, 226.  
Burgers, J. M. 183, 188, 348.  
Burgess, R. W. 137, 144.
- Cave, B. M. 133.  
Cauchy 9.  
Coriolis 13, 29.  
Couette, M. 314, 315, 323.  
Coulomb 258.  
Courant, R. 4, 95.  
Czuber, E. 97.
- Dönch, F. 357.
- Eiffel, G. 293, 294, 296.  
Eisner, F. 18, 132, 133, 264, 280, 313.  
Ekman, V. W. 338.  
Engler 64, 65.
- Erk, S. 58, 76.  
Euler, L. 13.  
Everling, E. 215.
- Faxén, H. 156.  
Föppl, A. u. L. 68.  
Föppl, O. 296.  
Fordyke, A. G. 172.  
Forsyth, A. R. 139.  
Fortépaule 147, 149.  
Fourier 90, 94, 245.  
Frazer, R. A. 121, 125, 215.  
Freund 233.  
Froude, W. 19.
- Gauss 7, 12, 21, 23, 24.  
Gebbers 185.  
Gibbons 185.  
Glotte, K. F. 67.  
Goursat, E. 121.  
Graetz, L. 66.  
Gray A. 116, 119, 124.  
Gümbel, L. 215.
- Hagen, G. 56.  
Hagenbach, E. 59.  
Hamel, G. 82, 85, 89, 101, 343.  
Hankel 129, 265, 305 u. f.  
Hansen, M. 183.  
Hatschek, E. 62, 66, 87.  
van der Hegge Zijnen 183, 337.  
Hele-Shaw 38.  
Helmholtz, H. v. 15, 242.  
Herschel, W. H. 65.  
Hilbert, D. 95, 277.  
Hopf, L. 315, 216.
- Jacob, M. 76.  
Jahnke-Emde 109.
- Joukovsky, N. 272, 282, 293.
- Kalähne, A. 249.  
Kármán, Th. v. 73, 172, 174, 183, 226, 230, 280, 287, 348f., 355f.  
Kelvin, Lord (W. Thomson) 314.  
Kempf, G. 232.  
Kirchhoff, G. 222.  
Koch, K. R. 62.  
Kohlrausch, K. W. F. 79, 80, 81.  
König, W. 258.  
Krey, H. 18.  
Kutta, W. 282, 293.
- Ladenburg, R. 157, 142.  
Lagally, M. 15, 20, 37.  
Lamb, H. 127, 130, 132, 142, 143.  
Lang, E. D. 133.  
Laplace 12.  
Legendre 138.  
Levy, H. 172.  
Lindner, F. M. 298.  
Lorentz, A. H. 154.  
Love, A. E. H. 9.
- Magnus 234.  
Mallock, A. 315, 323.  
Mascheroni 129.  
Mathews, G. B. 116.  
Maxwell, J. Cl. 53.  
Meyer O. E. 57, 253, 258, 261.  
Mises, R. v. 64, 129, 178, 315.  
Mohorovičić, St. 351f.  
Molin, K. 207.

- Müller, W. 15, 21, 29.  
165, 298.
- Mützel, K. 255.
- Naumann, A. 72.
- Noether, F. 137, 264, 312,  
314.
- Newton, I. 12.
- Nielsen, N. 108.
- Nikuradse, J. 77, 78, 357,  
359.
- Orr, W. M. F. 314.
- Oseen, C. W. 89, 106, 127,  
130, 137, 141, 142, 161,  
163, 164, 169, 280, 284,  
287, 289, 290, 299, 301.
- Ostwald, W. 63.
- Pietrowski, G. v. 242.
- Pohlhausen, K. 174, 181,  
227.
- Pöschl, Th. 68, 71.
- Poiseuille 54, 66, 72, 79,  
242, 245, 320.
- Poisson 272, 274, 305.
- Prandtl, L. 68, 74, 78, 168,  
174, 235, 269, 312, 328,  
332, 334, 356, 362.
- Ramsauer, C. 159.
- Rayleigh, Lord 21, 35, 181,  
314, 329.
- Reynolds, O. 17, 72.
- Riemann, W. 59, 129, 274.
- Rodger, J. W. 67, 245.
- Sasvari, G. 77.
- Schaefer, Cl. 355.
- Schiebel, A. 215.
- Schiller, L. 72, 76, 158, 338.
- Schmiedel, H. 158.
- Schmidt, H. 95, 138, 275.
- Sexl, Th. 315, 320, 322.
- Sommerfeld, A. 35, 209,  
314.
- Sonin, N. 119.
- Sorkau, W. 313.
- Stanton, T. E. 74.
- Stribeck, R. 214.
- Stokes, G. 13, 82, 127, 129,  
140, 141, 153, 330.
- Saint Venant 70.
- Taylor, G. J. 315, 323, 327.
- Thomson, J. J. 54.
- Thorpe, J. E. 67, 245.
- Tietjens, O. 170, 329, 333,  
334, 348.
- Tollmien, W. 334, 337.
- Ubbelohde 65.
- Villat, H. 273, 275.
- Weber, H. 59, 129, 274.
- Weierstrass, K. 86.
- Westgren, A. 157.
- Williams, W. E. 62, 148,  
149.
- Wieselsberger, C. 132, 185.
- Zeilon, N. 277, 281, 298,  
303, 307.
- Zemplen, G. 222.



## Sachverzeichnis.

- Ablenkungsfunktion 310.  
Ablösung der Strömung 169.  
Ablösungsstelle 186.  
Achsensymmetrie 29.  
Aerodynamische Laboratorien 18.  
Ähnlichkeitsgesetz 16, 355.  
Asymptotische Lösung 264.  
— Widerstandstheorie 261.  
Asymptotisches Potentialproblem 272.  
Auftrieb 173, 271.  
Ausbreitung eines Wirbels 104.  
— einer Wirbelschicht 98.
- Beschleunigte Bewegung einer Kugel  
159.  
— — eines Zylinders 196.  
Besselsche Funktionen 102, 119f.  
Bewegungsgleichungen 12—16.  
— in Kugelkoordinaten 27.  
— in Zylinderkoordinaten 27.  
Bewegte Grenzebenen 47.
- Couette-Strömung 314, 323.
- Deformation 4.  
Deformationsellipsoid 5.  
Deformationstensor 3, 5, 20.  
Dilatation 6.  
Dissipationsfunktion 20, 21.  
Divergenz 6.  
Drehbewegung, gleichförmige, stationäre  
200 f.  
Drehbewegung, instationäre 237 f.  
Drehschwingung 237, 241.  
Druck 10.  
Druckabfall 34, 56 f., 73 f.  
Drucktensor 20.  
Dyade 24.  
Dyadisches Produkt 24.
- Ebene Bewegung siehe Strömung.  
— Platte 179, 281.  
— Wände 31, 316.  
Eindimensionale Bewegung 31 f., 90 f.  
Einlauf im Rohre 72.  
Ellipsoid, rotierendes 222.  
Elliptischer Rohrquerschnitt 68.  
Energetischer Ansatz für Turbulenz 340.  
Erdatmosphäre 236.
- Farbfäden 72.  
Fehlerintegral 97, 190.  
Flüssigkeit, ideale 2.  
— inkompressible 6, 13, 14, 22.  
— zähe 2.  
Flüssigkeitsschicht mit veränderlicher  
Dicke 41.  
Formänderungsarbeit 20.
- Gefäßwände 147, 154.  
— Kräfte auf 24.  
Geschwindigkeitsprofil 33.  
— bei Turbulenz 329 f.  
Geschwindigkeitsvektor 3.  
Gleitfunktion 302.  
Gleitintervall 307.  
Grenzbedingungen 22.  
Grenzschicht 168, 173, 328.
- Hankelsche Funktion 129, 265, 305 f.  
Hilfsflächen (Impulssatz) 24.  
Hohlkugel, Drehschwingung einer mit  
Flüssigkeit gefüllten 241.  
Hydraulischer Radius 76.  
Hydrodynamische Vorder- bzw. Rück-  
seite 305.
- Impulssatz 24.  
Impulstransport 26, bei Turbulenz 344 f.

- Instationäre Bewegung 90—120,  
 237—261.  
 Isotropes Medium 10.  
 Kapillarität 35.  
 Kapillarrohr 60, 61.  
 Kapillarmethode der Zähigkeitsmessung  
 61 f.  
 Keilströmung 42.  
 Kennwert 18.  
 Kielwasser 267, 271, 307.  
 Kielwasserfunktion 271, 300.  
 Kielwasserstrom 171.  
 Kinematische Zähigkeit 16.  
 Kompressionsmodul 19.  
 Konforme Abbildung 43—54.  
 Kontinuitätsgleichung 15, 28.  
 Kontrollflächen 24.  
 Kreisquerschnitt (eines Rohres) 54.  
 Kreisscheibe, rotierende 222, 226, 230.  
 Kreisströmung 84.  
 Kreiszyliner 120, 130, 187, 275, 306,  
 309.  
 Kritischer Druck 80.  
 Krümmung des schwingungsfähigen Ge-  
 schwindigkeitsprofils 334.  
 Kugel, aperiodische Drehung 245.  
 — Drehschwingung 237.  
 — rotierende 221.  
 Kugelkoordinaten 27.  
 Laminare Strömung 31—167.  
 Luftströmung in Rohren 79 f.  
 Mascheronische Konstante 129.  
 Mischbewegung 343.  
 Mischungsweg (bei Turbulenz) 356.  
 Oberfläche, gekrümmte 169.  
 Oszillierende Kugel 237.  
 Oszillierender Zylinder 251.  
 Paradoxon von d'Alembert 269.  
 Passatzirkulation 234.  
 Periodische Bewegung 92 f., 237 f.  
 Platte 49, 183, 281, 301.  
 Plötzliche Inbewegungsetzung eines  
 Körpers 96, 162, 193, 245.  
 Potential 14, 15.  
 —, komplexes 43 f., 268 f.  
 — -problem, asymptotisches 272.  
 — — Strömung 38, 168 f., 269 f.  
 Potenzgesetz für turbulente Rohr-  
 strömung 75, 353, 361.  
 Profilradius 76.  
 Quellen 7.  
 Quellströmung 84.  
 Radialströmung 89.  
 Rauigkeit 19.  
 Rauigkeitsformel v. Kármán 362.  
 Reaktionsdruck 25.  
 Reibung (Grundsätzliches) 2, 11.  
 Reibungsarbeit 20.  
 Reibungskoeffizient 11, 243, 256.  
 Reibungskräfte 25.  
 Reibungsmoment (bei Rotation) 202,  
 212, 220, 224 f.  
 Reibungsschicht 168.  
 Reynoldssche Zahl 8, 35.  
 Rohre 55.  
 — elliptische 68.  
 — dreieckige 69.  
 — rechteckige 70.  
 — nicht-kapillare 79.  
 Rohrströmung, turbulente 71, 345.  
 Rotation (Rotor) des Geschwindigkeits-  
 vektors 4.  
 Rotationskörper 137.  
 Rotierender Körper 233.  
 Rotierendes Ellipsoid 222.  
 Rotierende Kreisscheibe 223, 226.  
 — Kugel 221.  
 Rotierender Zylinder 215.  
 Schallgeschwindigkeit 19.  
 Scheibe, rotierende 222, 226, 230.  
 — schwingende 237.  
 Schlitz zwischen Kreiszyliner und  
 Ebene 49.  
 Schmiermittelreibung 35.  
 Schubspannungen 11.  
 Schwimmbewegungen 19.  
 Sekundärströmung im Kanal 78.  
 Senken 7.

- Spannungshügel 68.  
 Spannungstensor 8.  
 Spiralströmung 100.  
 Stabilität rotierender Zylinder 323.  
 Strömung, ebene 37f., 82f., 120f., 179f., 275f.  
 — laminare 31—71.  
 — langsame 23f., 120, 140.  
 — lineare zwischen Wänden 31.  
 — turbulente 71, 207, 313f.  
 — um Kreiszyylinder 120.  
 — zwischen coaxialen Zylindern 23.  
 · zweidimensionale 31.  
 Stromfunktion 15.  
 Stromschatten 171.  
 Strudelströmung 110.
- Tensor der Deformation 5.  
 — der Spannungen 7.  
 — Beziehung zwischen den Grundtensoren 10.  
 Tensorprodukt 20.  
 Tragfläche auf Flüssigkeitsschicht 36.  
 Turbulenz 313—362.  
 Turbulente Rohrströmung 71f., 345f., 352, 358f.  
 — Grenzschicht 183, 230f.
- Verzerrungstensor in Polarkoordinaten 27.  
 Viskosimeter 62—67.
- Wahrscheinlichkeit und Turbulenz 349.  
 Wand, bewegte 32.  
 Wandeinfluß 339.  
 Wände 147, 154.  
 Wärmeleitungsintegral 178.  
 Widerstand (allgemein) 261, 271.  
 — einer Platte 181, 183, 293f.  
 · einer Kugel 152, 158.  
 · eines Kreiszyinders 132, 278.  
 Wirbel, Ausbreitung 98, 104.  
 Wirbelschicht 176.  
 — ebene 114.  
 — kreiszyindrische 115.  
 Wirbelstraße 172.  
 Wirbelvektor 4, 13.
- Zähigkeit 2, 35.  
 — kinematische 16.  
 Zähigkeitszahlen 16, 66.  
 Zapfen 209.  
 Zapfenreibung 37.  
 Zirkulation 272.  
 — der Erdatmosphäre 236.  
 Zylinder, axial bewegt 43f.  
 — rotierend 323.  
 — — in Wandnähe 215, 234.  
 — beschleunigte Drehung 247.  
 — Drehschwingung 250, 253.  
 — konzentrische 249.  
 Zylinderkoordinaten 27.

# Hydro- und Aerodynamik

Herausgegeben von Prof. Dr. L. SCHILLER, Leipzig  
(Handbuch der Experimentalphysik, Band IV)

## Teil I: **Strömungslehre u. allgemeine Versuchstechnik**

1931. XII, 730 Seiten mit 431 Abbildungen im Text  
Preis RM (66.—) 59,40, Lw. RM (68.—) 61.—

Aus dem Inhalt:

L. Prandtl: Einführung in die Grundbegriffe der Strömungslehre - H Falkenhagen: Klassische Hydrodynamik - W. Tollmien: Grenzschichttheorie - W. Tollmien: Turbulente Strömungen - A. Busemann: Gasdynamik - J. Ackeret: Kavitation (Hohlraumbildung) - H. Peters: Druckmessung - A. Betz: Mikromanometer - H. Müller und H. Peters: Geschwindigkeits- und Mengemessungen von Flüssigkeiten - J. M. Burgers: Hitzdrahtmessungen - O. Tietjens: Beobachtung von Strömungsformen

## Teil II: **Auftrieb und Widerstand**

1932. X, 443 S. mit 245 Abbildgn. im Text. Preis RM 39.—, Lw. RM 41.—

Aus dem Inhalt:

O. Flachsbart: Geschichte der experimentellen Hydro- und Aeromechanik, insbesondere der Widerstandsforschung - L. Prandtl: Herstellung einwandfreier Luftströme (Windkanäle) - A. Seiferth u. M. Betz: Untersuchung von Flugzeugmodellen im Windkanal - A. Betz: Ermittlung der bei Drehbewegungen von Körpern (Flugzeugen) auftretenden Kräfte und Momente - H. Muttray: Die experimentellen Tatsachen des Widerstandes ohne Auftrieb - L. Schiller: Fallversuche mit Kugeln und Scheiben - S. Kießkalt: Die Erscheinungen der Lagerreibung und Schmierung

## Teil III: **Technische Anwendungen**

1930. X, 557 Seiten mit 269 Abb. im Text. Preis RM 53.—, geb. RM 55.—

Aus dem Inhalt:

Fritz Horn: Schiffsschleppversuche - R. Emden: Der Freiballon - W. Klemperer: Luftschiffmeßtechnik - Ludwig Hopf: Flugtechnik und Versuche im Fluge - W. Spannhake: Kreiselpumpen und Turbinen - O. Flachsbart: Luftschrauben - W. Gaede: Luftpumpen - O. v. Eberhard: Ballistik

## Teil IV: **Rohre. Offene Gerinne. Zähigkeit**

1932. VIII, etwa 650 Seiten mit 392 Abbildungen. Preis etwa RM 59.—

Aus dem Inhalt:

L. Schiller: Strömung in Rohren - F. Eisner: Offene Gerinne - S. Erk: Zähigkeitsmessungen - Gesamtregister

Aus Besprechungen:

Das Buch wird für die Fachleute ein unumgängliches Rüstzeug und für weitere Kreise ein wichtiges und langersehntes Nachschlagewerk zur Einführung in ein interessantes Wissensgebiet bilden. Die Naturwissenschaften. Es ist gründlich genug geschrieben, um als Einführung in neue Arbeitsgebiete zu dienen, und durch Angabe des neuesten Schrifttums den Weg zu tieferem Eindringen zu zeigen; es vermittelt aber auch im besten Sinn des Wortes allgemeine Bildung, indem es zeigt, wie ein Wissenszweig sich in vielerlei Anwendungsgebiete hinein verästelt und dort zusammen trifft mit den von weither entsandten Ausläufern anderer Arbeitsgebiete. Ein solcher, rein sachlich, ohne jedes literarische Beiwerk entwickelter Überblick kann jedem Leser eine Fülle von Anregungen geben. Zeitschrift des V. D. I.

---

**Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig**

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.







532.5 M947



a39001



006970969b

65-111

