WAHRSCHEINLICHKEIT UND GESETZ

EIN BEITRAG ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHEN BEGRÜNDUNG DER NATURWISSENSCHAFT

VON

ERNST MALLY

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GRAZ

BERLIN 1938

WALTER DE GRUYTER & CO.

Archiv-Nr. 42 44 38

Druck von
Walter de Gruyter & Co. — vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung,
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung, Georg Reimer, Karl J. Trübner,
Veit & Comp. — Berlin W 35

Printed in Germany

VORWORT

Was hier unternommen wird, ist der Versuch, dem alle die lebhafte Wandlung der Begriffe in den exakten Wissenschaften unserer Zeit dient: den Aussagen der Wirklichkeitserkenntnis eine Fassung zu geben, die es vertrüge, beim Worte genommen zu werden. Da Wirklichkeitserkenntnis Wahrscheinlichkeitserkenntnis ist, war zuerst eine Klärung des Sinnes der Wahrscheinlichkeitsansätze, in Prüfung und Erneuerung grundlegender Begriffe der Wahrscheinlichkeitslehre zu leisten.

Ich danke den Freunden, besonders Frau Dr. M. Sobotka, den Herren Prof. J. Krug, Dr. F. Kröner, Prof. O. Pommer, die durch ihre tätige Anteilnahme diese Arbeit gefördert haben, und Herrn Prof. A. Baeumler sowie dem Verlage, die ihr Erscheinen ermöglichten. Dem Physiker Prof. E. Schrödinger verdanke ich nebst zwei Berichtigungen einige Einwände, die mir wertvoll waren als Anlaß, die Darstellung gegen sie und ähnliche Bedenken durch die nötigen kritischen Erörterungen zu sichern.

Graz, im März 1938. E. M.

INHALT

EINLEITUNG

1. Ein Physiker konnte noch vor wenigen Jahrzehnten die Frage nach dem eigentlichen Sinn seiner wissenschaftlichen Aussagen als eine müßige oder als eine rein philosophische — was für viele dasselbe bedeutet — von sich weisen. Er begnügte sich innerhalb seiner Wissenschaft mit seinem „natürlichen Realismus", der körperliche Dinge und Vorgänge an ihnen als die Gegenstände seiner Untersuchung voraussetzt. Er konnte sich die Atome als kleinste Körperchen und den Äther als feinsten Stoff denken. Man mußte diesen Dingen nur einige besondere Eigenschaften des Wahrnehmbaren nehmen und dafür andere besondere Eigenschaften beilegen, im wesentlichen war mit den Begriffen, die sich an der Wahrnehmung gebildet hatten, auszukommen.

Aber diese Begriffe, von Körpern, von Vorgängen, die in Raum und Zeit sich an ihnen abspielen, schienen philosophierenden Physikern metaphysisch belastet, und sie waren, mit Mach, der Ansicht, „daß alles Metaphysische als müßig und die Ökonomie der Wissenschaft störend zu eliminieren sei"[1]. Man wollte „positivistisch" sich an das „Gegebene" halten, als gegeben aber galt, im Sinne einer seltsam erfahrungsfremden Psychologie und Erkenntnislehre, die einzelne „sensible Qualität" oder „Empfindung". Aus solchen sinnlichen „Elementen", die in Wahrheit nie für sich gegeben sind, sollte der Inhalt der Erfahrung „konstruiert" werden: in unserer Auffassung der Wirklichkeit sollten alle „metaphysischen Wesenheiten" durch „logische Konstruktionen", Gesamtheiten und Ordnungen jener vermeinten Elemente, ersetzt werden. Was eine logische Konstruktion eigentlich sei, wäre in einer Theorie, die nichts als sinnliche „Elemente" zuläßt, allerdings nicht anzugeben. Die Aussagen dieser Theorie sind auf sie selbst nicht anwendbar; in einer Welt bloßer sinnlicher Elemente gibt es ja nichts, was Denken heißen kann, und die Reden von der „Ökonomie des Denkens", die Erkenntnis sei, haben keinen Sinn.

---

[1] E. Mach, Die Analyse der Empfindungen, 2. Aufl. Jena 1900, S. VII.

Der ältere Machsche Positivismus ist aufgegeben. An seiner Stelle ist ein neuer „logischer Positivismus" und zuletzt ein „methodischer Materialismus" oder „Physikalismus" entwickelt worden, und zwar von dem „Wiener Kreis", der um M. Schlick, O. Neurath, R. Carnap sich gebildet hatte und seine Anhänger in der ganzen „internationalen" Welt besaß und noch besitzt. Physikalismus ist die Lehre, daß alle sachhaltigen Sätze in „physikalischer Sprache" ausgedrückt werden können; die logisch-mathematischen Sätze sind nicht sachhaltig, sondern entweder axiomatische Festsetzungen oder tautologische Umformungen solcher. Alles, was man Erfahrungs- oder Wirklichkeitswissenschaft nennt, ist demnach Teil der gehörig weit verstandenen Physik, sie ist die große „Einheitswissenschaft"[2]. Metaphysische Sätze werden nicht etwa als falsch, sondern als sinnlos abgelehnt. Ein Satz sei als Aussage nur sinnvoll, wenn man ihm eine Anweisung entnehmen könne, wie er, mindestens grundsätzlich, als wahr oder als falsch zu entscheiden sei. Daß solche Entscheidung nur durch Sinneswahrnehmung, genauer: durch Vergleichung des Satzes mit Wahrnehmungsaussagen, zu gewinnen sei, ist die besondere „physikalistische" Wendung dieses „Sinnkriteriums". Sie beruft sich darauf, daß nur über Beobachtungen, deren Ergebnisse sich in physikalischer Sprache mitteilen ließen, „intersubjektive" Verständigung möglich sei; nur sie könnten der „intersubjektiven" Wissenschaft die Grundlage und den eigentlichen Inhalt geben.

Dieses „Sinnkriterium" führt nun schon im nächsten und innersten Anwendungsbereich des Physikalismus, in der eigentlichen Physik, eine bemerkenswerte Schwierigkeit mit sich: man sieht sich genötigt, den *allgemeinen* physikalischen Sätzen den Sinn von Aussagen, von Feststellungen, abzusprechen. M. Schlick hat in einem Aufsatz der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften" [3] die Frage der „Kausalität in der gegenwärtigen Physik" behandelt. Kausalität oder Naturgesetzlichkeit bedeutet ihm Vorausberechenbarkeit des Geschehens; da aber die Regeln dieses Vorausberechnens, die sogenannten Naturgesetze, als allgemeine Sätze sich nicht durch Beobachtungen „verifizieren" lassen, weil man nicht

[2] Vgl. z.B. R. Carnap, Psychologie in physikalischer Sprache. Erkenntnis, 3, 1932/33.

[3] 19, 1931, S. 145—162.

alle Fälle prüfen kann, seien sie nicht als Aussagen anzusehen, sondern als *Anweisungen* zur Bildung von Voraussagen in Einzelfällen, also von Aussagen, die jeweils durch eine Beobachtung bestätigt oder widerlegt werden können. Aber eine allgemeine Anweisung zu Einzelaussagen wäre von einer ganz willkürlichen und berechtigungslosen Vorschrift nicht unterschieden, wenn sie nicht auf der Meinung beruhte, sie werde sich, wenigstens im Groben, bewähren; diese Meinung bildet den Inhalt einer allgemeinen Aussage, der man nicht den Sinn einer Anweisung oder Vorschrift geben kann, ohne wieder vor die Frage der Begründung gestellt zu sein. Allgemeine Wirklichkeitsaussagen sind ohne Aufhebung der Erfahrungswissenschaft nicht auszuschalten und durch Sätze, die keinen Aussagesinn haben, zu ersetzen. So bleibt die Schwierigkeit unbehoben, die Schlick und andere zu jener Umdeutung veranlaßte.

Die gleiche Schwierigkeit entsteht aber, was gewöhnlich übersehen wird, schon bei Einzelaussagen. Eine Behauptung wie „Dies ist Eisen" schließt die Behauptung unendlich vieler sogenannter Reaktionen ein, die alle zutreffen müßten, wenn sie wahr sein soll. *Nur im Vertrauen auf die Bewährung von Erfahrungszusammenhängen allgemeiner Art* begnügt man sich im gegebenen Falle mit endlich vielen und meist mit sehr wenigen Beobachtungen, um den Satz zu prüfen — ihre Zahl nimmt übrigens mit zunehmender Genauigkeit des Sinns der Aussage rasch zu. Die Sachlage ist wesentlich verschieden von dem Fall eines logisch-mathematischen Satzes. Ein solcher ist schon auf Grund seines Sinns allein als wahr oder falsch zu erkennen, und über seine unzähligen Folgen, bekannte und unbekannte, ist, wenn er wahr ist, zugleich bejahend entschieden. Was ein *Erfahrungssatz* sinngemäß einschließt und mitbehauptet, sei er ein allgemeiner oder ein Einzelsatz, das ist niemals im strengen Sinne als zutreffend entschieden, und darum ist der Satz selbst nicht im strengen Sinne entscheidbar. Auch die einzelne Beobachtung stellt ein Ereignis fest, das zwar einseitig wahrgenommen, aber als ein *allseitig* bestimmtes gemeint ist, das z. B. unter anderen Bedingungen und von anderen Beobachtern auch, wenn auch anders, wahrzunehmen wäre oder gewesen wäre, was mindestens für den vergangenen Fall ungeprüft bleiben muß und in künftigen Fällen immer nur in Proben zu untersuchen ist; und ihre Ergebnisse sind wieder von derselben unfertigen und vorwärtsweisenden

Art. Will man allgemeinen Erfahrungssätzen wegen ihrer Nichtentscheidbarkeit den Wert von Aussagen absprechen, so muß man Einzelsätze auch so behandeln, oder man muß, für *alle* Wirklichkeitsaussagen, die Forderung der „Verifizierbarkeit", der strengen Entscheidbarkeit, aufgeben und sie durch die mildere einer bloßen *Bewährbarkeit* in immer wieder anzustellenden Beobachtungen ersetzen [4].

Dieses naheliegende Ergebnis ist nicht nur gegenüber den „neopositivistischen" Lehren von entscheidender Bedeutung, sondern, in ähnlichem Sinn, gegenüber der ziemlich allgemein herrschenden Auffassung des Verhältnisses zwischen allgemeinen und besonderen Sätzen, Allaussagen und Einzelaussagen, im Bereiche des Erfahrungswissens, die in den üblichen Lehren von der Induktion sich bekundet. Man ist immer geneigt, der Einzelaussage einen grundsätzlichen logischen (und entstehungsgeschichtlichen) Vorrang vor der Allaussage einzuräumen; einen solchen Vorrang gibt es nicht: jede empirische Allaussage fordert sinnmäßig das Zutreffen von Einzelaussagen bestimmter Art als ihre Bewährungsfälle, und jede Einzelaussage verlangt und setzt voraus, daß gewisse Allaussagen, als Feststellungen allgemeiner Erfahrungszusammenhänge, berechtigt sind. Ein nominalistisches „Zurückführen" des Allgemeinen auf lauter Einzelnes ist ebenso unmöglich wie der umgekehrte Vorgang; das ist ein Gegenstück zur Unmöglichkeit des Zurückführens des Ganzen auf letzte Teile. Wirklichkeit läßt sich nicht, auch in Gedanken nicht, aus vereinzelten „Elementen", Wirklichkeitserkenntnis nicht aus reinen Einzelaussagen aufbauen. Die nominalistische und die individualistische Auffassung, die das Denken der neueren Zeit in seiner Grundeinstellung bestimmten, fordern, folgerichtig weitergedacht, jene unvollziehbaren Zurückführungen, und dem neuen Positivismus kommt, da er sie ernstlich versuchte, gegen seine Absicht das Verdienst zu, die Notwendigkeit einer grundsätzlichen Wendung besonders klar erkennbar gemacht zu haben.

Auf diese Notwendigkeit hat auch die innere Entwicklung der neueren Physik, insbesondere der Physik der Strahlung und der inneratomaren Vorgänge, geführt. Die theoretischen Physiker von

---

[4] Die Folgerung ist, nach einer Mitteilung R. Carnaps, von den Physikalisten auch schon gezogen worden.

heute können sich an der Frage nach dem eigentlichen Sinn ihrer Befunde nicht mehr unbeteiligt erklären; in den Versuchen ihrer Deutung, ihrer einheitlichen Fassung schon, verschwindet die Grenze zwischen Naturwissenschaft und Philosophie. Denn, wie immer wieder festgestellt wird, die Begriffe des „natürlichen Realismus", Begriffe von beharrenden körperlichen Dingen, von Bewegungen solcher in bestimmten Bahnen, scheinen im inneratomaren Bereich unzulänglich zu werden. Das Bemühen um scharfe Fassungen der physikalischen Sätze nötigt, alte Formen aufzugeben oder sie nur als vorläufige Hinweise auf einen aufzusuchenden genaueren Sinn gelten zu lassen und in beschränktem Bereiche zu verwenden. Die neue Wirklichkeitsauffassung aber, auf die alles deutet, wird nur in einer neuen Geisteshaltung bodenständig sein, die den Nominalismus wie den Individualismus überwindet, ohne in die Beschränktheit ihrer geschichtlichen Gegenrichtungen zu verfallen [5]. Diese Auffassung in Anwendung auf die Grundlagen der Naturwissenschaft kurz darzulegen, wird die Aufgabe dieser Schrift sein.

2. Es liegt in der angedeuteten Entwicklung der Naturwissenschaft, daß in ihren Aussagen die Bedeutung von *Wahrscheinlichkeitssätzen* immer klarer hervortritt. Sprach man früher in diesem Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit, so war nur jene Unsicherheit gemeint, die aller Erfahrung anhaftet. Die Wahrscheinlichkeitslehre, die ihre strenge Fassung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet, meint einen anderen, viel bestimmteren Begriff — daß er lange nicht genug sicher und scharf von jenem Ungewißheitsbegriff abgehoben wurde, war übrigens schuld an hemmenden Unklarheiten der Theorie. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung tritt erst nur als Hilfswissenschaft der praktischen Physik auf. Durch L. Boltzmanns statistische Deutung der Gasgesetze gewinnt der Begriff der Wahrscheinlichkeit eine Stellung im Inhalt allgemeiner physikalischer Aussagen. Immer mehr Sätze werden als „statistische Gesetze" angesprochen. Doch verbindet sich damit anfangs die Meinung, die „elementaren Teilchen", deren „durchschnittliches" Verhalten in großen Mengen ein statistisches Gesetz be-

[5] Vgl. E. Mally, Erlebnis und Wirklichkeit. Leipzig, bei J. Klinkhardt, 1935, besonders die Abschnitte „Wissenschaft" und „Philosophie".

schreibe, befolgten jedes ein vollkommen bestimmtes, wenn auch nicht feststellbares, durch strenge „Elementargesetze" vorgeschriebenes Verhalten in Raum und Zeit. Dieser Auffassung tritt schon 1919 F. Exner mit dem Einwand entgegen, daß es nicht berechtigt sei, an solchen Elementargesetzen, die sich nirgends erfüllt zeigen, festzuhalten. Er wird so zum Vorläufer einer allgemeinen Auffassung des Geschehens, die erst im Zusammenhang der Quantenlehre ihre bestimmte Gestalt gefunden hat. A. S. Eddington [6] spricht sie in dem einprägsamen Satze aus, Wahrscheinlichkeit sei „der Stoff der Welt"; sagt man dafür, Wahrscheinlichkeiten angebbarer Formen des Geschehens und nicht irgendwelche feste „Elemente" seien das letzte Faßbare, worauf die Erforschung der Wirklichkeit stößt, so wird man das Berechtigte des Satzes ausgedrückt haben. In den folgenden Untersuchungen soll klar werden, daß nicht erst Entdeckungen oder zeitgebundene Anschauungen der neuen Physik zu diesem Schlusse zwingen, sondern schon das entschiedene Streben, den Wirklichkeitsaussagen überhaupt einen klar bestimmten und haltbaren Sinn zu geben, zu einer Grundauffassung führt, in der der Satz richtig ist, und zwar, worauf es wesentlich ankommt, ohne gewaltsame Umdeutung der Wirklichkeit und ihrer Befunde.

Der Begriff, der aller Wahrscheinlichkeitslehre und insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde liegt, bereitet einer bestimmten Fassung merkwürdige Schwierigkeiten. Die älteren Definitionsversuche, die Wahrscheinlichkeit als etwas „subjektiv" Bestimmtes, von unserem Wissen oder gar von unserem Nichtwissen Abhängiges, z. B. als „Grad berechtigter Erwartung" erklären, sind ziemlich allgemein als unzulänglich erkannt, sie werden der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsansätze auf eine nicht subjektive Wirklichkeit und ihrer erfahrungsmäßigen Bewährung nicht gerecht. Die gegenwärtige Wahrscheinlichkeitslehre ist beherrscht von dem Bestreben, den natürlichen, ungeklärten Begriff der Wahrscheinlichkeit durch den einer *logischen Beziehung* zu ersetzen, die unabhängig von Wissen und Nichtwissen bestünde. Das gilt sowohl von der Theorie von J. M. Keynes [7] und meinen eigenen älteren

[6] Die Naturwissenschaft auf neuen Bahnen. Braunschweig 1935. S. 42.

[7] Über Wahrscheinlichkeit. Leipzig, bei J. A. Barth, 1926. Daß Keynes selbst gelegentlich die Wahrscheinlichkeit eines Satzes vom Wissensstand eines Sub-

Versuchen [8] als auch von jenen Lehren, die zur Zeit mit den größten Ansprüchen auftreten und sich, in ihren Hauptgedanken wenigstens, der größten „internationalen" Anerkennung erfreuen: der Häufigkeitstheorie von R. v. Mises [9] und ihrer selbständigen Weiterbildung durch H. Reichenbach [10].

Eine Auseinandersetzung mit den Grundgedanken der Häufigkeitslehre, insbesondere der Reichenbachschen, wird, soweit die kritische Sicherung und der Fortgang der positiven Darstellung es verlangen, im folgenden zu geben sein. Wesentlich ist, daß jede *Anwendung* des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, auch des „mathematischen", Anwendung eines Begriffes ist, der *nicht* eine Häufigkeit oder einen Häufigkeitsgrenzwert meint; auf die Anwendung aber muß es jeder Theorie ankommen, denn für sie ist sie gemacht. Die Wahrscheinlichkeitsbeziehung ist keine logisch-formale Beziehung, sondern gerade *die Beziehung, die Begriffe der Logik und Mathematik mit ihren Anwendungen, oder Wirklichkeit mit den logischen Formen verbindet.* Für den allgemeinen Wahrscheinlichkeitsansatz wird sich eine Form ergeben, die zugleich die allgemeine Form des Naturgesetzes ist. Jeder allgemeine Wahrscheinlichkeitsansatz ist — statt eine logische Beziehung zu sein — Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit des Geschehens, die freilich nicht, wie immer angenommen wird, die Form eines *Wenn-So* hat, und jedes Naturgesetz ist ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsansatz.

3. Einige einfache logische Begriffe und Bezeichnungsweisen hat diese Einleitung zum Schlusse für spätere Verwendung bereit zu

---

jektes abhängen läßt, ist eine Entgleisung gegenüber dem Grundgedanken, demzufolge der Satz *a* in bestimmtem (oder auch unbestimmtem) Grade wahrscheinlich ist in bezug auf einen *Satz h* als seine Voraussetzung (nicht in bezug auf das Wissen um ihn).

[8] Vgl. darüber meinen Sammelbericht „Logik und Erkenntnistheorie" in den Literarischen Berichten aus dem Gebiete der Philosophie, Heft 21/22, Erfurt (K. Stenger), 1930, besonders S. 20, Anm.

[9] v. Mises gibt eine allgemein verständliche Darstellung der Hauptgedanken seiner Lehre in „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit", Wien (J. Springer), 1928.

[10] H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre. Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leiden 1935. Der Verfasser glaubt „die Lösung der philosophischen Fragen des Wahrscheinlichkeitsproblems gefunden zu haben" und eine „abschließende Theorie der Wahrscheinlichkeit" vorzulegen.

stellen. Die wenigen Zeichen, die auch der mit Logistik nicht Vertraute sich rasch aneignet, ermöglichen späterhin eine sichere und bequeme Ausdrucksweise.

Es bedeute „*Su*" eine *Bestimmung für u* (in der Logistik Satzfunktion der Veränderlichen *u* genannt), z.B. „*u ist (sei) kleiner als 1*", „$u < 1$"; es bedeute „*Pu*" gleichfalls eine Bestimmung für *u*, z.B. „*u ist kleiner als 2*", „$u < 2$". „$\overline{Su}$" bedeute die *Verneinung:* „*Su gilt nicht*" oder „*non-Su*"; „$Su \vee Pu$" werde gelesen als „*Su oder (vel) Pu*"; „$Su \wedge Pu$" werde gelesen als „*Su und (et) Pu*".

Aus einer Bestimmung *Su* kann eine Bestimmung *Pu folgen*; wir schreiben „$Su \rightarrow Pu$" für „*aus Su folgt Pu*".

So gilt z.B.: aus $u < 1$ *folgt* $u < 2$, oder $(u < 1) \rightarrow (u < 2)$. Die *Folgebeziehung* ist eine reine Angelegenheit der Bestimmungen, die „Veränderliche" *u* spielt darin keine andere Rolle, als eine Leerstelle anzuzeigen; man kann statt „$Su \rightarrow Pu$" auch schreiben „$S \rightarrow P$" (z.B. „aus kleiner als 1 sein folgt kleiner als 2 sein"). Weil die Bestimmung kleiner als 1 zu sein die Bestimmung kleiner als 2 zu sein *einschließt* oder *impliziert*, im Sinne des Folgens, gilt „für jedes *u*", d.h. für jeden beliebigen Wert von *u*: „*wenn* $u < 1$, *so* $u < 2$"; wir schreiben dafür

$$(u < 1) \supset (u < 2)$$

und lesen „$u < 1$ *impliziert* $u < 2$". Um hervorzuheben, daß diese Beziehung als eine „*generelle Implikation*" *für jedes u* gilt, schreibt man auch

$$(u)\,\{(u < 1) \supset (u < 2)\}$$

Allgemein stehe „$Su \supset Pu$" für „*Su impliziert Pu*" oder „*wenn Su, so Pu*" und ausführlicher,

$$„(u)\ (Su \supset Pu)“$$

für den Ausdruck „*für jedes u gilt: wenn Su, so Pu*". Dies bedeutet dasselbe wie „für jedes *u* gilt, daß *Su* nicht zutrifft oder *Pu* zutrifft", also soviel wie

$$„\overline{Su} \vee Pu“.$$

Im Anwendungsfall ist diese Umformung schon dem Knaben klar, der weiß, daß die Drohung, „wenn du das tust, wirst du gestraft" dasselbe bedeutet wie „du tust das nicht, oder du wirst gestraft".

Besteht die Folgebeziehung $Su \rightarrow Pu$ und ist u_1 ein bestimmter Wert von u, so gilt auch die *angewandte Folgebeziehung* $Su_1 \rightarrow Pu_1$. So besteht im Sinne der bekannten Teilbarkeitsregel: Aus „u ist eine dekadische Zahl und hat eine durch 3 teilbare Ziffernsumme" *folgt* „u ist durch 3 teilbar"; und es besteht die angewandte Folgebeziehung: Aus „735 ist eine dekadische Zahl und hat eine durch 3 teilbare Ziffernsumme" *folgt* „735 ist durch 3 teilbar".

Die „generelle Implikation" $(u)\,(Su \supset Pu)$ ergibt sich in den betrachteten Beispielen aus der Folgebeziehung $Su \rightarrow Pu$ oder $S \rightarrow P$; von ihr ist zu unterscheiden eine Implikation, die man gleichfalls durch ein *Wenn-So* ausdrücken kann, die aber nicht auf eine Folgebeziehung zwischen Bestimmungen gegründet ist. Eine solche Implikation liegt z.B. vor, wenn der Einberufer einer Versammlung feststellt, daß „alle Eingeladenen erschienen sind". Darin ist die Beziehung enthalten: „*Wenn* u jemand ist, der zu dieser Versammlung geladen war, *so* ist u erschienen". Dieses *Wenn-So* gilt offenbar für jedes u, es ist eine allgemeine Implikation der Form $(u)\,(Su \supset Pu)$. Aber es ist *keine* Folgebeziehung. Aus dem Umstand (Su), daß u zu dieser Versammlung eingeladen war, folgte nicht, daß er erscheinen wird, und folgt auch später nicht, daß er erschienen ist, man kann es nur in einer selbständigen Erkenntnis, *durch Erfahrung*, nachträglich feststellen; das *Wenn-So* drückt diesmal eine allgemeine Implikation aus, die, statt als *reine Bestimmungs-Implikation* auf einer *Folgebeziehung zwischen Bestimmungsinhalten* zu beruhen, nur aus der Feststellung und Zusammenfassung einer endlichen Anzahl von *Fällen* zu entnehmen ist; man kann sie als eine *allgemeine Fall-Implikation* bezeichnen. Sie ist von wesentlich anderer Art als die reine Bestimmungsimplikation, und es ist irreführend, wenn die Logik der *Principia Mathematica* [11] und alle ihr nachfolgende Logistik den Unterschied vernachlässigt und beide Beziehungen schlechtweg als formale oder generelle Implikation bezeichnet.

Im folgenden soll immer, wo eine Bestimmungs-Implikation, also Folgebeziehung, vorliegt oder in Festlegung eines Bestim-

[11] Whitehead and Russell, Principia Mathematica, vol. I, Cambridge 1910 (2. Aufl. 1925).

mungssystems angenommen wird [12], ein Zeichen der Art „*Su* → *Pu*" oder „*S* → *P*" verwendet werden.

Die logischen Behelfe, welche die Darstellung verwenden wird, sind im wesentlichen beigebracht. Sie gehören durchweg der Logik im bisher üblichen Sinne dieses Namens an; die Wahrscheinlichkeitslehre bedarf zu ihrem Aufbau keiner neuen „Wahrscheinlichkeitslogik", wie H. Reichenbach und andere sie einführen.

---

[12] So in den Grundannahmen (I), (II), (III), die der Festlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs dienen.

1. DIE WAHRSCHEINLICHKEITSBEZIEHUNG

Als Wahrscheinlichkeitsansätze treten Sätze auf wie die folgenden: „Wenn mit einem richtigen Würfel gewürfelt wird, so ist der Einswurf 1/6 wahrscheinlich“, „Für einen dreißigjährigen Mann einer gegebenen Bevölkerung besteht nach statistischen Angaben die Wahrscheinlichkeit p, das vierzigste Lebensjahr zu vollenden.“ Diese Sätze haben die Form von Wenn-So-Sätzen: „Wenn x ein Fall des Werfens mit einem Würfel ist, so besteht die Wahrscheinlichkeit 1/6 dafür, daß x ein Fall der Art Würfelwurf mit dem Ergebnis Eins ist“. „Wenn x ein Mann dieser Bevölkerung und dreißig Jahre alt ist, so besteht die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß x ein Mann der angegebenen Art und insbesondere einer ist, der das vierzigste Lebensjahr vollenden wird.“ Aus diesen Fassungen läßt sich die allgemeine Form, die man Wahrscheinlichkeits-Ansätzen zu geben pflegt, ablesen: „Wenn x ein Fall oder Ding der Art b ist, so besteht die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß x insbesondere von der Art a sei“ [13]. Schreibt man „αx“ für „x ist ein a“, „βx“ für „x ist ein b“, so lautet die übliche Fassung des Wahrscheinlichkeits-Ansatzes: „Wenn βx zutrifft, so ist das Zutreffen der genaueren Bestimmung αx im Grade p wahrscheinlich“, kurz: „*Wenn* βx, *so* ist αx im Grade p wahrscheinlich“, oder „βx *impliziert*, daß αx im Grade p wahrscheinlich ist“. Der Ansatz spricht eine Wenn-So-Beziehung aus, deren Vorderglied die Bestimmung βx ist, und deren Hinterglied die Wahrscheinlichkeit p für das Zutreffen von αx ist. Diese Beziehung wird von H. Reichenbach als „Wahrscheinlichkeits-Implikation“ bezeichnet [14].

---

[13] Hier ist a eine Unterart von b; das bedeutet für die Form des Ansatzes keine Beschränkung: wäre c keine Unterart von b, so wäre doch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein x der Art b zugleich ein x der Art c sei, offenbar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein x, das von der Art b ist, insbesondere der Art bc, derjenigen Fälle, die b und c zugleich sind, angehöre, und das wäre unsere Unterart a von b.

[14] H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre. Leiden 1935. § 9, S. 55ff. Doch sind die Zeichenausdrücke, die er für die Beziehung einführt, und mit ihnen

Es ist für die Wahrscheinlichkeitslehre wesentlich, daß man die Unzulänglichkeit und Unzulässigkeit dieser Fassung des Ansatzes erkennt. In einer allgemeinen Wenn-So-Beziehung sind Vorderglied und Hinterglied in sich sinnvolle Bestimmungen („Satzfunktionen"). So in der Beziehung: „Wenn $x < 1$, so $x < 2$"; „$x < 2$" ist, auch aus dem ganzen Ausdruck herausgelöst, eine sinnvolle Bestimmung. Nicht so das Hinterglied in dem betrachteten Ansatz, das lautet „es ist im Grade p wahrscheinlich, daß αx zutrifft": ein Ausdruck dieser Form ist *ohne bestimmten Sinn*. Das zeigt sich am Beispiel: es ist schlechthin nicht anzugeben, was die Wendung „es ist im Grade p wahrscheinlich, daß x das vierzigste Lebensjahr vollendet" besage, so wie nicht anzugeben ist, was die Wendung besagt „x ist p Kilometer entfernt". In beiden Fällen fehlt ein Bezugsglied. „x ist p Kilometer von y entfernt" ist eine sinnvolle Bestimmung, und ebenso „αx ist im Grade p wahrscheinlich in bezug auf βx". Daß jemand, der dreißig Jahre zählt und dieser Bevölkerung angehört, das vierzigste Lebensjahr vollende, ist in einem angebbaren Grade wahrscheinlich *in bezug auf den Umstand, daß* er dreißig Jahre zählt und zu dieser Bevölkerung gehört; es kann in bezug auf dieselbe Bedingung zusammen mit anderen, besonders Beruf und Gesundheitszustand, die zugleich zutreffen, um vieles mehr oder um vieles weniger wahrscheinlich sein, und eine Versicherungsgesellschaft, die den Mann aufnehmen soll, wird sie alle nach Möglichkeit berücksichtigen.

Im Würfelbeispiel besteht die gleiche Bezüglichkeit des Ansatzes: daß der Würfel auf Eins fällt, ist $1/6$ wahrscheinlich nur in bezug auf die Bedingungen, die im Bau des Würfels gelegen sind. Auch hier kann eine hinzukommende Bedingung zusammen mit den angegebenen eine beliebige andere Wahrscheinlichkeit ergeben. Aber solche Nebenbedingungen, wie sie in einer eine bestimmte Ergebnisart beständig begünstigenden Weise des Werfens gelegen wären, denkt man sich im Vorgang des „Würfelns" ausgeschaltet. Darum ist das in bezug auf die Eigenschaften des Würfels in bestimmtem Grade Wahrscheinliche in demselben Grade wahrscheinlich in bezug auf alle Bedingungen, die in der Voraussetzung, daß mit einem richtigen Würfel gewürfelt werde, enthalten sind.

---

seine Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung unabhängig von dieser Fehldeutung zu verwenden.

Was demnach ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsansatz ausdrückt, ist *eine Beziehung eigener Art* und nicht als eine Implikation zu fassen, deren Hinterglied eine nicht bezügliche Wahrscheinlichkeit wäre. Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsansatz hat die Form: In bezug auf die Bedingung, daß x ein Fall der Art b ist, ist es im Grade p wahrscheinlich, daß x insbesondere ein Fall der Unterart a sei; oder kürzer:

In bezug auf βx ist αx im Grade p wahrscheinlich;

oder:

Der Grad der Wahrscheinlichkeit von αx in bezug auf βx ist p;

wofür man schreiben kann:

$$W\,(\beta x,\ \alpha x) = p.$$

Jede Wahrscheinlichkeit ist auf eine Bedingung wesentlich und *unablösbar* bezogen. Es gibt nicht „die Wahrscheinlichkeit p für αx", sondern nur eine „β-Wahrscheinlichkeit für αx", eine „γ-Wahrscheinlichkeit für αx" usw.

Die Bezüglichkeit der Wahrscheinlichkeit wird in der neueren Wahrscheinlichkeitslehre immer wieder hervorgehoben; aber immer wieder findet sich die Fehldeutung, die aus ihr eine besondere Art von Implikation machen will, und nirgend ist ihre Eigenart klar erfaßt und in ihren sehr bedeutsamen Folgen festgehalten.

Eine dieser Folgen ist eine sehr einfache Entscheidung des Streites zwischen subjektivistischer und objektivistischer Auffassung. Wahrscheinlichkeit ist eine relative Bestimmung, als Wahrscheinlichkeit in bezug auf eine gegebene Bedingung, wie „Entfernung" als Abstand von einem gegebenen Orte. Darum gibt es für das Zutreffen derselben Bestimmung αx beliebig viele Wahrscheinlichkeiten, in bezug auf verschiedene Bedingungen, wie es für denselben Ort beliebig viele Entfernungen, in bezug auf verschiedene Orte, gibt. Darin liegt weder ein Widerspruch noch eine „Subjektivität". Die Wahrscheinlichkeiten sind nicht auf unser Wissen bezogen und hängen von Wissen und Nichtwissen in keiner Weise ab. Sie sind auf sachliche Bedingungen bezogen; von dem Stande unseres Wissens hängt nur ab, welche Bedingungen und daher welche Wahrscheinlichkeiten für dasselbe Ereignis uns jeweils zugänglich sind, und von diesem Wissen und unserer „subjektiven" Anlage und Verfassung mag es abhängen, welche von ihnen uns im gegebenen

Falle maßgebend sind für unsere Erwartungsbildung. Aber Wahrscheinlichkeit in dem hier zu betrachtenden Sinne ist *nicht Erwartung*; was hier als *Wahrscheinlichkeitsansatz* bezeichnet wird, ist *nur Ausdruck einer Wahrscheinlichkeitsbeziehung*. Nur mit solchen Ansätzen hat es die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun; es ist unerläßlich, sie von Ausdrücken eines Vermutens oder Erwartens reinlich zu scheiden.

Ebenso unerläßlich ist es, dem Wahrscheinlichkeitsansatz eine Bedeutung zu geben, die ihm Anwendbarkeit auf beliebige endliche Fallmengen einschließlich des Einzelfalls sichert. Das leistet, wie sich zeigen wird, die vorgebrachte Deutung; jetzt schon ist zu sehen, daß eine bestimmte, von 0 und 1 verschiedene Wahrscheinlichkeit für eine angegebene Ausgangsart eines einzelnen Ereignisses, ohne etwas Subjektives zu sein, durchaus verträglich ist mit dem eindeutig bestimmten tatsächlichen Ausgang, verträglich als eine der beliebig vielen *relativen* Wahrscheinlichkeitsbestimmungen, die, in bezug auf verschiedene Bedingungen, jener Ausgangsart zukommen. Die Wahrscheinlichkeit in bezug auf den umfassendsten Bedingungsinbegriff, der jeweils erkennbar ist, gibt die beste erreichbare Grundlage für die Erwartung.

2. WAHRSCHEINLICHKEIT UND HÄUFIGKEIT

Daß zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit ein wesentlicher Zusammenhang besteht, darüber gibt es keine Meinungsverschiedenheit, wohl aber darüber, welcher Art er sei. Vertreter der Häufigkeitstheorie erklären, Wahrscheinlichkeit sei Häufigkeit, genauer: der unklare überkommene Wahrscheinlichkeitsbegriff sei für Zwecke der Wissenschaft, besonders der Wahrscheinlichkeitsrechnung, durch den einer bestimmten Häufigkeit zu ersetzen [15]. „Die Wahrscheinlichkeit für αx in bezug auf βx ist p" bedeute, daß in einer unendlichen Folge von Fällen x, die unter der Bedingung βx stehen, kurz von β-Fällen, die relative Häufigkeit der Fälle, die αx erfüllen, kurz der α-Fälle, den Grenzwert p hat.

Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff setzt 1. eine unendliche Folge von Fällen voraus, die in aller Wirklichkeit weder gegeben noch durch ein Bildungsgesetz begrifflich festzulegen ist. Er ist 2. nicht auf den einzelnen Fall und auch nicht auf eine endliche Reihe von Fällen anwendbar, d.h. er ist auf Wirklichkeit überhaupt nicht anwendbar; denn die bloße Annahme des Grenzwertes p enthält keine Annahme über das Verhalten der Häufigkeit der α-Fälle in einer tatsächlich vorliegenden oder zu erwartenden endlichen Reihe von β-Fällen, weil jedes mit der Grenzwertannahme verträglich ist. 3. Entgegnet man, es sei im Sinne dieser Annahme doch nicht jede mögliche Häufigkeit h_n^α der α-Fälle unter n β-Fällen gleich *wahrscheinlich*, sondern es sei, nach dem Satz von Bernoulli, wahrscheinlicher, daß bei gegebenem n h_n^α in einem bestimmt anzugebenden Intervall um p als Mitte liege, als daß es in irgend einem anderen gleich großen Intervalle liege, so heißt das, nach der angenommenen Erklärung: in einer *unendlichen* Folge von Reihen aus je n β-Fällen hat die Häufigkeit jener Reihen, in denen h_n^α in dem angegebenen Intervall um p liegt, den Grenzwert 1. Der Versuch,

[15] So R. v. Mises, z.B. in „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit". Wien 1928.

aus dieser Aussage einen Wahrscheinlichkeitssatz in Anwendung auf eine *endliche* Reihe von n' Reihen aus je n β-Fällen zu gewinnen, führt auf eine unendliche Folge von Reihen aus je n' Reihen von je n β-Fällen und eine neue Grenzwertsetzung usf., d.h. eine Anwendung des so gefaßten Wahrscheinlichkeitsbegriffes kommt nie zustande. In jeder Anwendung des Bernoullischen Satzes und der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt verwendet man einen Begriff von Wahrscheinlichkeit, der durch die Häufigkeitsdeutung *nicht erfaßt* ist. 4. Es ist aus der Annahme eines bestimmten Häufigkeitsgrenzwertes auch keine Anweisung zu entnehmen, wie sie induktiv zu begründen sei: sie sagt nichts über ihre Bewährungsfälle aus. 5. Der Ansatz „wenn die Fälle x einer Folge unter der Bedingung βx stehen, so besteht für die Häufigkeit der Fälle x, die αx erfüllen, der Grenzwert p" verstößt durch seine Form des Wenn-So dagegen, daß die Wahrscheinlichkeit, die er fassen will, auf die Bedingung βx unlösbar bezogen ist und nur in bezug auf sie gilt. Auch von einer endlosen Folge von Würfen mit einem richtigen Würfel ist nicht schlechthin anzunehmen, daß die Häufigkeit der Einswürfe in ihr den Grenzwert 1/6 habe, sondern das wäre, wenn es die Folge gäbe, nur das *in bezug auf die angenommene Bedingung wahrscheinlichste Verhalten*; durch eine hinzukommende Bedingung könnte immer ein anderer Grenzwert wahrscheinlicher gemacht werden. Der Sachverhalt ist auch nicht zu umschreiben durch den Satz, daß in einer unendlichen Folge von Folgen, die aus Würfen mit einem richtigen Würfel bestünden, die Häufigkeit jener Folgen, die den Grenzwert 1/6 der Häufigkeit der Einswürfe aufwiesen, den Grenzwert 1 hätte; denn der Satz spricht wieder eine unzutreffende Wenn-So-Beziehung aus, und das Umschreiben hat kein Ende. 6. Wenn man in manchen statistischen Ermittlungen auf die Annahme eines Häufigkeitsgrenzwertes verzichtet und in erster Näherung eine beobachtete Häufigkeit als Grad einer Wahrscheinlichkeit, z.B. der des tödlichen Ausganges einer Krankheitsart, setzt, so ist damit nicht Wahrscheinlichkeit durch Häufigkeit ersetzt. Die beobachtete Häufigkeit bedeutet für die Fälle, an denen sie gefunden wurde, keine Wahrscheinlichkeit, für weitere Fälle aber, auf die der Ansatz ja angewandt werden soll, ist die angenommene Zahl offenbar ein Näherungswert derjenigen Häufigkeit, die unter der Voraussetzung, daß die maßgebenden Bedingungen sich nicht merklich ändern, und *in bezug* auf diese inneren und äußeren Bedingungen, *wahrscheinlicher* als jede andere bestimmt anzugebende Häufigkeit ist, wahrscheinlicher in einem Sinne, der durch bloße Häufigkeitsbegriffe nicht ausgedrückt werden kann.

Diese Einwendungen richten sich nicht gegen Wahrscheinlichkeitsaussagen überhaupt, wie der oft erhobene Einwand aus der Unmöglichkeit, eine solche Aussage durch Einzelaussagen zu „verifizieren“ (vgl. die Einleitung 1); sie treffen nur die Häufigkeitsdeutung: sie ergibt für die Wahrscheinlichkeitsaussagen, die wir in Anwendungen allgemeiner Ansätze immer und offenbar mit Sinn vollziehen, keinen Sinn, und *deshalb* ist sie unbrauchbar.

Demgegenüber sei für den Satz „die β-Wahrscheinlichkeit für αx hat den Wert p“ eine Erklärung vorgeschlagen, die sowohl dem natürlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff als auch den Bedürfnissen der Rechnung und ihrer Anwendung entspricht. Dies zu zeigen, soll die Deutung erst an dem besonderen Ansatz durchgeführt werden, der „die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel Eins zu werfen“ gleich 1/6 setzt.

Für den einzelnen Würfelwurf ($n = 1$) ist in bezug auf die vorausgesetzte regelmäßige Beschaffenheit des Würfels und die allgemeine Bestimmung, daß mit ihm gewürfelt wird, von den beiden Werten 0 und 1, welche die Häufigkeit h_n^α des Einserwurfes hier annehmen kann, im Sinne des üblichen Ansatzes 0 der wahrscheinlichere; man setzt 5 gegen 1, daß im nächsten Wurf nicht Eins kommt. In einer Menge von drei Würfen ($n = 3$) kann die Häufigkeit h_n^α der Einserwürfe 0, $^1/_3$, $^2/_3$ oder 1 sein; unter diesen möglichen Häufigkeiten gibt es zwei Werte kleinster Abweichung von $p = {}^1/_6$, nämlich 0 und $^1/_3$, und im Sinne des Ansatzes ist in bezug auf die angenommene Bedingung am wahrscheinlichsten, daß einer von ihnen als Wert von h_n^α auftritt. Die kleinste Abweichung von p hat für jeden von ihnen den Betrag 1/6, das ist $\frac{1}{2n}$; und $\frac{1}{2n}$ ist allgemein der größte Betrag, den die kleinste Abweichung eines h_n^α von p annehmen kann. Ist $n = 6$, so fällt der wahrscheinlichste Wert für h_n^α mit $p = 1/6$ zusammen; bei $n = 10$ ist er 0,2. Der Unterschied $h_n^\alpha - p$ für das jeweils *wahrscheinlichste* h_n^α nimmt dem Betrag nach nicht einförmig (monoton) ab, wenn n zunimmt, doch überschreiten von einem beliebig anzugebenden n_1 an alle diese Beträge nicht die Schranke $\frac{1}{2n_1}$ und bleiben, sobald n_1 überschritten ist, unter ihr. In diesem Sinne würden sich die wahrscheinlichsten Häufigkeitswerte bei endlos wachsendem n um den Wert $p = 1/6$ als ihren Grenzwert häufen. Setzt man $1/6$ als Grad der Wahrscheinlichkeit des Einserwurfes in bezug auf die genannte Bedingung an, so sei dem also die Bedeutung beigelegt, daß für die Häufigkeit der Einserwürfe unter n Würfen, in bezug auf diese Bedingung, immer *der* Wert h_n^α am wahrscheinlichsten ist, der dem Wert $1/6$ am nächsten liegt, und wenn zwei solche h_n^α-Werte vorkommen, jeder von ihnen.

Der Ansatz, der einer Wahrscheinlichkeit einen Zahlenwert als ihren Grad zuschreibt, verwendet den Begriff des in bezug auf βx Wahrscheinlichsten oder des „β-Höchstwahrscheinlichen" in einem Sinne, der sich so aussprechen läßt:

Eine scharfe Bestimmung (Satzfunktion) S heißt β-höchstwahrscheinlich, wenn in bezug auf die Bedingung βx eine beliebige Näherung an Erfüllung von S immer wahrscheinlicher ist als jede nicht minder enge Näherung an ein beliebig, aber mit gleichem Grade der Bestimmtheit anzugebendes, mit S nicht gleichbedeutendes, kurz ein „dem S gleichgeordnetes" S'. Die Annahme gleichen Bestimmtheitsgrades bedeutet bei Zahlangaben S und S' entweder Einschließung in gleich große Bereiche oder, daß je eine eindeutig bestimmte Zahl angegeben wird. „*In bezug auf β ist höchstwahrscheinlich S*" werde ausgedrückt durch die Anschreibung

$$\beta\mathfrak{H}\,(S).$$

Fälle, die αx bzw. βx erfüllen, seien α-Fälle bzw. β-Fälle genannt.

Dann ergibt sich die Erklärung: (1) „*In bezug auf βx ist αx im Grade p wahrscheinlich*" heißt: *Für jedes n gilt: in bezug auf βx ist höchstwahrscheinlich, daß die Häufigkeit h_n^α der α-Fälle unter n β-Fällen einen Wert kleinster Abweichung von p annimmt.* Die kleinste Abweichung von p, die ein h_n^α haben kann, unterliegt der Beschränkung

$$\left| h_n^\alpha - p \right| \leqq \frac{1}{2n}.$$

Drückt man, in Anschreibung eines Ansatzes, durch „(n)" aus „für jedes n gilt (was nachfolgt)", so nimmt die Erklärung (1) die Form an: (1') „*In bezug auf βx ist αx im Grade p wahrscheinlich*" *ist gleichbedeutend mit*

$$(n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right),$$

oder, wenn „$=_{Df}$" als Zeichen der definitorischen Gleichsetzung dient,

$$(1')\qquad \{W(\beta x, \alpha x) = p\} =_{Df} (n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right).$$

Offenbar gilt:

$$(n)\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right) \rightarrow (\lim_{n\to\infty} h_n^\alpha = p)$$

und es ist zu setzen:

$$(2)\qquad (n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right) \rightarrow \beta\mathfrak{H}\ (\lim_{n\to\infty} h_n^\alpha = p)$$

und

$$(2')\qquad \{W(\beta x, \alpha x) = p\} \rightarrow \beta\mathfrak{H}\ (\lim_{n\to\infty} h_n^\alpha = p).$$

Folgerungen und Zusätze:

1. Was man „die Wahrscheinlichkeit für αx aus βx" nennt, ist nicht eine Häufigkeit schlechthin oder Grenzwert einer Häufigkeit, sondern ist wesentlich eine *höchstwahrscheinliche* Häufigkeit, genauer *β-höchstwahrscheinlicher* Grenzwert der Häufigkeit der α-Fälle unter β-Fällen. Wahrscheinlichkeit ist nicht auf Häufigkeit zurückzuführen. Der Ausdruck „$W(\beta x, \alpha x) = p$" ist nur genau, wenn man die linke Seite als „Grad" oder „Zahlenwert der Wahrscheinlichkeit von αx aus βx" liest. Die gewöhnliche Lesart ist natürlich als Abkürzung zu verstehen, wie etwa die Wendung „die Dichte des Wassers bei 4^0 ist 1". Sie bedeutet so wenig ein Ersetzen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes durch den der Häufigkeit, wie diese ein Ersetzen des Dichtebegriffes durch einen Zahlbegriff. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist für die Erklärung des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsgrades *vorausgesetzt* und ist hier nicht definiert, noch wird später für ihn eine explizite Definition gegeben; er soll aber durch eine Reihe von Grundannahmen genügend gekennzeichnet werden (§ 10).

2. Gegen die vorgeschlagene Erklärung könnte der Einwand erhoben werden: die Annahme, ein bestimmter Häufigkeitswert

h_n^a sei in bezug auf β wahrscheinlicher als jeder andere, der bei gegebenem n möglich ist, setze voraus, daß jedem dieser Werte eine β-Wahrscheinlichkeit bestimmter Größe zukomme; und wolle man nun erklären, was das bedeutet, so wäre das in der vorgeschlagenen Weise nicht zu leisten. Die Erklärung scheint auf einen Zirkel hinauszulaufen. Der Einwand gründet sich auf die Annahme, eine Beziehung des Größerseins setze zwei „absolute Größen" als Glieder voraus. Aber es werden immer nur Größenbeziehungen, niemals Größen festgestellt. Das Größenverhältnis zwischen Höhe des Tisches und Höhe des Schrankes kann allerdings genauer ausgedrückt werden, indem man jede ausmißt; aber was man dann als „Höhe des Tisches" einführt, ist ein Verhältnis zur Meterlänge. Daß diese keine absolute Größe heißen darf, erkennt man an der Unprüfbarkeit und Ungreifbarkeit der Annahme, daß alle physikalischen Größen einschließlich der Maßstäbe und der Beobachter in einem vorgegebenen Verhältnis größer oder kleiner seien, „als sie sind". Es sind nicht feste Größen, sondern nur annähernd feste Größenverhältnisse feststellbar [16]. Für die Wahrscheinlichkeit bedeutet das: wir erkennen unmittelbar nur, welche von zwei Verhaltensweisen in bezug auf eine Bedingung wahrscheinlicher und insbesondere, welche unter gleichgeordneten die wahrscheinlichste ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung setzt Beziehungen des Wahrscheinlicherseins zwischen Häufigkeiten voraus. Ist in bezug auf βx ein $\alpha_1 x$ *höchstwahrscheinlich häufiger* als ein $\alpha_2 x$, so nennt man $\alpha_1 x$ in demselben Verhältnis *wahrscheinlicher* in bezug auf βx, als $\alpha_2 x$; d.h. *man setzt das Verhältnis der β-höchstwahrscheinlichen Häufigkeiten als Größenverhältnis der β-Wahrscheinlichkeiten an,* aber nicht kann man den Begriff des β-Wahrscheinlicherseins durch einen Begriff des Häufigerseins schlechthin ersetzen, ohne auf jede Anwendung über den Bereich des Beobachteten hinaus zu verzichten. Mittels „nichtnormierter" Wahrscheinlichkeiten werden „normierte" gewonnen, wie man überall von nichtgemessenen Größen zu gemessenen übergeht, d.h. von nicht-normierten Größenbeziehungen zu normierten, nämlich durch Quotienten ausgedrückten. Es wird sich zeigen, daß diese Quotienten immer höchstwahrscheinliche Häufigkeitsverhält-

[16] Der Gedanke ist der theoretischen Physik nicht neu; er war nur wegen der nachfolgenden Anwendung in Erinnerung zu bringen.

nisse sind, daher alle Messung zuletzt auf „nicht-normierten“ Beziehungen des Wahrscheinlicherseins beruht (§ 4 B).

3. Nach der Erklärung (1) ist der Ansatz, der der Wahrscheinlichkeit von αx in bezug auf βx einen bestimmten Zahlenwert p zuschreibt, nicht gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Häufigkeit der α-Fälle unter n β-Fällen für $n \to \infty$ den Grenzwert p habe, sie schließt aber als Folge ein, daß die *β-höchstwahrscheinliche* Häufigkeit der α-Fälle unter n β-Fällen diesem Grenzwert zustrebt. Hier ist nicht eine undefinierbare Folge von β-Fällen für die Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes vorausgesetzt, sondern es ist für jede endliche Menge von n β-Fällen ein bestimmtes Verhalten der Häufigkeiten h_n^α als höchstwahrscheinlich gesetzt. Das könnte, nur in minderer Schärfe, auch ohne Annahme eines Grenzwertes für h_n^α geschehen, vgl. § 3, § 4 B (6). Wird aber als Wahrscheinlichkeitsgrad eine bestimmte Zahl p angegeben, so hat sie die Bedeutung eines Grenzwertes, dem die Zahlen h_n^α zustreben würden, wenn die Reihe der Fälle in der als β-höchstwahrscheinlich angenommenen Weise, und nicht in einer gänzlich unfaßbaren Art, endlos weiterginge. (Zur Frage nach der Berechtigung einer solchen Annahme vgl. § 8.) Die Annahme dient nur dazu, die Bedingung βx, unter der die Fälle stehen, zu kennzeichnen, doch ist nicht eine unendliche Folge solcher Fälle als Bedingung eingeführt.

4. Der Häufigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeit verdankt einen Schein von Berechtigung Fällen von der Art des folgenden Beispieles. Man setzt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl, die man aus der Reihe der natürlichen Zahlen herausgreift, eine gerade Zahl sei, gleich 1/2. Hier liegt eine unendliche Folge von Zahlen vor, und die betrachtete Wahrscheinlichkeit ist durch den Grenzwert der Häufigkeit der geraden Zahlen in ihr angegeben. Aber diese Folge ist ein begriffliches Gebilde, durch dessen Bildungsgesetz die betrachtete Häufigkeit eindeutig bestimmt ist; diese ist weder Gegenstand von Wahrscheinlichkeitserwägungen noch eine Wahrscheinlichkeit. Der Wahrscheinlichkeitsansatz betrifft nicht die Zahlenfolge, sondern einen wirklichen Vorgang: die Geschehnisse des Herausgreifens, mögen sie in äußeren Ereignissen oder in bloßer Denktätigkeit bestehen. Bedingung ist auch keine Folge solcher Ereignisse, sondern was, unabhängig von ihrem tatsächlichen Auftreten, vorgegebener gemeinsamer Bestimmungsinbegriff

für solche Ereignisse ist, ausgedrückt z.B. in dem Vorsatz, „irgendeine Zahl" aus der Zahlenreihe bestimmt aufzufassen, oder in einer mechanischen Vorrichtung, die jeweils eine dieser Zahlen, gleichviel welche, eindeutig auszeichnen soll. Erst in bezug auf diese Bedingung, die keine der zwei Arten von Zahlen begünstigt, und nicht schon in bezug auf die Häufigkeitsverhältnisse in der Zahlenreihe, ist es 1/2 wahrscheinlich, daß eine gerade Zahl getroffen wird. Die in bezug auf diese wirkliche Bedingung höchstwahrscheinliche Häufigkeit der Erfassungen gerader Zahlen ist *gleich* der Häufigkeit dieser Zahlen in der Zahlenreihe, ohne begrifflich *dasselbe* zu sein.

5. Der Beweis für den Satz (2) enthält in seinem rein mathematischen, d.h. logischen Teil nichts Merkwürdiges. Doch ist bemerkenswert, daß er nicht ganz im Logisch-Mathematischen verläuft. Der Schluß von (1) auf (2) hat die Form einer Anwendung des Satzes [17]:

$$\text{(I)}\ \{\beta\mathfrak{H}(S) \wedge (S \rightarrow P)\} \rightarrow \beta\mathfrak{H}(P).$$

Das angeführte Schlußgesetz ist ein spezifisch wahrscheinlichkeitstheoretischer Satz. Durch seine Anwendung unterscheidet sich Wahrscheinlichkeitsrechnung von bloßer Arithmetik. In ihren Überlegungen ist nur der Teil, der das $S \rightarrow P$ unserer Formel betrifft, das Einsichtigmachen einer Folgebeziehung zwischen mathematischen Annahmen, rein mathematisch und freilich der Hauptteil. Hier werden etwa reine Häufigkeitsverhältnisse betrachtet. Aber das, wovon man ausgeht, das $\beta\mathfrak{H}(S)$, und das, was am Ende herauskommt, enthält wesentlich den nicht-mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeit, und nur dadurch wird die Anwendung einer solchen Überlegung auf Fragen der Wahrscheinlichkeit vermittelt.

[17] Die β-Höchstwahrscheinlichkeit, und β-Wahrscheinlichkeit überhaupt, ist durch den Satz als eine „extensionale" Bestimmung gekennzeichnet. Ersetzt man in (I) „S ist β-höchstwahrscheinlich" durch „S wird am meisten erwartet" und entsprechend „P ist β-höchstwahrscheinlich", so erhält man keinen giltigen Satz; der Erwartende muß um die Beziehung $S \rightarrow P$ nicht wissen und nicht Gebrauch von ihr machen. Die Beziehung (I) „ist S β-höchstwahrscheinlich, und folgt P aus S, so ist P β-höchstwahrscheinlich", die dem Schluß zugrunde liegt, ist kein logisches Gesetz, sondern ist begründet in einer (nicht logisch selbstverständlichen) Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsbeziehung.

6. Die Erklärung (1) des Wahrscheinlichkeitsansatzes enthält keine Ordnungsvoraussetzung, sie bleibt aber offen für die Aufnahme einer solchen. Ein Grenzwert für die Häufigkeit h_n^α ist freilich erst in bezug auf eine endlose Folge von h_n^α-Werten bestimmt und ist zwar gegen viele, aber nicht gegen alle Änderungen ihrer Ordnung unempfindlich. Aber ein Wahrscheinlichkeitsansatz, etwa über den Wert der Wahrscheinlichkeit des Einserwurfes beim Würfeln, hat, wie zu sehen war, nicht eine Folge von Fällen zur Voraussetzung, in bezug auf welche die anzugebende Wahrscheinlichkeit besteht, sondern einen Bedingungsinbegriff βx, unter dem „alle möglichen Fälle" der betrachteten Art stehen, eine Bedingung die *für* jeden Fall gilt, der eintreten mag, gleichviel, ob er oder eine Folge solcher Fälle eintritt. Es ist in den allgemeinen Bedingungen des Würfelns mit einem so und so beschaffenen Würfel begründet, daß in bezug auf sie, für jedes n, $| h_n^\alpha - 1/6 | \leqq 1/2n$ höchstwahrscheinlich ist. Eine Menge von n β-Fällen ist in diesem Ansatz nur herangezogen als Gelegenheit, an der er sich bewähre, nicht als Bedingung. Darum ist der Ansatz auf beliebige und beliebig geordnete Mengen von β-Fällen anwendbar. Er liefert eine Wahrscheinlichkeit in bezug auf βx und nicht in bezug auf irgend eine Ordnung der β-Fälle. Das bedeutet nicht, daß Unordnung vorausgesetzt sei, sondern nur, daß in der Bedingung βx, die dem Ansatz zugrunde liegt, keine Ordnungsvoraussetzung vorkommt. Eine vorliegende Fallfolge hat immer eine Ordnung, wenn auch keine einfache. Von ihr, oder von der angenommenen Ordnung in einer bloß gedachten Folge, wird es abhängen, ob der Ansatz, der auf Ordnung keine Rücksicht nimmt, in Anwendung auf die Folge noch *bedeutsam* und für eine Erwartungsbildung wertvoll ist und in welchem Grade. Auch wenn jemand sich vorgenommen hat, einen Würfel in regelmäßigem Wechsel auf Eins und auf Nicht-Eins fallen zu lassen, und er hätte auch die Kunst erlernt, das annähernd auszuführen, besteht in bezug auf die *allgemeinen* Bedingungen des Würfelns überhaupt mit einem richtigen Würfel die Wahrscheinlichkeit $^1/_6$ des Einserwurfes. Aber niemand wird bei diesem Ansatz stehen bleiben und auf ihn eine Erwartung gründen. Nicht weil er unrichtig geworden wäre, sondern weil er durch die Voraussetzung bestimmterer Bedingungen überholt ist: man kann in bezug auf sie einen Ansatz von größerem Gewicht, d.h. von

höherem Erkenntniswert hinsichtlich der vorliegenden oder angenommenen Fallmenge gewinnen, indem man die Bedingungen der Ordnung in die Voraussetzungen einbezieht. Die Annahme der Zufallsartigkeit, einer bestimmten Art der „Nachwirkungsfreiheit", in einer Folge hat die Bedeutung, dem unabhängig von jeder Voraussetzung einer bestimmt angegebenen Ordnung aufgestellten Wahrscheinlichkeitsansatz in Anwendung auf die Folge sein Gewicht zu sichern. Ordnungseigenschaften von Fallfolgen werden bedeutsam für die Induktion.

7. Die vorgeschlagene Erklärung des Grades der β-Wahrscheinlichkeit für αx ist, in Übereinstimmung mit dem natürlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff, den sie ja verwendet, auf beliebige Mengen von Fällen und insbesondere auch auf den Einzelfall anwendbar. Dieser wesentliche und von jedem brauchbaren Begriff der Wahrscheinlichkeit zu fordernde Wert scheint aber mehr als zweifelhaft gemacht durch das Bedenken, das der ganzen Wahrscheinlichkeitslehre in neuerer Zeit entgegengehalten wurde: daß Wahrscheinlichkeitssätze durch Erfahrung nicht zu bewähren und nicht zu widerlegen, daß sie daher ohne Bezug auf Erfahrung seien; und da sie gewiß auch nicht rein logische Sätze sind, seien sie überhaupt nicht als Aussagen anzusehen. Dieser seltsame Einwand zeigt, daß man einem vorgefaßten Begriff von Erfahrung die ganze Erfahrung zu opfern bereit ist; denn Wahrscheinlichkeiten gehen in alle Wirklichkeitssätze ein. Der Einwand sei hier nur mit dem Hinweise vermerkt, daß eine Hauptaufgabe dieser Untersuchungen eine unbefangene Prüfung der Erfahrung und ein Hauptergebnis ein Begriff von Erfahrung ist, der ihn behebt (vgl. auch Einleitung, 1).

3. GEWINNUNG DES WAHRSCHEINLICHKEITSANSATZES: INDUKTION

Bisher ist nur der Sinn des Wahrscheinlichkeitsansatzes angegeben worden, aber nicht, wie ein Ansatz gewonnen wird, und das heißt für eine wissenschaftstheoretische Betrachtung, wie er *begründet* oder *gerechtfertigt* wird.

1. Es werde mit einem Würfel von beliebiger Beschaffenheit gewürfelt; „Würfel" ist hier im ursprünglichen Wortsinn verstanden, es heißt nicht Hexaeder. Die Frage, wie wahrscheinlich es sei, daß bei diesem Spiel Eins falle, setzt die Annahme voraus, es gebe eine Wahrscheinlichkeit bestimmten Zahlenwertes für diese Ausgangsart αx des Wurfes in bezug auf die allgemeinen Bedingungen βx des Würfelns mit diesem oder mit einem in gewisser Hinsicht gleich beschaffenen Körper; diesen Zahlenwert p gilt es zu ermitteln. Die Annahme hat die Bedeutung: Es gibt in dem Inbegriff der Bedingungen des Würfelns mit diesem Würfel eine Bedingung β und es gibt eine Zahl p derart, daß für die Häufigkeit h_n^α der Einserwürfe (α-Fälle) unter n Würfen mit einem solchen Würfel (β-Fällen) ein Wert kleinster Abweichung von p in bezug auf β am wahrscheinlichsten ist. Schreibt man „$(E\beta)$", „(Ep)" für „Es gibt ein β", bzw. für „Es gibt ein p, so daß gilt (was folgt)", so hat man für die Annahme den Ausdruck

$$(1) \qquad (E\beta)\ (Ep)\ (n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right).$$

Mit einer solchen Annahme geht man gewöhnlich an einen Versuch wie das Erproben eines Würfels heran. Die Anwendung der Voraussetzung (1) auf eine Reihe von m beobachteten Fällen ergibt

$$(2) \qquad \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_m^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2m}\right).$$

Das ist, bei gegebenem h_m^α, *eine β-höchstwahrscheinliche Bestimmung für p.* Für die Häufigkeiten h_{m+s}^α, die bei Fortsetzung des Versuches höchstwahrscheinlich sind, gilt

$$(3) \qquad \beta\mathfrak{H}\left(\left|h^{\alpha}_{m+s} - p\right| \leqq \frac{1}{2(m+s)}\right).$$

Aus (2) und (3) folgt bei gegebenen Werten m und s

$$(4) \qquad \beta\mathfrak{H}\left(\left|h^{\alpha}_{m+s} - h^{\alpha}_{m}\right| \leqq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m+s)}\right)$$

und im Sinne von (1) der allgemeine Ansatz

$$(5) \qquad (s)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h^{\alpha}_{m+s} - h^{\alpha}_{m}\right| \leqq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m+s)}\right).$$

In ihm treten nur beobachtete oder zu beobachtende Häufigkeiten auf.

2. Der Ansatz (5) sagt *nur*, daß bei gegebenem h^{α}_{m} für die Häufigkeiten h^{α}_{m+s} das Verbleiben in dem angegebenem Intervall um h^{α}_{m} in bezug auf β *wahrscheinlicher* ist als das Bleiben in dem *gleich großen* Intervall um irgend einen anderen bestimmten Wert; aber er sagt nicht, wie wahrscheinlich jenes ist, und nicht, daß es *zu erwarten* sei. Zu unmittelbarer induktiver Prüfung und Bewährung eignet sich ein Ansatz, der ein bestimmtes Verhalten bei zutreffender Bedingung β *erwarten* läßt, d.h., wenn ihm zufolge in bezug auf β höchstwahrscheinlich ist, daß die Häufigkeit jenes Verhaltens unter ν β-Fällen mit wachsendem ν gegen den Grenzwert 1 geht, sofern die Bedingung nicht durch Nebenbedingungen gestört ist. Ein solcher Ansatz ist auf Grund eines Ansatzes von der Form (1) oder (5) zu gewinnen und erlaubt eine mittelbare Bewährung für ihn.

Aus der Annahme (1) folgt nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: es ist in bezug auf β höchstwahrscheinlich, daß in einer unendlichen Folge von Reihen aus je m β-Fällen die Häufigkeit H_ν jener Reihen, in denen $|h_m - p|$ einen Betrag von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{m}}$ nicht überschreitet, für ohne Ende wachsendes ν gegen den Grenzwert 1 geht. Das bedeutet nach der Erklärung (1) § 2: es ist in bezug auf β höchstwahrscheinlich, daß in jedem gegebenen endlichen Abschnitt jener Folge, bestehend aus ν m-gliedrigen β-Reihen, $1 - H_\nu < \frac{1}{\nu}$; d.h. es ist in bezug auf β wahrscheinlicher, daß $H_\nu = 1$ sei, als daß H_ν irgend einen anderen bestimmt angegebenen der möglichen Werte habe.

In diesem Sinne ist in bezug auf β am wahrscheinlichsten, daß jede der ν m-gliedrigen Reihen oder, wenn man $\nu = 1$ setzt, daß *die vorliegende Reihe* eine Häufigkeit h_m^α der α-Fälle aufweist, die der angegebenen Beschränkung genügt, und von gleicher Größenordnung ist *die β-höchstwahrscheinliche Beschränkung der Abweichungen* $|h_{m+s}^\alpha - h_m^\alpha|$.

3. Die Folgebeziehung

$$(n)\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right) \rightarrow (\lim_{n\to\infty} h_n^\alpha = p)$$

ist nicht umkehrbar. Die Annahme

$$(6) \qquad \beta\mathfrak{H}\,(\lim_{n\to\infty} h_n^\alpha = p) \rightarrow (n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2n}\right)$$

von der in den Überlegungen unter 2. Gebrauch gemacht wurde, und damit die Äquivalenz der beiden Seiten dieser Beziehung ergibt sich als Folge der Erklärung (1) § 2 und der allgemeineren des Begriffes der *β-Höchstwahrscheinlichkeit.* Der Ausdruck $\beta\mathfrak{H}\,(S)$ bedeutet, daß in bezug auf β eine beliebig enge (erreichbare) *Näherung* an die scharfe Form S wahrscheinlicher ist als eine nicht minder enge Näherung an ein beliebig angegebenes dem S gleichgeordnetes S'; in Anwendung auf die Annahme eines Grenzwertes als scharfe Bestimmung des Verhaltens der Häufigkeiten h_n^α gibt das die Beziehung (6). Es war zu sehen, daß sie für die induktive Begründung eines Wahrscheinlichkeitsansatzes tatsächlich immer, wenn auch stillschweigend, verwendet wird und nicht zu entbehren ist. Sie wurde hier in Bestimmung des β-höchstwahrscheinlichen Wertes von H_ν bei gegebenem ν und insbesondere für $\nu = 1$ angewandt. Bei β-Reihen schärferer höchstwahrscheinlicher Konvergenz, in Fällen der Messung, kann sie auf die Häufigkeit h_n^α bei gegebenem n unmittelbar angewandt werden; vgl. § 4 B.

4. Wenn man schon mit einer Voraussetzung der Art (1), d.h. mit der vorgängigen Annahme des Bestandes einer Wahrscheinlichkeits- oder Verteilungsgesetzlichkeit an die Beobachtung herangeht, wie an die Erprobung eines Würfels, so macht man von einer allgemeineren Erfahrung Gebrauch, daß dergleichen Körper sich so und so zu verhalten pflegen, oder man steht, ohne sie ausdrücklich heranzuziehen, unter ihrem Einfluß: die Voraussetzung ist selbst eine, wenn auch nicht in klare Formen gefaßte und nicht

planmäßig gewonnene Induktion. Es ist für eine wissenschaftslogische Betrachtung belanglos, ob jemand durch Beobachtung der eben vorliegenden Fälle veranlaßt wird, einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsansatz zu bilden, oder ob er einen solchen unter dem Einfluß einer allgemeinen, durch Erfahrung gewonnenen Einstellung im voraus aufgestellt hat und durch die Beobachtung nur prüft, bestätigt und allenfalls verbessert. In beiden Fällen ist der Ansatz durch die Beobachtung *bewährt* oder *zu bewähren*, und nur dieses Bewährungsverhältnis ist gemeint, wenn man von ihm sagt, er sei *induktiv* gewonnen oder so zu gewinnen [18].

5. Für eine genauere Bewährung des β-Höchstwahrscheinlichen ist vorausgesetzt, daß in den beobachteten Fällen die Bedingung βx *unter allen* für die Ergebnisse hinsichtlich αx überhaupt *belanghaften Bedingungen* mit guter Näherung *die allein festgehaltene*, allein allgemein zutreffende sei. Bei Erprobung eines Würfels ist aus ungezählten Erfahrungen, unscharfen Induktionen, bekannt, daß viele Bedingungen, wie Farbe des Würfels, Art der Beleuchtung, Lage des Versuchsraumes, Wärmezustand, Druck der Luft innerhalb des gewöhnlichen Schwankungsbereiches, auf das Ergebnis hinsichtlich der Bestimmung αx keinen merklichen Einfluß haben. Das bewährt sich in einem weiten Bereich von Fällen grob mechanischen Geschehens nach Art der zu beobachtenden Würfe. Solche Bedingungen mögen in der Versuchsreihe fest bleiben; doch können sie beim Übergang zu anderen Reihen von Versuchen mit dem selben oder mit einem „solchen" Würfel sich ändern: sie gehören nicht zu dem Bedingungsinbegriff βx, auf den sich die Höchstwahrscheinlichkeit bezieht. Von den belanghaften Bedingungen aber sucht man alle, die in βx nicht eingehen sollen, entweder planmäßig oder, wie beim Würfeln gewöhnlich, in „zufälligem" Wech-

---

[18] In Verkennung dieses Sachverhaltes will K. Popper, in seiner Logik der Forschung (Wien 1935), die Induktion als eine psychologische Angelegenheit von wissenschaftslogischer Betrachtung ausschließen. Ein allgemeiner empirischer Satz sei grundsätzlich nicht „verifizierbar", sondern nur „falsifizierbar", das Falsifizieren aber geschehe deduktiv und doch durch den Einzelfall, im *experimentum crucis*. Indessen bemerkt Popper selbst, es genüge dazu nicht eine vereinzelte Beobachtung, sondern erst ein hinreichend gesicherter sogenannter Effekt. Es liegt auf der Hand, daß diese Sicherung oder Beglaubigung *induktiver* Art ist; über der unerfüllten Forderung der Beweisbarkeit ist die Bewährbarkeit übersehen oder zu gering geachtet.

sel abzuwandeln. Wenn es darauf ankommt zu erfahren, wie dieser oder ein den mechanischen Eigenschaften nach „so beschaffener“ Körper beim Würfeln sich verhalte, so will man wissen, welches Verhalten in bezug auf diesen Inbegriff βx von Bedingungen höchstwahrscheinlich sei, und deshalb werden die übrigen, dem Würfel äußeren mechanischen Bedingungen, soweit sie belanghaft sind, „regellos“ verändert.

6. Will man aber *durch eine allgemeine Erklärung bestimmen (definieren)*, welcher Art dieses Verfahren des Würfelns sei oder für den angegebenen Zweck zu sein habe, so ergibt sich nicht mehr als die verneinende Bestimmung, von der man ausgegangen ist: es muß so sein, daß, soweit die Erfahrung reicht, keine für den Ausfall belanghafte Bedingung außer βx für alle Fälle gilt. Versucht man die übliche Wenn-So-Fassung durchzuführen, so erhält man einen Ansatz der Art: Wenn mit diesem Würfel so gewürfelt wird, daß dabei nichts geschieht, was ein anderes Gesamtverhalten höchstwahrscheinlich macht, so ist das und das Verhalten höchstwahrscheinlich. Er unterscheidet sich von einer Tautologie nur durch die in ihm mehr versteckte als ausgesprochene Meinung, *daß der Würfel* neben belanglosen *eine in der Versuchsreihe festbleibende Eigenschaft βx hat, in bezug auf welche das angegebene Verhalten* „beim Würfeln überhaupt“ *höchstwahrscheinlich ist.* Das ist ein Ansatz von der Form (1) § 3. Die Voraussetzung, daß alle belanghaften Umstände außer βx wechseln, oder eine entsprechende Vorschrift für das Würfeln *erlangt erst Sinn* durch diesen Ansatz. Sie kann darum in ihm nicht als ein sinnbestimmendes Stück auftreten. Sie ist in der Tat keine Bedingung der gesetzten Höchstwahrscheinlichkeit, sondern nur eine Bedingung ihrer reinen Bewährung. Sie wird darum wichtig als Voraussetzung für eine auf den Ansatz zu gründende *Erwartung* oder *Vorhersage*. Soweit diese Voraussetzung erfüllt ist, ist es *berechtigt*, auf die β-Höchstwahrscheinlichkeit einer Geschehensart die Erwartung eines Geschehens dieser Art zu gründen.

7. Wie der Vorhersage auf Grund eines Wahrscheinlichkeitsansatzes, haftet auch diesem selbst eine *Unsicherheit* an. Er ist eine Annahme (Hypothese), und einer Annahme, sei sie ein zahlenmäßiger Wahrscheinlichkeitsansatz oder anderen Inhaltes, schreibt man größere oder geringere „Wahrscheinlichkeit“ zu. Damit ist

gewöhnlich der nicht zahlenmäßig bestimmbare *Berechtigungsgrad* der Annahme gemeint, gegeben durch ihre immer unvollkommene *Bewährung*. Das ist etwas durchaus anderes als eine, günstigenfalls zahlenmäßig anzugebende, Wahrscheinlichkeit in bezug auf eine Bedingung. Es kann in bezug auf ein β' im Grade p' wahrscheinlich sein, daß in bezug auf βx ein αx im Grade p wahrscheinlich ist; für die β-Wahrscheinlichkeit besteht dann eine β'-Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeit zweiter Stufe, für diese vielleicht wieder eine β''-Wahrscheinlichkeit dritter Stufe usw. H. Reichenbach meint, ein Wahrscheinlichkeitsansatz erster Stufe sei nur ein Näherungsausdruck für eine unendliche Folge von Wahrscheinlichkeiten höherer Stufe [19].

Das müßte für jeden Wahrscheinlichkeitsansatz gelten: er wäre ein ungenauer Ausdruck für eine Reihe „. . . daß in bezug auf β'' im Grade p'' wahrscheinlich ist, daß in bezug auf β' im Grade p' wahrscheinlich ist, daß in bezug auf β im Grade p wahrscheinlich ist, daß αx zutrifft", eine Reihe von lauter abhängigen Sätzen, der ein Anfang in der Form des Hauptsatzes „Es ist in bezug auf $\beta^{(n)}$ im Grade $p^{(n)}$ wahrscheinlich" fehlt. Das ist ein Zurückschieben ohne Ende, und jener Ansatz, für den ein vorliegender ein Näherungsausdruck sein soll, *ist sinnmäßig unmöglich.* Gäbe es einen, so gäbe es übrigens beliebig viele verschiedene, weil auf jeder Stufe verschiedene Bedingungen zu Gebote stehen, und es wäre nicht abzusehen, *für welche* von diesen unzähligen anfangslosen Reihen der vorliegende Ansatz endlich hoher Stufe eine Näherung sein soll. Ein Wahrscheinlichkeitsansatz kann die Ansätze höherer Stufe nicht sinnmäßig voraussetzen. Seine immer unvollkommene *Berechtigung* ist nicht in Wahrscheinlichkeiten höherer Stufe, sondern *in seiner Bewährung* gelegen. Auch für eine Annahme, die nicht die Gestalt eines zahlenmäßigen Wahrscheinlichkeitsansatzes hat, sind meist nicht Wahrscheinlichkeiten in bezug auf angegebene Bedingungen (wie ihre Zugehörigkeit zu einer bestimmten Art von Annahmen mit einer beobachteten Häufigkeit ihrer Bewährung) beizubringen, und wenn es (mit Absehen von der Nicht-Endgültigkeit jedes „Bewährtseins") geschieht, so sind diese Wahrscheinlichkeiten, oder solche einer noch höheren, aber end-

---

[19] H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre. S. 306.

lich-hohen Stufe, endlich *zu rechtfertigen*, und das geschieht nur durch ihre Bewährung [20].

8. Aus den Ansätzen

$$\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_m^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2m}\right) \tag{2}$$

$$\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_{m+s}^\alpha - p\right| \leqq \frac{1}{2(m+s)}\right) \tag{3}$$

war zu schließen

$$\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_{m+s}^\alpha - h_m^\alpha\right| \leqq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m+s)}\right). \tag{4}$$

Der Schluß macht Gebrauch von der Beziehung

$$\{\beta\mathfrak{H}(S) \wedge \beta\mathfrak{H}(P)\} \rightarrow \beta\mathfrak{H}(S \wedge P), \tag{II}$$

wo statt des einfachen Pfeiles auch der Doppelpfeil $\longleftrightarrow$ gesetzt werden darf, als Ausdruck für das umkehrbare Folgen. Der Satz spricht, wie (I) §2, eine nicht logisch selbstverständliche Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsbeziehung aus.

---

[20] H. Reichenbach behauptet „die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit z.B. für das Zutreffen der physikalischen Quantentheorie zahlenmäßig zu bestimmen, indem man sie mit anderen physikalischen Theorien ähnlicher Art in eine Klasse zusammenfaßt und für diese die Wahrscheinlichkeit durch Auszählung bestimmt" (a. a. O. S. 329); aber niemand, der zur Theorie selbst Stellung nehmen kann, wird sich mit so abwegigen Betrachtungen befassen, deren Ergebnis natürlich nicht „die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der Theorie", sondern eine Wahrscheinlichkeit in bezug auf eine recht wenig oder recht willkürlich bestimmte Bedingung wäre.

4. THEORETISCHER WAHRSCHEINLICHKEITSANSATZ UND MESSUNG

A. Der Ansatz, es sei in bezug auf die Bedingungen des Würfelns mit einem regelmäßigen Würfel $^1/_6$ wahrscheinlich, daß Eins falle, wird im Sinne einer älteren Auffassung damit begründet, daß die Zahl der günstigen Fälle 1, die aller überhaupt und gleich möglichen 6 betrage. Dem läßt sich die Deutung geben: die Mannigfaltigkeit der phoronomisch und dynamisch eindeutigen Formen von Fällen, die mit der Bedingung verträglich sind, zerfalle dem Inhaltsmaß nach in 6 gleich große Bereiche, von denen einer der Bereich jener Fallformen sei, die zum Ergebnis Eins führen. Eine gleichartige Deutung ist auf die Urnenbeispiele und ähnliche anwendbar. In jedem dieser Beispiele ist durch eine Bedingung βx ein Bereich b von mechanisch eindeutigen Fallformen festgelegt und gilt als *Allbereich* der betrachteten Fälle. Durch αx wird ein Teilbereich a bestimmt, als Mannigfaltigkeit derjenigen von diesen Fallformen, die mit einer bestimmten Erfolgsart (Einserwurf, Ziehung der Zahl eins usw.) verträglich sind. *Es wird angenommen*, es gebe ein Inhaltsmaß $M(b)$ für b und ein Inhaltsmaß $M(a)$ für a. Das Verhältnis dieses zu jenem gilt als Maß der Wahrscheinlichkeit von αx in bezug auf βx.

$$(1) \qquad W(\beta x, \alpha x) = \frac{M(a)}{M(b)}.$$

Ist ab das gesamte gemeinsame Teilgebiet zweier Bereiche a und b, also der Bereich der Fälle von $\alpha x \wedge \beta x$, so wird unter der Voraussetzung, daß b den Allbereich bedeutet,

$$(1') \qquad W(\beta x, \alpha x) = W(\beta x, \alpha x \wedge \beta x) = \frac{M(ab)}{M(b)} = \frac{M(a)}{M(b)}.$$

Eine so ermittelte Wahrscheinlichkeit nannte man eine Wahrscheinlichkeit *a priori*. Aber der Ansatz ist nicht apriorisch, wenn so nur Sätze heißen, die einer erfahrungsmäßigen Bewährung weder bedürftig noch fähig sind, weil sie keine Wirklichkeit behaupten;

solcher Art sind die Sätze reiner Logik und Mathematik. Ein Satz, der den Sinn eines Wahrscheinlichkeitsansatzes hat, beruft sich immer auf Tatbestände der Wirklichkeit und bedarf der Bewährung in ihr: er beruht, sofern er berechtigt ist, auf Erfahrung. Als Erfahrungen, die im Würfelbeispiel maßgebend sind, kann man alle in Anspruch nehmen, in denen sich die Gesetze der Mechanik bewähren. Die Gesetze der Mechanik zeichnen keine Raumrichtung vor irgend einer anderen aus. Das bedeutet für unseren Ansatz nicht nur den Mangel eines Grundes, einer der sechs Richtungen, welche die Flächennormalen von der Mitte des Würfels aus angeben, eine ausgezeichnete Bedeutung für sein Verhalten beim Würfeln zuzuschreiben, soweit seine mechanischen Eigenschaften in Betracht kommen, sondern einen erfahrungsmäßigen Grund, sie alle als in dieser Hinsicht gleichwertig zu nehmen. So ist in bezug auf *die* allgemeinen Bedingungen des Würfelns, die durch die mechanischen Eigenschaften des regelmäßigen Würfels gegeben sind, die Näherung an *Gleichhäufigkeit* der sechs Ergebnisarten höchstwahrscheinlich, und es ergibt sich eine *bestimmte Wahrscheinlichkeitszahl.*

Ein solcher Ansatz unterscheidet sich von dem gewöhnlich allein als induktiv bezeichneten nur dadurch, daß er Sätze einer Theorie verwendet: er mag deshalb ein *theoretischer Ansatz* heißen. Da aber die Theorie Sachverhalte der Wirklichkeit meint und selbst durch Erfahrung, also durch Induktionen begründet ist, ist der Ansatz, der auf ihr beruht, *mittelbar auf Induktion begründet.* Die Induktion ist nur *zeitlich* vor ihm vollzogen und ist gewonnen an Fällen eines weiteren Gebietes, die nicht gerade Fälle genau der Art sind (β-Fälle), auf welche der Ansatz sich bezieht. Wahrscheinlichkeitsansätze sind Wirklichkeitsaussagen. Es gibt keine Wahrscheinlichkeit *a priori* [21].

[21] Daß man etwa für die Endstelle der Zahlen in einer Logarithmentafel Gleichhäufigkeit der Ziffern vermutet und sie bei einer Auszählung auch in guter Näherung vorfindet, bedeutet einerseits einen logisch entscheidbaren, nicht „wahrscheinlichen" Tatbestand, die Verteilung der Ziffern auf die angegebene Stelle der Logarithmen, und andererseits, daß in bezug auf die wirklich herrschenden Bedingungen des Aufsuchens und Verzeichnens dieser Ziffern höchstwahrscheinlich ist, daß sie die im rein Formalen bestehende Gleichverteilung auch zur Geltung kommen lassen und nicht durch eine einseitige Auswahl verdecken, und das ist eine Angelegenheit der Erfahrung. Vgl. oben S. 26f.

B. Soll *die Anwendung* des theoretischen allgemeinen Ansatzes der β-Wahrscheinlichkeit für αx etwas Bedeutsames ergeben, so muß das Zutreffen von βx in den vorliegenden Fällen gesichert sein. Dazu gehören *messende* Bestimmungen. Messende Beobachtungen am gegebenen Würfel, die seinen regelmäßigen Bau feststellen, sichern der Anwendung des Ansatzes, daß in bezug auf die mechanischen Eigenschaften eines so gebauten Würfels der Einserwurf $^1/_6$ wahrscheinlich ist, ihr Gewicht. Auch bei anderen Glücksspielen ist eine genügende, maßgenaue Einhaltung gewisser Bedingungen in der Anlage der Spielgeräte vorausgesetzt und wäre durch Messungen nachzuprüfen. Sie und die vordem vollzogenen Induktionen, die zu der Hypothese des allgemeinen Ansatzes führten oder sie bewährten, ersetzen zusammengenommen die unmittelbare Induktion an einer Reihe von Versuchen mit dem vorliegenden Gerät — Würfen mit dem Würfel, Ziehungen aus der Urne — und können *mehr* als diese leisten. Messung erscheint als Induktionsersatz. Sie ist in Wahrheit immer eine unter besonderen festgehaltenen Bedingungen mit Verwendung umfassender früherer Induktionen vorgenommene und dadurch gesicherte und abgekürzte Induktion.

Das klar zu machen, diene folgendes Beispiel. Eine ebene waagrechte Fläche b ist einem Regen ausgesetzt, a ist ein Teil von b; $M(a)$ bzw. $M(b)$ seien die zugehörigen Inhaltsmaße. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Tropfen, der in b einfällt, insbesondere in a falle, wird dann gleichgesetzt dem Verhältnis $M(a):M(b)$. Es liegt der allgemeine Ansatz zugrunde: Ist βx die Bedingung, x sei ein annähernd punkthaftes Ereignis, das in den räumlichen oder zeitlichen, allgemein in den raumzeitlichen Bereich b fällt, und ist αx die Bestimmung, x sei ein Ereignis der angegebenen Art, das insbesondere in den Teilbereich a von b fällt, so ist in bezug auf βx höchstwahrscheinlich, daß die Häufigkeit h_n^α der α-Fälle unter n β-Fällen ein Wert kleinster Abweichung von einer Zahl h^α sei, und der β-höchstwahrscheinliche Häufigkeitsgrenzwert h^α der

---

Die Frage, wie es sich erkläre, daß beobachtete Häufigkeitsverhältnisse mit den theoretisch errechneten in guter Näherung übereinstimmen, woraus man ein „Anwendungsproblem" gemacht hat, führt sich, da jeder berechtigte Wahrscheinlichkeitsansatz empirisch ist, zurück auf die Frage, wie zu verstehen sei, daß Erfahrung mit Erfahrung übereinstimmt, das ist die Frage der Induktion.

α-Fälle unter den β-Fällen ist das Größenverhältnis des Teilbereiches a zum Gesamtbereich b:

$$(2) \qquad (Eh^{\alpha})\,(n)\,\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^{\alpha} - h^{\alpha}\right| \leqq \frac{1}{2n}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{M(a)}{M(b)} = h^{\alpha} = \beta\text{-}\lim_{n\to\infty} h_n^{\alpha},$$

wo der Zeiger vor dem limes-Zeichen andeuten soll, daß der β-höchstwahrscheinliche Grenzwert für h_n^{α} gemeint ist.

Sind a_1, a_2 Teilbereiche von b, so ergibt der Ansatz (2) ein h^{α} und ein h^{α_2} und mit Rücksicht auf (3) weiter die Beziehung

$$(4) \qquad \frac{M(a_1)}{M(a_2)} = \frac{h^{\alpha_1}}{h^{\alpha_2}} = \beta\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{z\,(a_1)}{z\,(a_2)},$$

wenn $z(a_1)$, $z(a_2)$ die Anzahlen der in a_1 bzw. in a_2 fallenden β-Ereignisse sind, $n = z(b)$. Es ist in bezug auf β höchstwahrscheinlich, daß das Verhältnis dieser Anzahlen bei wachsender Gesamtzahl der β-Fälle einem Grenzwert zustrebt, der das Größenverhältnis von a_1 und a_2 angibt. Dies ist eine Beziehung zwischen beliebigen und gegeneinander beliebig gelegenen Teilbereichen eines endlichen Gesamtbereiches b, als welchen man bei gegebenen a_1, a_2 z.B. den nehmen kann, der sie beide und keinen außerhalb beider liegenden Bereichsteil enthält.

Der Ansatz (2) ist noch nicht bewährt durch die Erfahrungen, welche die Eigenschaft physikalischer Gesetze rechtfertigen, daß sie keine Eigentümlichkeit „absoluter Raumzeitorte" anerkennen. Diese Erfahrungen begründen nur die Annahme, daß zu jeder Raumzeitstelle dieselbe Mannigfaltigkeit physikalisch eindeutiger Geschehensformen gehört, etwa zu jedem Punkt einer Fläche b dieselbe Mannigfaltigkeit mechanischer Fallformen für einen Tropfenfall, der zum „Auftreffen der Tropfenmitte in dem Punkte" führt. Das gibt noch kein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Getroffenwerdens einer Stelle von a aus der Voraussetzung, daß eine Stelle von b getroffen wird, und kein Maß für diese Bereiche.

Es gibt aber *Erfahrungen, die jenes Wahrscheinlichkeitsmaß und das Inhaltsmaß der Bereiche zugleich liefern.* Hierher gehören alle Erfahrungen, die zeigen, daß das Ausmessen eines Bereiches, genügende Sorgfalt vorausgesetzt, wenn es mit wechselnder Verfahrensweise wiederholt wird, zu übereinstimmenden Ergebnissen zu führen pflegt, d. h. *daß in bezug auf die Bereichsbedingungen die Näherung an einen*, freilich nicht genau anzugebenden *Grenzwert als das Größenverhältnis des Bereiches zum Einheitsbereich höchstwahrscheinlich ist.* Man könnte mittels einer Zählvorrichtung bestimmen, wieviele Tropfen bei einem Regen in gewissen Zeitabschnitten in einen und wieviele in einen anderen, daneben aufgestellten Regenmesser gefallen sind, und könnte die Näherung des Zahlenverhältnisses an jenes Verhältnis beobachten, das die in anderer Weise gemessenen Inhalte der Auffangflächen zeigen. Man kann die Zählung der Tropfen durch Wägungen oder Rauminhaltsmessungen der angesammelten Wassermengen ersetzen und würde, nach aller Erfahrung, dabei zu übereinstimmenden Ergebnissen gelangen.

Die Messung einer Länge, auf die es am Ende gewöhnlich ankommt, geschieht durch Zählung von Ereignissen, die unter festgesetzten Bedingungen βx in eine Strecke a_1 fallen, und die Vergleichung ihrer Zahl $z(a_1)$ mit der Zahl $z(a_0)$ der in eine Einheitsstrecke a_0 fallenden β-Fälle. Solche Ereignisse sind Tritte eines gleichmäßig Schreitenden beim Abschreiten von Weglängen, es sind Ereignisse der Wiederkehr einer Phase in Schwingungen einer bestimmten Lichtart beim Ausmessen durch Lichtwellenlängen. Bei Zeitmessungen sind es Pendelschläge, Ereignisse der Wiederkehr einer Phase in Schwingungen einer elastischen Feder, in Umdrehungen der Erde gegen den Fixsternhimmel. Die üblichste Längenmessung verwendet Deckungen des Maßstabendes mit Stellen der auszumessenden Strecke beim wiederholten Anlegen des Stabes. Dieses wird ersetzt durch das wiederholte Abtragen der Einheit längs eines Maßstabes, etwa der Millimeterlänge auf einen Meterstab mittels der Teilmaschine. Immer kommt es darauf an, daß nach Möglichkeit *alle belanghaften Bedingungen* dafür, daß ein Ereignis der Deckung in einen Bereich a_1 bzw. in a_0 falle, planhaft *gleichmäßig abgewandelt werden, außer den Bedingungen* $\alpha_1 x$ *bzw.* $\alpha_0 x$, *die durch die Ausdehnungen dieser Bereiche selbst gesetzt sind;* diese sucht man unbeeinflußt durch das Meßverfahren zu halten. Bei Anfertigung der Teilung auf dem Maßstab fielen, unter gleichmäßigem Abwandeln der belanghaften Nebenbedingungen beim Abtragen, genau 1000 Teilstriche nach dem Nullpunkt auf seine Länge a_0. Unter gleichen Bedingungen würden auf die Länge a_1

einer Körperkante, die wir messen, soviele Teilstriche fallen, als man beim Anlegen des Meterstabes abliest.

Wählt man die Meterlänge als *Einheit* und als *Gesamtbereich b* und *verdichtet* immer die Teilung, so ist zu sagen: in bezug auf die Bedingung βx, daß x ein Ereignis des Hineinfallens eines Teilungspunktes in die Länge b des Einheitsstabes sei, ist höchstwahrscheinlich, daß die Häufigkeit h_n^α der β-Fälle, die insbesondere in die Länge der angelegten kleineren Strecke a fallen, der α-Fälle unter n β-Fällen, höchstens mit Einrechung des ersten außer a fallenden, ein Wert kleinster Abweichung von einem Grenzwert h^α ist, dem sich die h_n^α bei wachsendem n, d. h. bei immer feinerer Teilung, nähern würden.

Die Messung führt zur Anwendung eines Wahrscheinlichkeitsansatzes der Form

$$(2) \qquad (Eh^\alpha)\,(n)\,\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_n^\alpha - h^\alpha\right| \leqq \frac{1}{2n}\right).$$

Sie ist eine Induktion, deren Ergebnis, das ja nie die Angabe eines eindeutig bestimmten Grenzwertes ist, besser ausgedrückt wird durch

$$(2') \qquad (s)\,\beta\mathfrak{H}\left(\left|h_{m+s}^\alpha - h_m^\alpha\right| \leqq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m+s)}\right),$$

wo h_m^α eine beobachtete Häufigkeit ist. Das ist der zuletzt abgelesene Näherungswert für die Maßzahl des Bereiches a in m-ten Teilen der Maßeinheit b.

Beim üblichen Verfahren wird eine Teilung durch Unterteilen verdichtet; man geht von einer Anzahl m zu Anzahlen der Form $k \cdot m$ weiter. Auch wird gewöhnlich angenommen, daß ein Näherungswert durch Abrunden „nach der richtigen Seite“ und bei Unentscheidbarkeit, wenn das Ende der Meßstrecke a in der Mitte zwischen zwei Teilstrichen zu liegen scheint, immer durch Abrunden nach oben gebildet ist. Unter dieser Voraussetzung, die zu βx hinzukommend ein $\beta' x$ als allgemeine Bedingung ergibt, gilt der verschärfte Ansatz:

$$(5) \qquad (k)\,\beta'\mathfrak{H}\left(\left|h_{k\cdot m}^\alpha - h_m^\alpha\right| \leqq \frac{1}{2m}\right).$$

Man kann, mit Rücksicht auf die zu messende Größe und die Beschaffenheit der Meßmittel, die Induktion vorsichtiger fassen und ihr den Sinn der Hypothese erteilen, es gebe eine Schranke r für die Zahlen k, bis zu welcher mindestens die Messung sich verfeinern lasse, ohne zu widerstreitenden Ergebnissen zu führen:

$$(6) \qquad (Er)\,(k)\left\{(k \leqq r) > \beta' \mathfrak{H}\left(\left|h^{\alpha}_{k \cdot m} - h^{\alpha}_{m}\right| \leqq \frac{1}{2m}\right)\right\}.$$

In der großen Klammer steht der Ausdruck der Implikation: wenn $k \leqq r$, so ist in bezug auf $\beta' x$ höchstwahrscheinlich .... Eine Ablesung habe bei Abrundung nach oben oder „genau" 32 cm, d. h. $h^{\alpha}_{100} = 0.32$, als ersten Näherungswert ergeben. Läßt man nur noch die Millimeterteilung und in bezug auf sie eine Noniusablesung als verläßlich zu, so hat man $r = 100$, und es ist β'-höchstwahrscheinlich, daß die letzten Näherungswerte mindestens 315.0 mm bzw. $h^{\alpha}_{10\,000} = 0.3150$ und höchstens den früheren gleich sind. In bezug auf β' ist bis zu „physischer Gewißheit" wahrscheinlicher, daß ein späterer Näherungswert in dem in (6) angegebenen Intervalle liegt, als daß er, gleichviel wo, im gesamten übrigen Bereiche möglicher Werte liege. Vgl. 3, § 3.

Folgerungen und Zusätze

1. Bereichsmessung beruht auf der Annahme, es gebe eine bestimmte, in bezug auf die Bedingung βx, ein Ereignis falle in den Bereich b, höchstwahrscheinliche Form der Häufigkeitsverteilung der Ereignisse dieser Art über die Teilbereiche a_1, a_2, ... von b. Diese Verteilung *zu erwarten*, ist umso besser gerechtfertigt, je mehr die belanghaften Nebenbedingungen für die β-Fälle, außer den Bereichsverhältnissen, der *gleichmäßigen* Abwandlung im planhaften Abschreiten des Gesamtbereiches b angenähert sind: mit gleicher Näherung sind dann die Bereichsverhältnisse für die Verteilung der Ereignisse, die in den Bereich fallen, *allein maßgebend*. Diese Art von Verteilung wird eine *Gleichverteilung* genannt. Daß sie unter günstigen Umständen auch für die Anschauung den Eindruck der Gleichmäßigkeit erregt, war wohl Anlaß zur Bildung des Begriffes, macht aber nicht seinen Inhalt aus. Das Ausmessen eines Bereiches ist ein Beobachten solcher Gleichverteilung, angestellt, um eine induktive Bestimmung seines Größenverhältnisses zur Bereichseinheit zu begründen. Die Induktion verwendet statt „zufälliger" Ereignisse ausgezeichnete Fälle, nämlich Deckungen von

Teilungspunkten „gleichen Abstandes". Die Gleichabständigkeit ist durch frühere sorgfältige Beobachtungen von wesentlich gleicher Art, verbunden mit der Weise der Herstellung der Meßmittel, schon induktiv gesichert. In der Teilung *vertritt* jeder Teilungspunkt, vermöge der hergestellten Ordnung, die Menge der Fälle, die bei der β-höchstwahrscheinlichen Verteilung von Ereignissen über die Länge des Maßstabes auf die durch ihn begrenzte Anfangsstrecke entfallen würde: *er ist ein kennzeichnender Vertreter dieser Menge.* Darum ist die Messung, die auf Auszählung so ausgezeichneter Fälle der Deckung beruht, eine *abgekürzte Induktion.*

2. Der Grundansatz (2) oder (2′) nimmt keine Rücksicht auf Meßfehler. Er unterscheidet nicht zwischen richtiger und fehlerhafter Beobachtung, denn er drückt nur aus, was in bezug auf die Bedingung βx, daß x ein Ereignis sei, das in den Gesamtbereich b fällt, höchstwahrscheinlich ist, und gilt für zufällig in den Bereich geworfene Ereignisse ebenso wie für die planmäßig herbeigeführten beim Messen. Die Ansätze der Fehlerwahrscheinlichkeit sollen hier außer Betracht bleiben.

3. Beispiele rein „*geometrischer Wahrscheinlichkeit*" zeigen, daß in bezug auf dieselbe Bedingung βx für dasselbe αx sich ungleiche „Wahrscheinlichkeiten" ergeben, je nach der Art der Inhaltsmessung der verglichenen Bereiche b, a, die bloße Formenmannigfaltigkeiten sind. Unter rein geometrischen Voraussetzungen ist jeder in sich widerspruchsfreie Ansatz gleich gut. Es fehlt die Entscheidung zwischen ihnen, und sie liefern *keine Wahrscheinlichkeiten,* sondern bloße Beziehungen zwischen Formenmengen, die aus freien Annahmen folgen, weil sie ohne Rücksicht auf die Wirklichkeit und nicht aus Erfahrungen gewonnen sind.

4. Ein Inhaltsmaß für Bereiche der Wirklichkeit ist erst aus beobachteten Häufigkeitsverteilungen von Fällen zu gewinnen. Auch die Annahme gleichen Inhaltsmaßes für Formenmannigfaltigkeiten, die nicht selbst Raumzeitbereiche, aber solchen gesetzmäßig zugeordnet sind, in dem theoretischen Würfelansatz und ähnlichen Beispielen ist durch anderwärts gewonnene Erfahrungen über Häufigkeitsverteilungen wirklicher Fälle begründet. Will man einen solchen Ansatz bewähren, so sorgt man für zufällige Abwandlung der belanghaften Nebenbedingungen, z. B. beim Würfeln, und erreicht durch solches Abtasten des Gesamtbe-

reiches in vielen Versuchen eine genäherte Gleichverteilung, statt daß man, wie beim Messen, jene Bedingungen in wenigen Versuchen, planmäßig abwandelte und den Gesamtbereich so gleichmäßig durchschritte. Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Verfahrensweisen der Induktion [22].

[22] Die neueren Häufigkeitslehren betonen die induktive Natur aller Wahrscheinlichkeitsansätze, gehen aber, soviel mir bekannt ist, auf den induktiven Vorgang der Messung und auf die hier behandelten Fragen, die sich an die Begriffe von Ausdehnung und Bereich knüpfen, nicht ein.

5. DIE FORM PHYSIKALISCHER GESETZE

Das Trägheitsgesetz der klassischen Physik werde als Beispiel betrachtet. Es ist belanglos, daß es sich bei Newton auf einen absoluten Raum bezieht; es ist gleichgiltig, ob man an dem Gesetz festhält oder nicht; nur auf seine Form kommt es hier an. Die gewöhnliche Fassung lautet: Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, so behält er seine Geschwindigkeit nach Richtung und Größe bei. Die Naturgesetze sind nach der herrschenden Meinung generelle Implikationen. Dazu ist zunächst in bezug auf das Beispiel zu bemerken: 1. Der Vordersatz des angeführten Wenn-So-Satzes trifft in aller Erfahrung nie zu; der Nachsatz wird nie bestätigt. 2. Es sind nicht alle Kraftwirkungen auszuschließen, sondern genau die, die eine Änderung der Geschwindigkeit des Körpers herbeiführen. 3. Schaltet man dabei den Begriff der Kraft aus und verwendet nur Begriffe beobachtbarer Erscheinungen, so ergibt sich die Tautologie: Wenn ein Körper seine Geschwindigkeit nicht ändert, so behält er sie bei.

Dies ist nicht die Meinung des Satzes. Sie ist deutlicher an der Newtonschen Fassung zu erkennen: *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.* Der Satz stellt fest: 1. Es gibt einen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung eines Körpers; 2. es gibt (äußere) Kräfte, die den Körper zwingen können, diesen Zustand zu ändern; 3. der Körper weicht von ihm nur soweit ab, als er durch Kräfte dazu gezwungen wird, sonst beharrt er in dem Zustande. Der gemeinte Zustand, der keine Dauer haben muß, ist die Geschwindigkeit v des Körpers gegen ein beliebiges physisches Bezugssystem B zur Zeit t_0. Soweit sie für das Verhalten des Körpers bestimmend ist, würde er in jedem beliebigen Zeitabschnitt $t—t_0$ einen Weg $v\,(x—x_0)$ zurücklegen, wenn x die in die Richtung von v fallende Koordinate des punkthaft gedachten oder durch einen Punkt vertretenen Körpers ist. Damit ist, wie *vorläufig* gesagt werden mag, eine Eigentümlichkeit der Körper festgestellt: in jedem Zeitpunkt t_0 eine bestimmte Geschwindigkeit v zu haben, d. h. sich so zu bewegen, daß eine Bahn durchlaufen wird, die durch eine stetige und differenzierbare Funktion der Zeit darstellbar ist. Diese „Eigenschaft der Körper" bedeutet nicht gleichförmige Bewegung, doch „begünstigt" sie jeweils eine ganz bestimmte gleichförmige Bewegung vor jeder anderen, mit gleichem Grade der Bestimmtheit anzugebenden Bewegungsform. Das heißt, ohne unerlaubte Vermenschlichungen ausgedrückt:

Es gibt eine Bedingung βK, dadurch bestimmt, daß für jeden Körper K und jedes physische Bezugssystem B zu jedem Zeitpunkt t_0 und der zugehörigen Raumstelle x_0 eine Zahl v besteht, so daß für jede beliebige Zeitkoordinate t und die zugehörige Raumkoordinate x gilt: in bezug auf βK ist höchstwahrscheinlich die Beziehung

$$x - x_0 = v(t - t_0).$$

Der Beharrungssatz ist ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsansatz, der, mit einer ohne weiteres verständlichen Vereinfachung der Klammerzeichen, so angeschrieben werden kann:

$$(1) \quad (E\beta)\,(K, B, t_0)\,(Ex_0, v)\,(t)\,(Ex)\;\beta\mathfrak{H}\;\{x - x_0 = v\,(t - t_0)\}.$$

Dieser *reine Beharrungssatz* ist eine Teilaussage des Newtonschen Satzes; er enthält nicht wie dieser die Feststellung, daß es Kräfte gibt, und daß Kräfte erforderlich sind, den Bewegungszustand des Körpers, der seine Geschwindigkeit ist, zu ändern. Der Satz (1) setzt keinen absoluten Raum und keine absolute Zeit voraus; er verlangt auch nicht die Festlegung eines Bezugssystems besonderer Art, eines sogenannten Inertialsystems, sondern gilt bei beliebiger Wahl des Systems. (Seine Anschreibung ist darin unvollkommen, daß die gebundenen Veränderlichen K, B die in den Klammerzeichen vorkommen, im Hauptausdruck, bei den t_0, t, x_0, x, v, die auf sie bezogen sind, nicht erscheinen.) Er sagt nur als eine Eigenschaft der Körper aus, daß ein Körper in jedem Zeitpunkt gegen jedes physische Bezugssystem eine bestimmte Geschwindigkeit hat, und was in bezug auf sie höchstwahrscheinlich ist.

Für die *Bewährung* des Satzes oder für seine induktive Gewinnung sind Umstände anzunehmen und aufzusuchen, die eine gute Näherung des zu beobachtenden Verhaltens an das in bezug auf die Beharrung β höchstwahrscheinliche erlauben; d. h. es sind jene

Nebenbedingungen nach Möglichkeit auszuschließen, die zu βK hinzukommend, einen festen Bedingungsinbegriff $\beta' K$ ergeben würden, in bezug auf welchen erfahrungsgemäß ein Geschehen höchstwahrscheinlich wäre, das von dem β-höchstwahrscheinlichen deutlich abweicht. Von hier aus gewinnen Begriff und Forderung eines Inertialsystems erst ihren Sinn, ebenso die Voraussetzung der Kräftefreiheit, die in der üblichen Fassung des Beharrungsgesetzes ohne angebbare Bedeutung bleibt, weil der Begriff der geschwindigkeitsändernden Kraft den Beharrungssatz voraussetzt.

Die *Anwendung* des allgemeinen Ansatzes (1) auf den Fall eines gegebenen Körpers (Massenpunktes) in gegebenem Bezugssystem zu gegebener Zeit t_0 liefert die besondere Annahme: Es gibt eine zu t_0 gehörende Koordinate x_0 des Körpers und eine Geschwindigkeit v in Richtung dieser, so daß zu jedem t ein x gehört, für welches die Bedingung

$$\left|\frac{x-x_0}{t-t_0}-v\right| \leqq \delta$$

für ein beliebig kleines positives δ immer erfüllt ist, wenn $t-t_0$ nicht größer als eine entsprechend zu wählende positive Zahl ϑ ist;

$$(2)\ (Ex_0, v)\,(t)\,(Ex)\,\beta\mathfrak{H}\left\{(\delta)\,(E\vartheta)\left[(\delta>0)\wedge(\vartheta>0)\wedge(t-t_0\leqq\vartheta)\right.\right.$$
$$\left.\left.\supset\left(\left|\frac{x-x_0}{t-t_0}-v\right|\leqq\delta\right)\right]\right\}.$$

Mit (2) ist gleichbedeutend

$$(2')\ (Ex_0, v)\,(t)\,(Ex)\,(\delta)\,(E\vartheta)\left\{[\beta\wedge(\delta>0)\wedge(\vartheta>0)\wedge(t-t_0\leqq\vartheta)]\,\mathfrak{H}\right.$$
$$\left.\left(\left|\frac{x-x_0}{t-t_0}-v\right|\leqq\delta\right)\right\}.$$

Dieser Ansatz gestattet eine Prüfung durch das Feststellen von Bewährungs- und Unbewährungsfällen, wobei man eine Umformung nach Art von (2') § 4, die nur nicht ganz so einfach sein wird, verwendet. So könnte man etwa an einer aufgezeichneten Weg-Zeit-Kurve die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 näherungsweise ermitteln.

Das Newtonsche Trägheitsgesetz enthält, wie zu bemerken war, schon die Annahme von Kräften, die Beschleunigungen bewirken.

Sie läßt sich, in Verbindung mit dem reinen Beharrungsgesetz, in folgendem *Kraft-Beschleunigungs-Satz* aussprechen:

Es gibt eine Bedingung γK, dadurch bestimmt, daß für einen Körper K und ein beliebiges Bezugssystem B zu jeder Zeit t_0 außer einer Raumkoordinate x_0 und einer Geschwindigkeit v eine Zahl a angebbar ist, derart, daß für jede Zeit t in bezug auf $\beta K \wedge \gamma K$ höchstwahrscheinlich ist die Beziehung

$$x - x_0 = v(t - t_0) + a\,(t - t_0)^2.$$

Das gibt, unter Voraussetzung der Erklärung (1) für βK, den Ansatz [23]

$$(3)\quad (E\gamma)\,(K, B, t_0)\,(Ex_0, v, a)\,(t)\,(Ex)\colon (\beta \wedge \gamma)\,\mathfrak{H}\,\{x - x_0 = v\,(t - t_0) + a\,(t - t_0)^2\}.$$

Die so erklärte Bedingung γK ist gemeint, wenn man sagt, der Körper K stehe zur Zeit t_0 unter dem Einfluß einer Kraft in Richtung seiner augenblicklichen Geschwindigkeit v. Da βK im betrachteten Bereiche immer gilt, ist γ gleichbedeutend mit $\beta \wedge \gamma$. Der Ansatz (3) kann, ähnlich wie (2) zu (2′) und weiter wie (2) § 4 zu (2′) § 4 umgeformt wurde, in eine Gestalt gebracht werden, die den Vorgang *näherungsmäßiger Ermittlung* von a vorzeichnet.

Folgerungen und Zusätze

1. Allgemeine physikalische Sätze sind nicht generelle Implikationen zwischen Erscheinungen.

2. Der Versuch, die implikative Fassung eines allgemeinen physikalischen Satzes zu erzwingen, führt, wenn man nur beobachtbare Ereignisse heranzieht, zu falschen oder zu tautologischen Aussagen (Wenn ein Massenpunkt zur Zeit t_0 in x_0 war, so wird er zur Zeit t in dem so und so bestimmten Orte x sein, bzw. so wird er zur Zeit t in x sein, wenn er sich nicht anders verhält).

3. Nicht-tautologische und zugleich näherungsmäßig bewährbare allgemeine Wirklichkeitsaussagen erhält man nur, wenn man

[23] Der Klammerausdruck unmittelbar vor dem „$\mathfrak{H}$“, der die Bedingung für die Höchstwahrscheinlichkeit bedeutet, ist der Deutlichkeit wegen von den voranstehenden „Allzeichen“ und „Seinszeichen“ durch den Doppelpunkt geschieden.

Begriffe verwendet, die weder rein logisch-mathematisch sind, noch durchwegs beobachtbare Ereignisse meinen; so Trägheit, Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung, gemeint ist die Beschleunigung, die ein Körper zu gegebener Zeit erhält oder erleidet, ohne daß damit ausgemacht wäre, welchen Ort er nach einer beliebig klein anzunehmenden endlichen Zeit erreicht haben wird, weil er immer auch anderen Einflüssen unterliegen kann. Die physikalischen Begriffe sind alle von dieser Art.

4. Ein physikalisches Gesetz ist ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsansatz der Form

$$(E\beta)\ \beta\mathfrak{H}\ (S)$$

wo S eine Bestimmung ist, eine Satzfunktion, meist von mehreren Veränderlichen, Form des „reinen Falles", den das Gesetz als „idealen Grenzfall" eines Geschehens aufstellt.

5. Voraussetzung guter Näherung eines Geschehens an die Form des in Bezug auf die Bedingung β höchstwahrscheinlichen reinen Falles ist, daß die Nebenbedingungen, soweit sie für das betrachtete Geschehen von Belang sein würden, nach Möglichkeit ausgeschaltet, d. h. einflußlos gemacht *oder* abgewandelt werden. Es ist berechtigt, eine umso bessere Näherung an den reinen Fall *zu erwarten*, je mehr es gelingt, im gegebenen Falle u, βu zur allein festgehaltenen von allen merklich maßgebenden Bedingungen des Ausganges zu machen. Die Voraussetzung, daß dies in hinreichendem Maße geschehe, bedeutet, es solle keine Bedingung zutreffen, die mit βu zusammen ein von S verschiedenes S' höchstwahrscheinlich machen würde. Sie setzt das Gesetz, als Ansatz der Form $(E\beta)\,\beta\mathfrak{H}\,(S)$, als gegeben voraus und kann darum nicht, wie die Wenn-So-Fassung will, ein sinnbestimmendes Glied in ihm sein (vgl. 5 § 3).

6. Der „reine Fall" S kann eine allgemeine Implikationsbeziehung zwischen Ereignissen des Auftretens physikalischer Größen (nicht Erscheinungen oder Wahrnehmungen) sein. Dann gilt, als ein eigentlich wahrscheinlichkeitstheoretischer Satz, neben (I) § 2, (II) § 3,

$$\text{(III)} \qquad \beta\mathfrak{H}\,(S \supset P) \longleftrightarrow \{(\beta \wedge S)\mathfrak{H}(P)\}.$$

Auch können Klammerzeichen, die im Ausdruck des reinen Falles stehen, herausgenommen und vor das „$\beta\mathfrak{H}$" gesetzt werden, und umgekehrt [24]. Eine solche Umformung ist zwischen (2) und (2′) vorgenommen worden. Ist in einem Falle von β die Voraussetzung S erfüllt, so ist die *Anwendung* von $(\beta \wedge S)\mathfrak{H}(P)$ auf den Fall begründet; aber dieser Schluß hat zum Ergebnis eine Höchstwahrscheinlichkeit in bezug auf $\beta \wedge S$ und nicht die Behauptung, noch auch unmittelbar die Vermutung oder Erwartung eines Ereignisses der Art P.

7. Ein physikalisches Gesetz stellt eine Bedingung des Geschehens fest und kennzeichnet sie durch Angabe der in bezug auf sie höchstwahrscheinlichen Geschehensform. Es macht keinen wesentlichen Unterschied, ob das Gesetz den reinen Fall eines sogenannten elementaren Geschehens aufstellt (das Verhalten eines Massenpunktes, des Zustandes in einem Raumpunkt) oder ob es, als ein statistisches Gesetz, den Grenzfall eines durchschnittlichen Geschehens an einer großen Menge von Elementen ausspricht. Den Sinn eines Wahrscheinlichkeitsansatzes hat es immer und unabhängig von der Beziehung auf solche große Mengen. Die Menge, die es auch als „Elementargesetz" immer in Betracht zieht, ist *die Menge gleich genau bestimmter Geschehensformen*, unter denen es eine als in bezug auf die aufgestellte Bedingung höchstwahrscheinlich heraushebt. Darin, daß der reine Fall, den das Gesetz aufstellt, eine Form scharfer Bestimmung ist, besteht die „Exaktheit" des physikalischen Gesetzes.

---

[24] Steht, wie oben, ein Klammerausdruck unmittelbar vor dem „$\mathfrak{H}$", so ist er natürlich nicht als „Allzeichen", sondern als Bedingung zu lesen.

6. WIRKLICHKEITSBEGRIFFE

1. Eine *Eigenschaft* der Wirklichkeit ist festgelegt durch ein Verhaltensgesetz und zwar als Bedingung, in bezug auf die eine bestimmte Art des Geschehens höchstwahrscheinlich ist. So die Eigenschaft Ausdehnung eines raumzeitlichen Bereiches, Trägheit oder Beharrung der Körper.

2. Feststellungen von Eigenschaften in physikalischen Gesetzen sind Grundlage zur Aufstellung *physikalischer Maßbegriffe.* Auf dem Begriff der Ausdehnung, die sich im Sinne der Erklärungen in § 4 als „Fassungsvermögen eines Bereiches für Ereignisse" kennzeichnen läßt, beruht das Inhaltsmaß für einen Bereich, das eine, in bezug auf diese Eigenschaft höchstwahrscheinliche, relative Häufigkeit ist. Auf den Gesetzen der Beharrung und Beschleunigung beruhen die Maßbegriffe der Geschwindigkeit, bzw. der Kraft und der trägen Masse. Das Größenverhältnis zwischen Kräften wird durch das Verhältnis der in bezug auf sie höchstwahrscheinlichen Beschleunigungen desselben Körpers, das Verhältnis zweier träger Massen durch das umgekehrte Verhältnis ihrer in bezug auf die gleiche Kraft höchstwahrscheinlichen Beschleunigungen erklärt. Kraft ist weder „Masse mal Beschleunigung" noch „Ursache der Bewegungsänderung", sondern die Kraft mit dem Maße mb ist jene Bedingung, in bezug auf welche für die Masse m eine Bewegung mit der Beschleunigung b in bestimmter Richtung höchstwahrscheinlich ist.

Der Begriff der Beschleunigung führt zuletzt auf die Begriffe raumzeitlicher Verhältnisse und auf die Grenzwerte von relativen Häufigkeiten zurück, die in bezug auf jene höchstwahrscheinlich sind (§ 4 B). Auf solche Häufigkeitsverhältnisse gründen sich alle physikalischen Maßbestimmungen; in ihnen ist nicht Maß auf Zahl zurückgeführt, aber *Maßverhältnis auf bereichsmäßig höchstwahrscheinliches Zahlverhältnis von Fällen.*

3. Je mehr ein beobachtetes Geschehen sich dem *reinen Fall* der Gleichverteilung, der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, der

gleichförmig beschleunigten Bewegung nähert, desto mehr nähert sich der betrachtete Bereich dem idealen Grenzfall des von Einflüssen freien neutralen Bereiches, des kräftefreien Raumes, des homogenen Kraftfeldes. Diese Begriffe setzen die der Bedingungen Ausdehnung, Beharrung, Kraft und der zugehörigen reinen Fälle beziehungsweise voraus.

Die Ermittlung der physikalischen Größen Geschwindigkeit, Beschleunigung, und weiterhin Kraft, Masse, ist nicht daran gebunden, daß ein reiner Fall mit bestmöglicher Annäherung durch eine gewisse Zeit verwirklicht sei. Die Einführung der Begriffe der Differentialrechnung in die klassische Physik erlaubt es, auf reine Fälle zu verzichten und statt ihrer andere Grenzfälle begrifflich zu fassen und in Näherung aufzusuchen, die von reinen Bedingungen grundsätzlich unabhängig sind. Darum bedarf auch der Beharrungssatz zu seiner Bewährung keines Falles einer wirklichen gleichförmig geradlinigen Bewegung; jeder Fall, in dem ein Geschwindigkeitsansatz sich bewährt, ist ein Bewährungsfall für den Beharrungssatz. Die Höchstwahrscheinlichkeit der Gleichverteilung von Ereignissen über einen Bereich in bezug auf die Ausdehnung oder die Bereichsverhältnisse bleibt bestehen und „würde sich im Infinitesimalen bewähren“ [25], auch wenn andere Bedingungen eine bestimmte Ungleichverteilung höchstwahrscheinlich machen: die auf alle diese Bedingungen bezogene Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis, das einen Punkt eines Raumzeit-Bereiches trifft, die Umgebung $dx. dy. dz. dt$ der Stelle $xyzt$ treffe, ist bei gegebener Verteilungsfunktion $f(x, y, z, t)$ ausgedrückt durch $f(x, y, z, t). dx. dy. dz. dt$, worin die Bedeutung der bloßen Ausdehnung noch ersichtlich ist.

4. *Der Begriff der Bedingung*, in bezug auf welche eine bestimmte Art des Geschehens höchstwahrscheinlich ist, kann, wie (5 § 5) zu sehen war, nicht durch ein Verhaltensgesetz von der Form einer generellen Implikation ersetzt werden. Man könnte versuchen, ihn in anderer Weise zu ersetzen, und zwar durch folgende Überlegung. Ist die Bedingung β erklärt durch $\beta\mathfrak{H}(S)$, so bedeute dieser Ansatz, daß in der Menge der β-Fälle eine Häufigkeitsverteilung bestehe, derart, daß die Geschehensform S die Stelle des (einzigen) Maxi-

[25] Wenn es Erfüllung scharfer Formen gäbe (§ 7ff.).

mums der sonst unbestimmt bleibenden Verteilungsfunktion ist. Diese Verteilung ist zwar auch nicht beobachtbar, aber Näherungen an sie werden in einer Folge herausgegriffener Fälle beobachtet und begründen den Ansatz.

Aber *„die Menge der β-Fälle" ist kein faßbares Gebilde.* Wenn ein Würfel erprobt und ein Ansatz für die Wahrscheinlichkeit des Einserwurfes in bezug auf die Bedingung βx, daß x ein Wurf mit diesem Würfel ist, gewonnen wird, so sollte diese Bedingung etwa bedeuten, daß x ein Element der Menge der möglichen Würfe mit diesem Würfel sei. Das ist nicht die Menge der mechanisch eindeutigen *Formen*, die es für den Wurf mit dem gegebenen Körper gibt; es kommt für den Ansatz nicht auf sie an, sondern auf gewisse *Belegungen* dieser Formenmenge und ihre Verteilung. Doch machen nicht wirkliche Fälle diese Belegungen aus, sondern „mögliche" in der Verteilung ihres „potentiellen" Auftretens, das sind weder Fälle noch Fallformen. *Mit den endlich vielen Ausnahmen wirklicher Versuchsfälle sind die Elemente der fraglichen Menge alle gänzlich unbestimmbar*, es läßt sich nicht angeben, was „Element dieser Menge" bedeute. Es gibt jeweils eine Menge, im Sinne einer aufweisbaren Vielheit wirklicher Würfe mit dem gegebenen Würfel, aber von ihr ist nicht die Rede, und eine *Klasse* oder Menge im logischen Sinne wird durch den Begriff „Wurf mit diesem Würfel" *nicht bestimmt.* Schreibt man „$x \varepsilon b$" für „x ist ein Wurf mit diesem Würfel", so kann „b" nur als Zeichen für etwas genommen werden, was eine *Art*, im ursprünglichen Sinne dieses Wortes, genannt werden kann. Eine Art ist nicht die Vielheit ihrer wirklichen Vertreter, diese sind ihr gegenüber etwas Zufälliges und meist nur in geringer Auswahl beobachtet. Eine Art ist aber auch von einer Klasse im logischen Sinn wesentlich verschieden: von jedem x kann entschieden werden, ob es einer Klasse, etwa der der natürlichen Zahlen, angehört; die entsprechende Frage ist gegenüber einer Art, sei es eine Tier- oder Pflanzenart, eine Dingart wie Haus oder Hammer, eine Fallart wie Kauf oder Raub, nicht einmal für jedes wirklich auftretende individuelle x entscheidbar. Ein Artbegriff hat keinen angebbaren „logischen Umfang", er legt nicht wie ein logischer Begriff eine Mannigfaltigkeit von Formen fest und hat einen nur näherungsmäßig bestimmten Anwendungsbereich oder „empirischen Umfang". *Eine Art ist ein Bedingungsinbegriff.* — Es gibt auch nicht, als Teilmenge der „Menge aller β-Fälle", eine unendliche Folge etwa von Würfen mit dem gegebenen Würfel oder von anderen Ereignissen, die unter einer Bedingung βx stehen (vgl. 3 § 2).

5. Der Begriff einer Bedingung, in bezug auf welche ein Geschehen bestimmter Art höchstwahrscheinlich ist, ist das, was man einen *Fähigkeits-* oder *Dispositionsbegriff* nennt; nur daß gewöhnlich mit diesem Namen die Meinung verbunden wird, das Geschehen im Sinne der Disposition lasse sich durch eine Gesetzmäßigkeit von der Form einer generellen Implikation festlegen [26]. Viele Begriffe unseres Wirklichkeitsdenkens sind sogleich als Fähigkeitsbegriffe zu erkennen: Festigkeit, Elastizität, Bildsamkeit, jede Art von Kapazität, von Leitfähigkeit, Widerstand. Die sogenannten beschreibenden Naturwissenschaften, das praktische, das technische Denken, die Kulturwissenschaften arbeiten immer mit solchen Begriffen. Anlagen, Neigungen, Triebe spielen im biologischen und im psychologischen Bereich eine wesentliche Rolle. Diese Dispositionen sind, im Gegensatz zu vielen in der Physik betrachteten, nicht durch scharfe Formen höchstwahrscheinlichen Geschehens bestimmt, sondern durch je eine nicht fest abzugrenzende, nur allenfalls in Schranken einzuschließende Art des in bezug auf sie „*Normalen*".

6. Ein Fähigkeitsbegriff gilt als eine vorläufige Begriffsbildung; er müßte, meint man, in jedem Falle ersetzt werden durch Angabe oder Aufweisung eines beobachteten oder doch „beobachtbaren" Tatbestandes. Solche „Dispositionsgrundlagen" sucht man namentlich in sogenannten *Strukturen* [27], raumzeitlichen Anordnungen im Bau von Körpern bis herab zu den Feinstrukturen des Atombaues und im Nichtkörperhaften zur atomischen Struktur der Energie. Doch leistet die Erscheinung einer Struktur nichts zur Erklärung einer Fähigkeit, das Bild einer Gehirnstruktur nichts für die Erklärung der Festigkeit einer Erinnerung, einer Gewohnheit, einer Gesinnung, das Bild des Baues eines Bambusstabes, eines Röhrenknochens nichts für die Erklärung seiner mechanischen Festigkeit: nie ist die Fähigkeit auf ein unmittelbar Beobachtetes phänomenologisch zurückzuführen.

[26] Vgl. R. Carnap, Erkenntnis, Bd. 3 (1932/33), S. 114.

[27] Vgl. R. Carnap, a. a. O.

7. Eine Struktur, auf die eine Fähigkeit allenfalls *zurückgeführt* wird, ist nicht ein Erscheinungsbefund, sondern ist selbst eine Fähigkeit, d.i. eine *Bedingung*, in bezug auf welche eine bestimmte Art des Geschehens höchstwahrscheinlich ist. Man findet oder sucht die Bedingung, in bezug auf welche eine bestimmte Häufigkeitsverteilung der Ergebnisse beim Würfeln höchstwahrscheinlich ist, im Bau des Würfels, d.h. in seiner Gestalt und Massenverteilung. Die Gestalt, die gemeint ist, ist nicht ein gegebener Anblick und nichts, was in Erscheinen oder Wahrnehmung vollständig vorläge. Messende Beobachtungen am Würfel ergeben als seinen regelmäßigen Bau eine Bedingung, in bezug auf welche eine bestimmte Verteilung von Deckungsfällen nach Art der beobachteten höchstwahrscheinlich ist, die keine der sechs Hauptrichtungen im Körper vor einer anderen auszeichnet; diese Eigenschaft ist nach einer umfassenden Erfahrung zugleich Bedingung, in bezug auf welche eine gleichartige Verteilung von Fällen grob mechanischen Verhaltens des Körpers überhaupt und insbesondere in den Bewegungen beim Würfeln höchstwahrscheinlich ist. Darum ist dieses Verhalten auf jene Struktur *zurückgeführt*. Sie hat den Vorzug, durch eine *abgekürzte* Induktion feststellbar zu sein.

Gestalt kann in einfachen Fällen und wo es auf Maßbestimmungen nicht ankommt, schon durch wenige Beobachtungen und vielleicht mit einem Blick erkennbar sein. Aber auch der Begriff der *anschaulichen* Gestalt, z.B. eines Bildwerks, meint eine Bedingung, nämlich jene, in bezug auf welche eine gewisse Erscheinungsart, d.i. eine Mannigfaltigkeit von Erscheinungen, höchstwahrscheinlich ist; tritt dieser Befund nicht auf, so liegt es nicht an der Gestalt, sondern an „störenden" Nebenbedingungen der Wahrnehmung. Entsprechend sind andere anschauungshaltige Wirklichkeitsbegriffe zu verstehen, wie der der Eigenfarbe eines Körpers als der Farbe, die er „wirklich hat", der des Klanges, den eine Saite gibt. Ein solcher Begriff bestimmt eine Bedingung durch Erscheinungen des Normalbefundes, meint aber nicht Erscheinungen. Physikalische Begriffsbestimmungen schalten Normalbefunde wie Erscheinungen überhaupt nach Möglichkeit aus; nur für die *Anwendung* sind solche aufzusuchen, dazu helfen die Beobachtungsgeräte. Der Vorzug eines Normalbefundes besteht darin, daß in ihm die Bedingungen eines Geschehens klar und auf Grund von Erfahrungen, die schon die Wahrnehmung bestimmen, verhältnismäßig vielseitig erkannt werden. In diesem Sinne kann eine sogenannte Disposition durch Aufweisung eines beobachteten Tatbestandes erklärt sein.

8. Als beobachtetes *Ereignis* wird immer ein Fall verzeichnet, der als *allseitig bestimmter* gemeint ist, obwohl er nur einseitig wahrgenommen wurde. Das Ereignis hat immer die Bedeutung eines Vorganges, eines Zustandes , der Bedingung ist, in bezug auf die gewisse andere Ereignisse und insbesondere auch gewisse Erscheinungen, Wahrnehmungen — mögen sie auch nicht vorliegen — höchstwahrscheinlich sind. Das gilt auch von Geschehnissen seelischen Erlebens, wie sie die Psychologie betrachtet, auch sie ist keine bloße Phänomenologie. Die Geschehnisse sind nur bedeutsam vermöge ihrer Bedingungsnatur. Alle Wirklichkeitsbegriffe gehen auf Bedingungen.

9. Zwischen Bedingungen, nicht zwischen Erscheinungen und nicht zwischen raumzeitlich getrennten Ereignissen, gibt es generelle, nichttautologische Implikationen und Äquivalenzen wie: Wenn auf die Masse m die Kraft k wirkt, so erteilt sie ihr die Beschleunigung k/m in Richtung von k und umgekehrt. Dabei bedeutet das Erteilen oder Erhalten einer Beschleunigung ebenso wie das Wirken einer Kraft nicht einen sinnlichen Befund, sondern eine Bedingung, in bezug auf die ein bestimmtes Verhalten höchstwahrscheinlich ist, ohne daß vorausgesagt werden könnte, welches Verhalten eintreten wird.

10. Der Begriff der Bedingung wird nicht von dem Einwand getroffen, er meine eine *qualitas occulta.* Er muß von der Mißdeutung frei gehalten werden, als sei in der Bedingung eine Erscheinung gemeint, die nie gefunden wird, ein Befund, der nie vorliegt. Sie ist nichts dergleichen und ist in keiner Weise zu verdinglichen. Eine Bedingung ist *eindeutig festgelegt* durch die Form des Geschehens, das in bezug auf sie höchstwahrscheinlich ist. Sie ist umso besser *bekannt,* je genauer und vielseitiger erforscht ist, was unter wechselnden Nebenbedingungen, in bezug auf sie und diese zusammen, höchstwahrscheinlich ist. Durch solche Bestimmungen wird ein Bedingungsbegriff erst wertvoll, im Gegensatz zur *virtus dormitiva* des Opiums (die es übrigens hat, nur daß die Berufung auf sie nichts erklärt). Die Eigenschaften des Eisens sind uns so durchaus bekannt — wenn man es nicht zu genau nimmt — weil bekannt ist, was in bezug auf sie unter den mannigfachsten Umständen höchstwahrscheinlich ist. Mehr als ein Kennen solcher Art ist durch den Begriff der Bedingung nicht verlangt.

7. DIE ANNAHME DER BESTIMMTHEIT

1. Ein sogenanntes Naturgesetz ist weder eine Voraussage noch eine Anweisung zu Voraussagungen. Aber Naturgesetze können, zusammen mit der Feststellung eines vorliegenden Tatbestandes, eine Vermutung eines nicht beobachteten Tatbestandes oder Ereignisses begründen.

Die Feststellung des Zutreffens einer Bedingung $\beta_1 x$ erlaubt die Anwendung der β_1-höchstwahrscheinlichen Form S_1 auf einen Tatbestand, unabhängig von seinem Beobachtetsein, als eine *erste Näherung*. Die Feststellung einer hinzukommenden zutreffenden Bedingung $\beta_2 x$ liefert zusammen mit der ersten einen besser genäherten Ansatz: der in bezug auf $\beta_1 x \wedge \beta_2 x$ höchstwahrscheinlichen Form $S_{1,2}$ des Tatbestandes, usw. Die zusammengesetzte Form $S_{1,2}$ ist nicht aus den Formen S_1 und S_2 allein, sondern nur induktiv zu gewinnen, z.B. die Form der zusammengesetzten Bewegung aus den Komponenten im Sinne der Parallelogrammregel. Die Gestalten der Gesetze

$$\beta_1 \mathfrak{H}(S_1), \quad \beta_2 \mathfrak{H}(S_2), \quad (\beta_1 \wedge \beta_2)\mathfrak{H}(S_{1,2})$$

lassen den Sinn des Vorganges als einer *schrittweise genäherten Bestimmung* der Tatbestandsform klar erkennen; die implikative Fassung der Gesetze und ihrer Anwendung verdeckt ihn, setzt unerfüllte und einander widersprechende Annahmen: wenn der Körper *nur* die Beschleunigung a_1 erhielte, so ...; wenn er *nur* die Beschleunigung a_2 erhielte, so ...; wenn er nur a_1 und a_2 zugleich hätte, so ... Der Mangel dieser Fassungen ist, daß sie das verneinen, wovon jeweils nur abgesehen wird. Daß bei Zusammensetzung von Bedingungen in bezug auf die einzelne Bedingung immer dasselbe höchstwahrscheinlich bleibt, ist die Bedeutung des Unabhängigkeitssatzes der Mechanik. Im Sinne des Determinismus der klassischen Physik wäre die Näherung grundsätzlich vollendbar.

2. Der Determinismus der klassischen Physik ist durch einen bekannten Ausspruch von Laplace gekennzeichnet, dessen wesent-

lichen Sinn die folgende Formel L wiedergeben soll. Darin bedeuten die Klammerzeichen vor der Hauptklammer: Zu einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt t' gibt es immer einen Fall u' derart, daß für jeden Fall u (zu beliebiger Zeit) und jede Bestimmung P eine raumzeitliche Beziehung $Rw'w$ — zwischen Fällen oder für Fälle w', w — und eine Bestimmung P' angegeben werden kann, so daß gilt, was der Ausdruck in der Hauptklammer besagt. Nämlich daß aus $Rw'w \wedge P'w'$ entweder im Sinne einer generellen Implikation folgt Pw (das Zutreffen von P in w) oder im Sinne einer generellen Implikation folgt $\overline{Pw}$ (das Nichtzutreffen von P in w), und daß $Ru'u \wedge P'u'$ gilt. Daher wird entweder das Zutreffen des beliebig angenommenen P in u oder sein Nichtzutreffen gesetzmäßig aus einer Bestimmung P' von u' folgen: u wird durch u' in jeder Hinsicht P naturgesetzlich bestimmt sein. Dabei ist vorausgesetzt, was die Anschreibung nicht ausspricht: 1. daß alles Geschehen sich in Fällen (raumzeitlichen Ereignissen) vollzieht; 2. daß die generellen Implikationen der Form $Rw'w \wedge P'w' > Pw$ nicht tautologisch, daß sie Naturgesetze und nicht rein logisch-mathematische Sätze sind.

$$\text{L} \quad (t')\ (Eu')\ (u, P)\ (ER, P')\ \{[(w'w)\ (Rw'w \wedge P'w' > Pw) \\ \vee\ (w'w)\ (Rw'w \wedge P'w' > \overline{Pw})] \wedge Ru'u \wedge P'u'\}.$$

Als u' wäre mindestens die „Weltlage“, der entsprechend gekennzeichnete Gesamtzustand, zur Zeit t' anzusehen. Von ihr aus wäre jeder Fall u, zu jeder Zeit t, auf Grund der Naturgesetze voraus oder zurück zu berechnen.

Man kann der deterministischen Annahme auch die folgende Fassung (L′) geben:

$$\text{L}' \quad (u, P)\ (Eu', R, P')\ \{[(w'w)\ (Rw'w \wedge P'w' > Pw) \\ \vee\ (w'w)\ (Rw'w \wedge P'w' > \overline{Pw})] \wedge Ru'u \wedge P'u'\}.$$

Sie geht, statt von einer Ausgangslage u', von dem jeweils zu bestimmenden Falle u und der beliebig angenommenen Bestimmung P aus und sagt, daß es immer einen Fall u' und ein Gesetz gibt, derart, daß aus den Bestimmungen von u' auf Grund des Gesetzes das Zutreffen oder Nichtzutreffen von P in u sich entscheiden ließe.

Setzt man in L oder in L′ für $Rw'w$ insbesondere die Beziehung der Identität $Iw'w$, so ergibt sich als eine Folge

B $$(u, P)\ (Pu \vee \overline{Pu}).$$

Das ist die Annahme der Bestimmtheit im Sinne eines mindestens bloß tatsächlichen Bestimmtseins eines jeden Falles u hinsichtlich jedes Prädikates P. Soll L oder L′ über diese Bestimmtheit hinaus auch die naturgesetzliche oder kausale setzen, so muß ausdrücklich gefordert werden, daß die Beziehung $Rw'w$ die Identität $Iw'w$ nicht einschließe, d.h. daß es solche Beziehungen, im Sinne von L oder L′, auch außer der Identität gebe.

3. Es war zu sehen, daß die Naturgesetze nicht die Form einer streng geltenden allgemeinen Implikation zwischen beobachtbaren Bestimmungen an raumzeitlich, mindestens zeitlich, getrennten Ereignissen haben. Gesetze der Form

$$(E\beta)\ \beta\mathfrak{H}(P),$$

die allein bekannt sind, ergeben durch Zusammensetzung von Bedingungen immer wieder Gesetze derselben Form. Ist der Vorgang der Zusammensetzung in Anwendung auf einen Fall vollendbar, so führt er zuletzt auf einen Satz der Gestalt

(1) $$(E\Gamma)\ \{\Gamma\mathfrak{H}(Pu) \equiv Pu\}.$$

Er sagt aus: Es ist in bezug auf eine Bedingung Γ für den betrachteten Fall genau das höchstwahrscheinlich, was in ihm zutrifft. In jedem sorgfältig angestellten Versuch will man reine Bedingungen, d.h. einen Bedingungsinbegriff Γ herstellen, von dem aus wenigstens in bestimmten Hinsichten, d.h. für gewisse P, wenn auch nicht für alle, genau das höchstwahrscheinlich sei, was tatsächlich eintreten wird. Γ umfaßt dann neben positiv angegebenen Bedingungen immer die nur negativ zu fassende, daß Störungen ihnen gegenüber ausgeschlossen bleiben, was natürlich nie streng zutrifft. In einem allgemeinen Satz von der Art eines Integralgesetzes enthält Γ die Randbedingungen und jene negative Voraussetzung mit in sich. Die Bestimmtheitsannahme als allgemeine Voraussetzung fordert, daß es zu jedem Fall u und zu jeder Bestimmung P eine vollständige oder Gesamtbedingung Γ gibt (Annahme D):

D $$(u, P)\ (E\Gamma)\ \{\Gamma\mathfrak{H}(Pu) \equiv Pu\}.$$

Jeder Fall wäre dann naturgesetzlich, daher auch tatsächlich vollständig bestimmt.

8. UNSCHÄRFE

1. Die Formel B § 7

$$(u, P)\ (Pu \vee \overline{Pu})$$ [28]

gilt als ein logischer Satz. Sie ist es nur, wenn sie Begriffe von Fall oder Individuum *u* und Bestimmung oder Satzfunktion *P* voraussetzt, die sie zur *Tautologie* machen. Sonst ist sie, neben

$$(u, P)\ \overline{Pu \wedge \overline{Pu}}$$ [29]

Teil einer *Erklärung (Definition)* der Begriffe von Fall und Bestimmung im logischen Sinne, wie sie z.B. in der Mathematik gelten. Ob, was man Fälle des Geschehens nennt, und was man als Bestimmungen darauf anwendet, der Erklärung entspricht, ist eine Frage der Erfahrung. Ebenso, ob die Fälle der Wirklichkeit über die bloß tatsächliche Bestimmtheit hinaus durch nichttautologische generelle Implikationen, im Sinne von L oder L′, oder ob sie im Sinne von D § 7 *gesetzmäßig* eindeutig bestimmt sind.

2. Der Übergang von irgend einem Naturgesetz, das wir kennen, und von irgend einer Verbindung solcher Gesetze zu einem Satz der Form (1) § 7 ist, ebenso wie der zu einem streng implikativen, nichttautologischen Satz, der Fallbestimmungen zeitlich getrennter Ereignisse verknüpft, ein Übergang zu einem *Grenzfall.* Auch die Annahme B § 7 der mindestens bloß tatsächlichen (prädikativen) Bestimmtheit stellt einen Grenzfall als erreicht hin. Alles Geschehen bestünde ihr zufolge aus Grenzfällen. Der Grenzfall der vollständigen, daher auch scharfen Bestimmtheit ist von jeder unvollständigen oder unscharfen Bestimmung aus *unendlich fern.* Auf jede erreichte Dezimale einer Maßangabe folgen unendlich viele, die unbestimmt bleiben. Man übersieht das, wenn man sich „dem genauen Wert" schon nahe glaubt. Sein Erreichen zu erwarten,

---

[28] „Für jeden Fall *u* und für jede Bestimmung *P* gilt, daß *P* auf *u* zutrifft *oder* daß die Verneinung von *P* auf *u* zutrifft."

[29] „Für jeden Fall *u* und für jede Bestimmung *P* gilt: daß *P* auf *u* zutreffe *und* die Verneinung von *P* auf *u* zutreffe, gilt nicht."

ist durch keine Erfahrung gerechtfertigt; es gibt keinen Bewährungsfall für solche Erwartung. Das bedeutet nicht nur eine unüberwindbare Unvollkommenheit unserer Erkenntnis. Es bedeutet, *daß für die Annahme der vollständigen, scharfen Bestimmtheit nicht die geringste erfahrungsmäßige Berechtigung besteht*[30].

3. Die Aufgabe, eine scharfe Fall- oder Dingbestimmung zu treffen, ist im Gegensatz zu der Aufgabe, den Grenzwert einer konvergenten Reihe zu ermitteln, *nicht scharf gefaßt*; sie definiert nicht, wie die mathematische, das, was gesucht wird. Soll „die Länge dieser Kante" in genauen Teilen des Meters gemessen werden, sollen die Menschen in diesem Saale oder die Pendelschläge in der nächsten Minute gezählt werden, so ist nicht bestimmt festlegbar, was gesucht werden soll. Eine Zahl, die als Ergebnis auftritt, ist freilich eine angewandte scharfe Form, aber das Gezählte bleibt unvollständig bestimmt (auch die Maßeinheiten sind unscharf), und die Zahlangabe trifft keinen eindeutigen Sachverhalt.

4. Eine β-Höchstwahrscheinlichkeit einer scharfen Geschehensform S bedeutet nur, daß in bezug auf eine Bedingung β eine beliebig enge, erreichbare Näherung an Erfüllung von S wahrscheinlicher ist als jede nicht minder enge Näherung an ein beliebig angenommenes gleichgeordnetes S'. *Näherung der Wirklichkeit an eine scharfe Form ist nicht Erfüllung einer anderen scharfen Form*; darum ist der Grad einer Näherung in aller Wirklichkeit nicht genau angebbar. Der übliche Ansatz, in bezug auf die Voraussetzung, daß irgend ein Punkt x eines endlichen Bereiches b getroffen werde, sei die Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines bestimmt vorgegebenen Punktes x_1 von b gleich null, macht eine Voraussetzung, die unerfüllt bleibt, wenn nicht unscharfe Stellen für Punkte genommen werden. Er ist zu ersetzen durch die Feststellung: Ist irgend eine Näherung an eine scharfe Form erreicht, so ist in bezug auf die Bereichsverhältnisse die genaue Erfüllung der Form *nullwahrscheinlich*.

5. Gegenüber diesen grundsätzlichen Feststellungen verneinender Art ist in den Unschärfebeziehungen der Quantenmechanik eine größenmäßige Beschränkung von Genauigkeiten angegeben und eine Ungenauigkeit durch positive Erfahrungen naturgesetz-

[30] Ein Aufsatz von E. Schrödinger stellt „die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen" fest. Die Naturwissenschaften 22, 1934, S. 518.

lich begründet. Die Erklärung der „β-Höchstwahrscheinlichkeit von S“ wird daher nicht auf beliebig enge Näherungen, sondern auf beliebig enge *erreichbare* Näherungen zu beziehen sein. Ein physikalisches Gesetz zeichnet dann nicht mehr eine bestimmte scharfe Form, auch nur wahrscheinlichkeitsmäßig, eindeutig aus, sondern nur mit jener Genauigkeit, die durch die Unschärfebeziehungen zugelassen ist.

6. Das Vorurteil zugunsten der vollständigen prädikativen Bestimmtheit [31] aller Wirklichkeit hat zwei Hauptgründe. Der erste ist die Verwechslung der Annahme mindestens tatsächlicher Bestimmtheit, B § 7, mit einem logischen Satze. Logik sagt in Anwendung auf die Wirklichkeit nicht mehr, als daß, falls es eine Wirklichkeit gibt und sie irgendwie ist, sie eben so ist. Sie sagt insbesondere nicht, daß Wirklichkeit aus raumzeitlich scharf bestimmten Fällen bestehe, oder, falls sie vorhanden sei, aus solchen bestehen müsse.

7. Der andere Hauptgrund betrifft besonders die Annahme der gesetzmäßigen Bestimmtheit. Es ist die Verwechslung der *Höchstwahrscheinlichkeit* einer scharf bestimmten Geschehensart in bezug auf eine Bedingung mit *Notwendigkeit* eines solchen Geschehens, mindestens von einer Gesamtbedingung aus. So wenig wie die „tatsächliche“ Bestimmtheit von der sogenannten formalen Logik, ist die ursächliche von einer transzendentalen Logik der Verstandesbegriffe oder durch ein synthetisches Urteil *a priori* rechtmäßigerweise gefordert. Diese Bestimmtheitsannahme ist keine Bedingung, die Erfahrung erst möglich macht. Man sieht, daß auch die Erfahrungsbildung der exakten Wissenschaften durchaus ohne sie auskommt.

---

[31] Gemeint ist vollständige, eindeutige Bestimmtheit durch *Prädikate* im Sinne der *Principia mathematica* von Whitehead und Russell; Prädikat heißt hier eine Bestimmung, die ohne Bezugnahme auf eine ganze Klasse oder Art von Bestimmungen gefaßt werden kann. Die physikalischen Bestimmungen (§ 6, § 9) sind nicht Prädikate in diesem Sinne.

9. SINNBESTIMMTHEIT

1. Die einzige berechtigte Bestimmtheitsforderung in Sachen der Wirklichkeitserkenntnis ist, daß unsere Wirklichkeitsaussagen einen bestimmten, haltbaren Sinn haben sollen. Das ist, wie sich gezeigt hat, nicht zu erreichen, indem man annimmt, die Wirklichkeit bestehe aus Gegenständen, Fällen und Dingen oder nur aus Fällen, die durch Angabe von scharfen Bestimmungen, die sie erfüllten, *zu beschreiben* wären. Eine Aussage ist als Beschreibung von Gegenständen genommen ohne einen streng faßbaren und haltbaren Sinn. Sie hat nur den *vorläufigen* Sinn, auf einen strengen, der anzugeben ist, hinzuweisen [32].

2. Eine Wirklichkeitsaussage tritt auf in der sprachlichen Gestalt der Feststellung eines Falles, eines Dinges oder einer Eigenschaft, einer Gesetzmäßigkeit.

Der strenge Sinn eines *exakten Gesetzes* ist schon angegeben worden. Es hat die Bedeutung

$$(E\beta)\ \beta\mathfrak{H}(S).$$

Ein Gesetz in diesem Sinne verlangt in keiner Weise das Bestehen von scharf bestimmten Fällen und von nichttautologischen allgemeinen Implikationen zwischen deren Bestimmungen; es führt keine Fiktion des erreichten idealen Grenzfalles ein. Der unausdenkbare Gedanke der Erfüllung scharfer Form durch Fälle der Wirklichkeit ist ausgeschaltet, *die Beziehung zwischen Wirklichkeit und scharfer Bestimmung* gefaßt als *Höchstwahrscheinlichkeit beliebiger erreichbarer Näherung an diese, im Vergleich mit anderen scharfen Formen, in bezug auf eine Bedingung.* Die Annahme einer solchen Beziehung verstößt nicht gegen die festgestellte Unschärfe des Geschehens

---

[32] Daß es nicht der Sinn einer bloßen „Anweisung“, d.h. einer Forderung, sondern echter Aussagesinn sein wird, ist in der Einleitung, gegen M. Schlick, ausgeführt worden. Der Einwand richtet sich gegen alle Versuche, mit Gesetzen als bloßen Festsetzungen auszukommen. Es besteht zwischen Festsetzungen eine Rangordnung, die nicht wieder Sache des Festsetzens ist.

und gibt den Gesetzen einen strengen, induktiv zu begründenden Sinngehalt.

3. Die induktive Begründung eines exakten Gesetzes geschieht durch *messende Beobachtung* von Ereignissen. Das Ergebnis einer solchen Beobachtung spricht ein Satz aus wie dieser: Im physischen Bezugssystem $*B$ tritt zur Zeit $*t_0$ am Orte $*x_0$ ein annähernd punkthafter Körper $*K$ auf und hat die Geschwindigkeit $*v_0$ in Richtung von $*x$. Darin bedeuten die mit Stern versehenen Zeichen Beobachtetes; $*t_0$, $*x_0$ und $*v_0$ sind Zahlen, die als Messungsergebnisse auftreten; alle besternten Zeichen vertreten näherungsmäßige Angaben. Die Aussage hat die Gestalt der Erurteilung eines Falles, der angegebene Bestimmungen erfülle. Sie leistet dem Versuch, sie wörtlich genau zu nehmen, nicht Stand. Die Ausdrücke „das System $*B$", „der Zeitpunkt $*t_0$", „der Ort $*x_0$", „der Massenpunkt" oder „der Körper $*K$", „die Geschwindigkeit $*v_0$", „die Richtung der $*x$-Achse" haben die Form eindeutiger Kennzeichnungen, aber keiner dieser Ausdrücke ist eindeutig. Der vorläufige und andeutende Sinn, den die Aussage hat, fordert die Angabe eines streng faßbaren Sinnes. Er muß den Näherungsbefund enthalten und seine Bedeutung für die Wirklichkeit klar machen; niemals ist ein einseitiger Erscheinungsbefund für sich, rein phänomenologisch gemeint.

Das Verlangte leistet eine Aussage der folgenden Form: „Im System $*B$ tritt zur Zeit $*t_0$ am Orte $*x_0$ ein Massenpunkt $*K$ auf und hat die Geschwindigkeit $*v_0$ in Richtung von $*x$, und diese Feststellung ist ein näherungsmäßiger Ausdruck für einen Bedingungsinbegriff, in bezug auf welchen beliebige Näherung an die Form eines bestimmten Systems B, eines Zeitpunktes t_0 und eines Ortes x_0 in B und eines Massenpunktes K in t_0, x_0 und mit einer augenblicklichen Geschwindigkeit v_0 in Richtung von x höchstwahrscheinlich ist". Hier sind B, t_0, x_0, v_0, K rein begriffliche Formen; t_0, x_0, v_0 nicht bestimmt angegebene Maßzahlen, sondern nur Vertreter solcher, das Zeichen „t_0" z. B. ist ersetzbar durch das Zeichen „ein bestimmter Zeitwert". Alle diese Formen, Bedeutungen der Zeichen „B", „t_0" usw., sind durch ein Axiomensystem theoretischer Physik, das eine Raum-Zeit-Geometrie einschließt, in ihrem Zusammenhange festgelegt zu denken.

Es ergibt sich die allgemeine Erklärung: *Ist als ein „individueller Tatbestand", ein Sachverhalt *S beobachtet, so hat die Aussage „*S" den Sinn eines näherungsmäßigen Ausdruckes für einen Bedingungsinbegriff γ, in bezug auf den jede beliebige erreichbare Näherung an eine, nicht eindeutig anzugebende, scharfe Form S höchstwahrscheinlich ist* (gegenüber jeder nicht minder engen Näherung an eine beliebig anzunehmende gleichgeordnete Form *S'*). „**S*" ist die sprachübliche, auch in der Sprache der exakten Wissenschaft übliche, Fassung des Befundes als Feststellung „eines Falles mit den und den Bestimmungen".

4. Diese Darstellung drückt aus, daß der beobachtete Fall immer im Zusammenhang und auf dem Grunde der Naturgesetzlichkeit aufgefaßt ist, so wenig sie auch bekannt sein mag. Nur dem *vorläufigen* Sinne nach, den der Ausdruck des Befundes hat, ist der Fall als ein gegenständlich vorliegendes oder auftretendes Einzelnes hineingestellt in ein vorgegebenes Bezugssystem und in einen vorgegebenen Rahmen von Raum und Zeit. Der strenge Sinn der Ereignisaussage rechnet, wie mit keinem Ding oder Fall, mit keinem Gegenstande, der „die Zeit" oder „der Raum" zu nennen wäre. Diese Auffassung bedeutet keine Entwirklichung der Welt. Aber die Wirklichkeit ist, als *Bedingung*, in bezug auf welche beliebige Näherungen an gewisse begriffliche „Fall"-, „Ding"- und „Raumzeit"-*Bestimmungen* höchstwahrscheinlich sind, weder Ding noch Fall, noch Raumzeit. Zu sagen, sie oder die Welt bestehe aus streng vereinzelten Dingen oder Fällen in Raum und Zeit, hat keinen faßbaren Sinn.

5. Der strenge Sinn der Wirklichkeitsaussagen verwendet den Begriff der *Näherung* an scharfe Form. Er ist selbst ein unscharfer Begriff und erlaubt nicht, wie im rein Mathematischen, in jedem Falle die Entscheidung, welche von zwei Näherungen die engere sei, und niemals die Entscheidung, sie seien gleich eng. Der Begriff der Näherung ist für die genaue Wirklichkeitsaussage unentbehrlich. Unschärfe ist scharf zu fassen durch die einfache Erklärung, daß es Fälle im Sinne der Bestimmtheitsannahme (B § 7) nicht gibt. Das genügt aber nicht, um den Sinn von Einzelaussagen und bestimmten Gesetzaussagen zu fassen. Der Begriff der Näherung weist auf etwas *Erlebbares* hin, er drückt, angewandt, ein Erlebtes aus und hat nur hierin seine Bedeutung.

6. Der Beobachter gehört zu den Bedingungen des *Befundes*. Er muß nicht zur festgestellten Wirklichkeit *der* Bedingung gehören, in bezug auf welche ein Geschehen einer angegebenen Form höchstwahrscheinlich ist. Nur, welche Näherung an diese Form beobachtet wird, ist immer vom Beobachter mit abhängig. Näherung ist ein nie vollendetes *Erfüllen* einer scharfen Form. Die anschaulichen Kennzeichnungen, die in den sprachüblichen Wirklichkeitsaussagen auftreten, bedeuten nicht Bestimmungen im logischen Sinn; sie bedeuten *Erfüllungsweisen*, Weisen nähernden Erfüllens sehr zusammengesetzter und nicht genau angebbarer scharfer Form.

Solche Begriffe sind in den Fassungen *strenger Gesetze* ausgeschaltet; hier ist nur der *Begriff der Näherung*, aber keine Näherung verwendet. Im Ausdruck einer messenden physikalischen *Beobachtung* steht der Ausdruck erlebter Näherung noch als Hinweis auf eine begrifflich genügend gekennzeichnete, aber nicht eindeutig angegebene scharfe Form. In den Aussagen unstrenger Gesetze der beschreibenden Naturwissenschaften, in Aussagen ihrer Beobachtungen und in Wirklichkeitsaussagen, die nicht wissenschaftlich gefaßt sind, werden Begriffe von Erfüllungsweisen verwendet. So wenn ein Körper als schwefelgelb, eine Gestalt als eirund beschrieben wird, wenn man einen Blütenstand als Dolde, ein Gewebe als Plattenepithel kennzeichnet. Auch die anschaulich gefaßte Aussage meint nicht die Erscheinung oder die Wahrnehmung. Sie meint die Bedingung (β), die dadurch gekennzeichnet ist, daß sie zusammen mit normalen Bedingungen der Wahrnehmung (γ) — sie sind meist stillschweigend vorausgesetzt — gewisse Erscheinungsweisen höchstwahrscheinlich macht. Das ist ein Ansatz der Form

(1) $$(E\beta) : (\beta \wedge \gamma)\,\mathfrak{H}\,({}^*S)$$

wenn „$^*S$“ hier den normalen Erscheinungsbefund bedeutet. Zugleich gilt ein Gesetz

(2) $$(E\beta)\ \beta\,\mathfrak{H}\ (S)$$

worin „S“ für eine scharfe Bestimmung steht, die sich mindestens vorläufig nicht sehr genau festlegen läßt. Der Beobachter und die in ihm herrschenden Bedingungen des Befundes gehören selbst zum biologischen Bereich, und es muß keine Unvollkommenheit biologischer und ihnen nahestehender Aussagen sein, daß sie diese Bedingungen einbeziehen und den Tatbestand (2) „in der Sprache der Anschauung", durch einen Satz der Form (1) ausdrücken. Unter veränderten Wahrnehmungsbedingungen γ' hat man

$$(3) \qquad (\beta \wedge \gamma')\mathfrak{H}(*S')$$

wo $*S'$ ein veränderter anschaulicher Befund ist, trifft aber durch ihn, sofern man keiner Täuschung unterliegt, noch immer *dieselbe Bedingung* β, für die (1) und (2) gelten: die veränderten Nebenbedingungen werden „in Rechnung gezogen". Das besorgt zu einem guten Teil die Wahrnehmung selbsttätig, d. h. unter dem Einfluß von Umständen, die nicht bedacht, und von Erfahrungen, die nicht erinnert sind. Durch solche selbsttätige Berichtigung im Sinne der „Wahrnehmungskonstanz" wird der Bereich normaler Erscheinungsweisen beträchtlich erweitert. Die normalen Befunde, die zu einer Bedingung β gehören, sind dadurch ausgezeichnet, daß jeder von ihnen sie annähernd eindeutig kennzeichnet, was von entstellten, unklaren oder täuschenden Befunden nicht gilt.

7. Die sprachüblichen Aussagen *ursächlicher Zusammenhänge* verknüpfen ein Ereignis als Ursache mit einem zeitlich nachfolgenden als Wirkung. Der Stoß, der den Billardball traf, bewirkte, unter den gegebenen Umständen, dessen bestimmte Bewegung. Die Abfolge von Bestäubung einer Blüte, Befruchtung, Reifung von Frucht und Samen, Keimen des Samens und Entstehung einer Tochterpflanze, ihr Blühen, Bestäubung ihrer Blüten, ist eine biologisch bedeutsame Kausalkette. Sie wird von anderen gekreuzt, z. B. von einer, die das Leben eines Insekts ausmacht, in der Bestäubung. „Das Ereignis $*S_1$ ist Ursache des Ereignisses $*S_2$" bedeutet: „Es gibt einen Bedingungsinbegriff β derart, daß in bezug auf β beliebige Näherung des Geschehens an eine nicht eindeutig anzugebende Form S und in bezug auf β und gegebene Nebenbedingungen γ ein zeitlicher Ablauf $*S$ höchstwahrscheinlich ist, in welchem $*S_1$ eine Phase und $*S_2$ eine zeitlich nachfolgende Phase ist. Als Ursache ist hier nicht die sogenannte volle Ursache, im Sinne der Bestimmtheitsannahme, gemeint. Daß in jedem Ereignis beliebig viele Kausalketten sich kreuzen, bedeutet, daß für das Ereignis viele Bedingungen bestimmend sind. Es hängt von der Betrachtungsweise ab, welche als Hauptbedingung genommen wird; der in bezug

auf sie höchstwahrscheinliche Verlauf ist die betrachtete Kausalkette. Als Glieder können beliebige Phasen des Ablaufs gelten; man greift besonders auffällige, ausgeprägte und bedeutsame heraus.

Zwischen einem Ereignis $*S_1$ und einem nachfolgenden $*S_2$ besteht nicht eine angewandte Folgebeziehung $*S_1 \rightarrow *S_2$ (im Sinne von 3. der Einleitung). Sind $*S'$ und $*S''$ nun, statt gegebener Ereignisse, unscharfe Bestimmungen für solche, so kann eine ursächliche Verknüpfung der Form

$$(E\beta)\ \beta\mathfrak{H}\ (*S' > *S'')$$

bestehen; z. B. „Es besteht eine Bedingungsinbegriff β, in bezug auf den höchstwahrscheinlich ist: wenn dieser Schalter auf die nächste Rast gedreht wird, so erfolgt in dieser Leitung Stromschluß“. Ihr ist, nach (III) § 5, gleichbedeutend die Beziehung

$$(E\beta) : (\beta \wedge *S')\mathfrak{H}(*S'')$$

auf Grund deren in gegebenem Falle unter den Bedingungen β und $*S'$ und wenn ein „störender“ Umstand nicht vorzuliegen scheint, das Zutreffen von $*S''$ erwartet wird. Man sieht, worin sich die Beziehung von einer strengen allgemeinen Implikation wesentlich unterscheidet.

Je entfernter raumzeitlich eine Ursache ist, desto geringer wird ihr Anteil an der Bestimmung der Wirkung, desto weniger kennzeichnend ist diese für die bestimmte Ursache; es gibt Zustände, in denen jede Spur von ihr untergegangen ist. Das heißt, es sind neben der Bedingung β immer mannigfachere Nebenbedingungen für die entferntere Wirkung bestimmend. Die etwas unbestimmte Rede von der Wahrscheinlichkeit der Unordnung gründet sich darauf, daß in bezug auf raumzeitliche Ausdehnung die Gleichverteilung höchstwahrscheinlich ist.

8. Eine Wirklichkeitsaussage ist nicht als beschreibende Aussage *über* einen vorliegenden Fall oder *über* alle Fälle einer Art logisch zu werten, es gibt weder diese Allheit noch den genauen Einzelfall. Mit jener Wertung, die ein Rest der erkenntnistheoretischen Lehre von der *adaequatio rei et intellectus* ist, entfallen die unerfüllbaren Ansprüche der „Verifizierung“ der Allaussage in Einzelaussagen, d. h. ihrer Zurückführung auf solche, und einer *logischen* Rechtfertigung der Induktion. Allaussage und Einzelaussage im Erfahrungsbereiche sind nicht als Gegenstandsbe-

schreibung zu verstehen;[33] als *Ausdruck* einer Bedingung und der näherungsmäßigen Erfüllung der in bezug auf sie höchstwahrscheinlichen Bestimmung sind sie *nicht wesentlich verschieden* und verlangen beide nur die Art von Beglaubigung, die es für die Erfahrungssätze gibt: Bewährung in Erfahrungen. — Wirklichkeit ist nicht „in sich unbestimmt" zu nennen, obwohl sie nicht *prädikativ* eindeutig bestimmt ist (*Prädikat* im Sinne von Whitehead und Russells Principia Mathematica verstanden). *Sie ist bestimmt in dem Sinne, daß sie in Aussagen eines streng bestimmten Sinns zu fassen und auszudrücken ist.*

---

[33] P. Jordan (Die Physik des 20. Jahrhunderts, Braunschweig 1936) spricht in gleichem Sinne von einer beschränkten Objektivierbarkeit der physikalischen Beobachtungen, zieht aber aus ihr positivistische Folgerungen, läßt im übrigen noch außerwissenschaftlichen »Ausdruck« seelischer Erlebnisse gelten (S. 133 f.) Vgl. dazu unten 3 § 10.

10. GRUNDFRAGEN

1. Der Begriff der Bedingung, in bezug auf welche eine beliebige Näherung an eine scharfe Form höchstwahrscheinlich ist, wurde nicht erklärt. Er kann als *Grundbegriff* behandelt werden, gekennzeichnet durch die Beziehungen

$$\text{(I)} \qquad \{\beta\mathfrak{H}(S) \wedge (S \to P)\} \to \beta\mathfrak{H}(P)$$

$$\text{(II)} \qquad \{\beta\mathfrak{H}(S) \wedge \beta\mathfrak{H}(P)\} \to \beta\mathfrak{H}(S \wedge P)$$

$$\text{(III)} \qquad \beta\mathfrak{H}(S > P) \longleftrightarrow \{(\beta \wedge S)\mathfrak{H}(P)\}$$

Die Umkehrung von (II) folgt aus (II) und (I), weil $(S \wedge P) \to S$ und $(S \wedge P) \to P$ gilt. Ob außer den angeführten wahrscheinlichkeitstheoretischen Axiomen der Naturwissenschaft noch andere einzuführen sind, soll hier nicht untersucht werden.

2. Aus den wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundannahmen und der Erklärung (1) §2

$$\{W(\beta x, \alpha x) = p\} =_{Df} (n)\ \beta\mathfrak{H}\left(\left| h_n^\alpha - p \right| \leqq \frac{1}{2n}\right)$$

lassen sich durch rein logisch-mathematische Überlegungen die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ableiten.

3.[34] Es ist nur für eine formalistische Betrachtung der naturwissenschaftlichen Sätze, nicht für die Menschen, die Naturwissenschaft treiben, und nicht für die Naturwissenschaft belanglos, daß der Grundbegriff der *Bedingung* eine *Wirklichkeit* ausdrückt. Sie läßt sich nicht als ein Gegenstand aufweisen; doch hat sich der Gegenstandsbegriff als eine nur vorläufige Fassung und ohne eigenen strengen Sinn erwiesen. Aber Wirklichkeit läßt sich erleben und wird in jeder Gegenstandserfassung erlebt. Die Bedingung β, die dadurch gekennzeichnet wird, daß in bezug auf sie beliebige Näherung an die scharfe Form S höchstwahrscheinlich ist, ist zu erleben als *Strebung* in die Erfüllung von S. Es ist Strebung, deren *Sinn* oder Richtung, nicht Ziel oder Gegenstand, die Bestimmung

[34] Vgl. zum Folgenden mein Buch Erlebnis und Wirklichkeit, Leipzig 1935.

S ist: *der Bestimmungsgehalt S ist Inhalt oder Sinngehalt der Strebung β*. Dies ist die wesentliche Verbindung von Wirklichkeit und scharfer Bestimmung oder Form. Die Strebung ist unabhängig vom Erleben, aber zu erleben und wird erlebt, nicht im Sinne eines subjektivistischen, psychologischen Vorurteils als dem Erlebenden eigene, seelische, noch im Sinne eines magisch-mythischen Denkens als äußeren Gegenständen innewohnende, sondern *unabhängig* von dieser Scheidung und *vor* ihr. Erleben der Strebung ist zugleich Erleben enger oder loser, entschiedener oder schwacher oder nur ansatzmäßiger Näherung, d. h. nähernder Erfüllung ihres Sinngehaltes.

4. *Induktion* ist *wie Wahrnehmung* nicht logisch zu widerlegen, noch logisch zu begründen und bedarf wie die Wahrnehmung keiner solchen Begründung. Ihre Rechtfertigung liegt im selbstgewissen Erleben sinnhafter Strebung und ihrer nähernden Erfüllung. Zwischen Wahrnehmung des Einzelfalles und Induktion besteht keine scharfe Scheidung.

Es gibt erkenntnismäßig leistungsfähigere, wertvollere, und minder wertvolle Befunde und Induktionen oder Hypothesen. Bei beiden entscheidet der bessere Sinn. Er ist dem schlechteren gegenüber ausgezeichnet durch die nicht umkehrbare Beziehung, daß von ihm aus mehr als vom schlechteren und insbesondere dieser selbst und seine beschränkte Leistung vorauszusehen oder aufzuklären ist. Dadurch allein bestimmt sich der Fortschritt der Erkenntnis.

5. Die Berufung auf die zu erlebende Wirklichkeit sinnhafter Strebung ist nicht metaphysisch in dem Sinne eines Überschreitens der Erfahrung. Sie widerstreitet höchstens einem Begriff der Erfahrung, der, wie zu sehen war, einer genauen Prüfung nicht standhält.